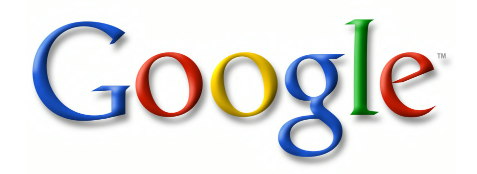
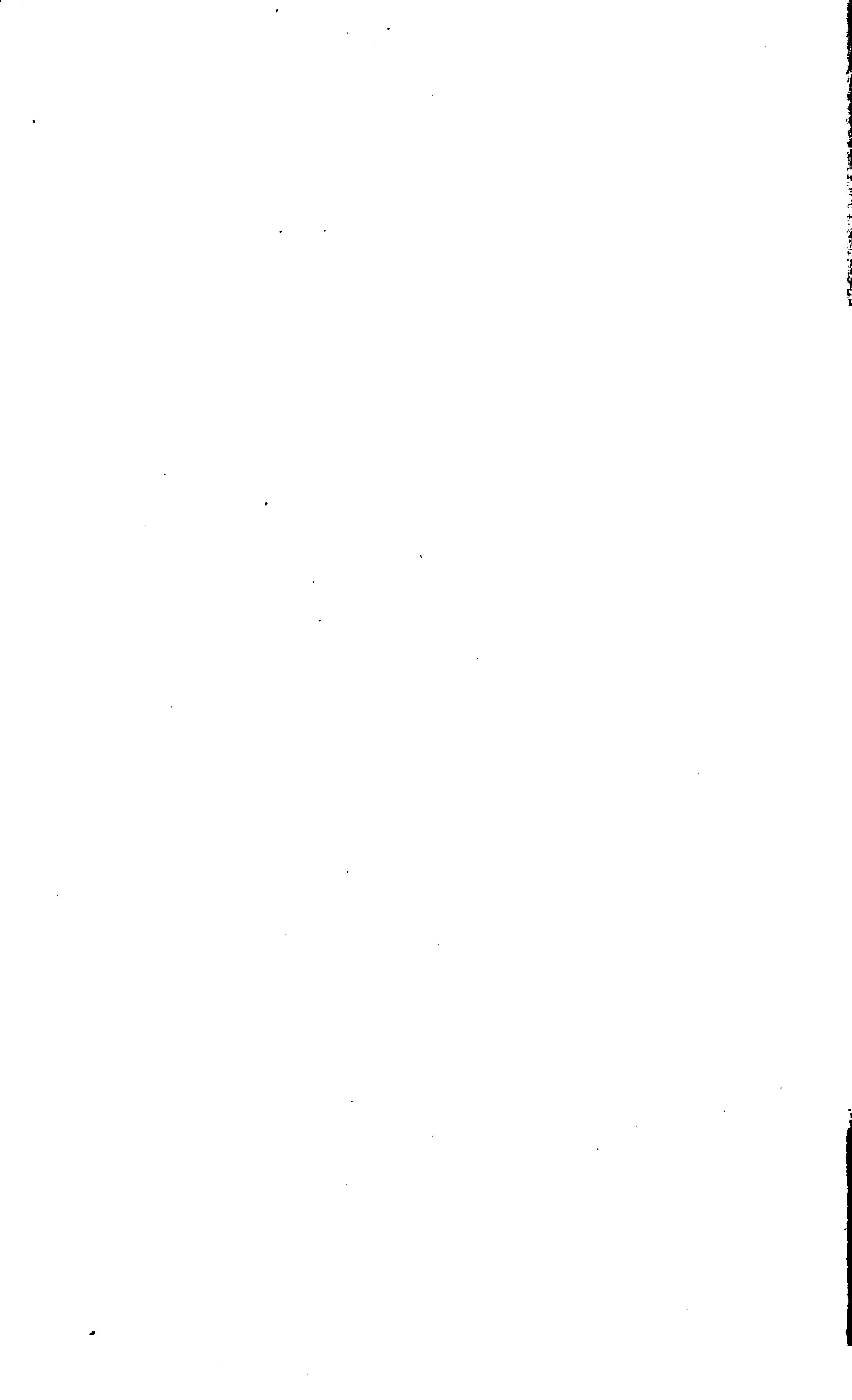


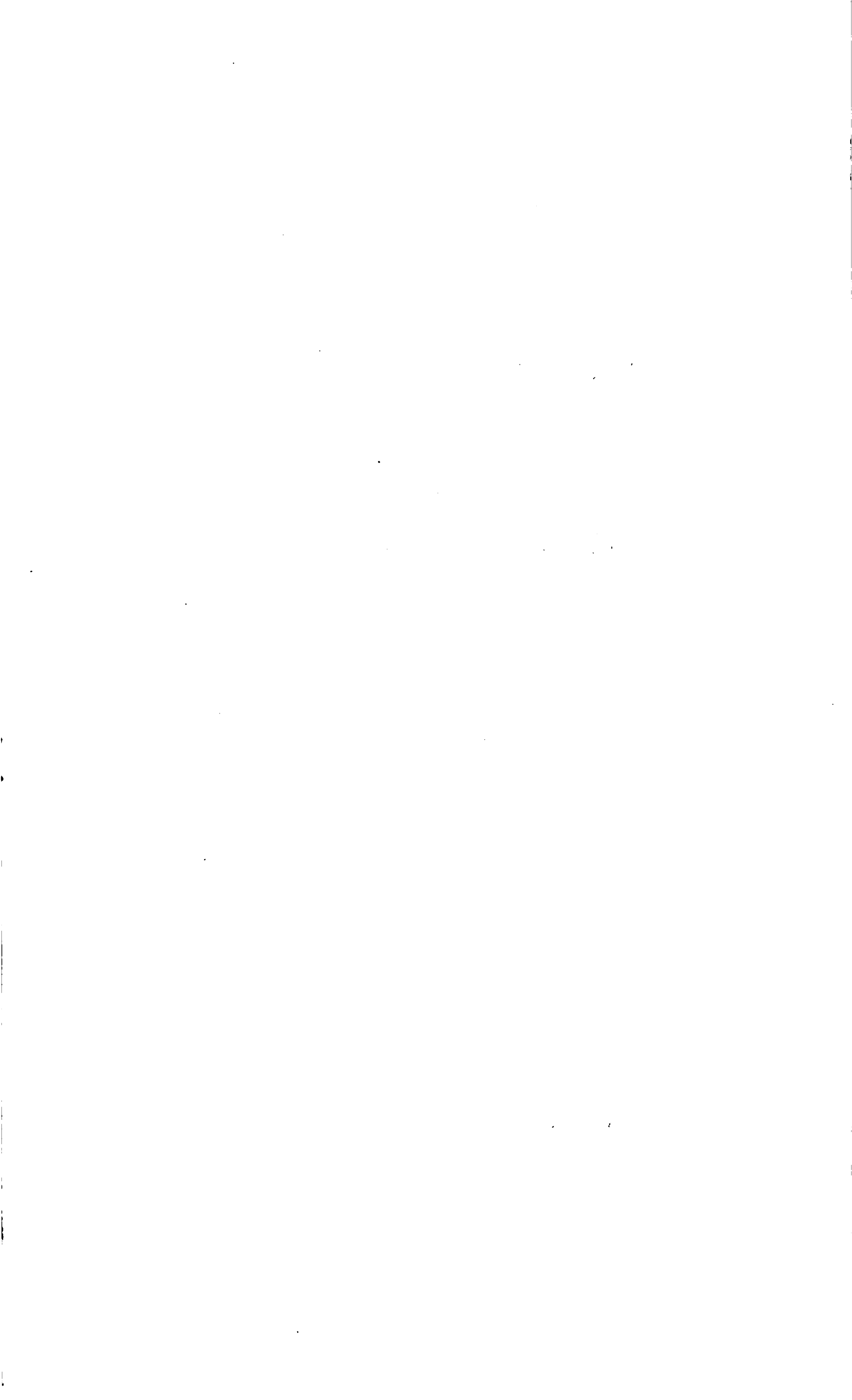












SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTDRITTER BAND.

WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CIII. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1894. — HEFT I BIS X.

(MIT 8 TAFELN UND 72 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

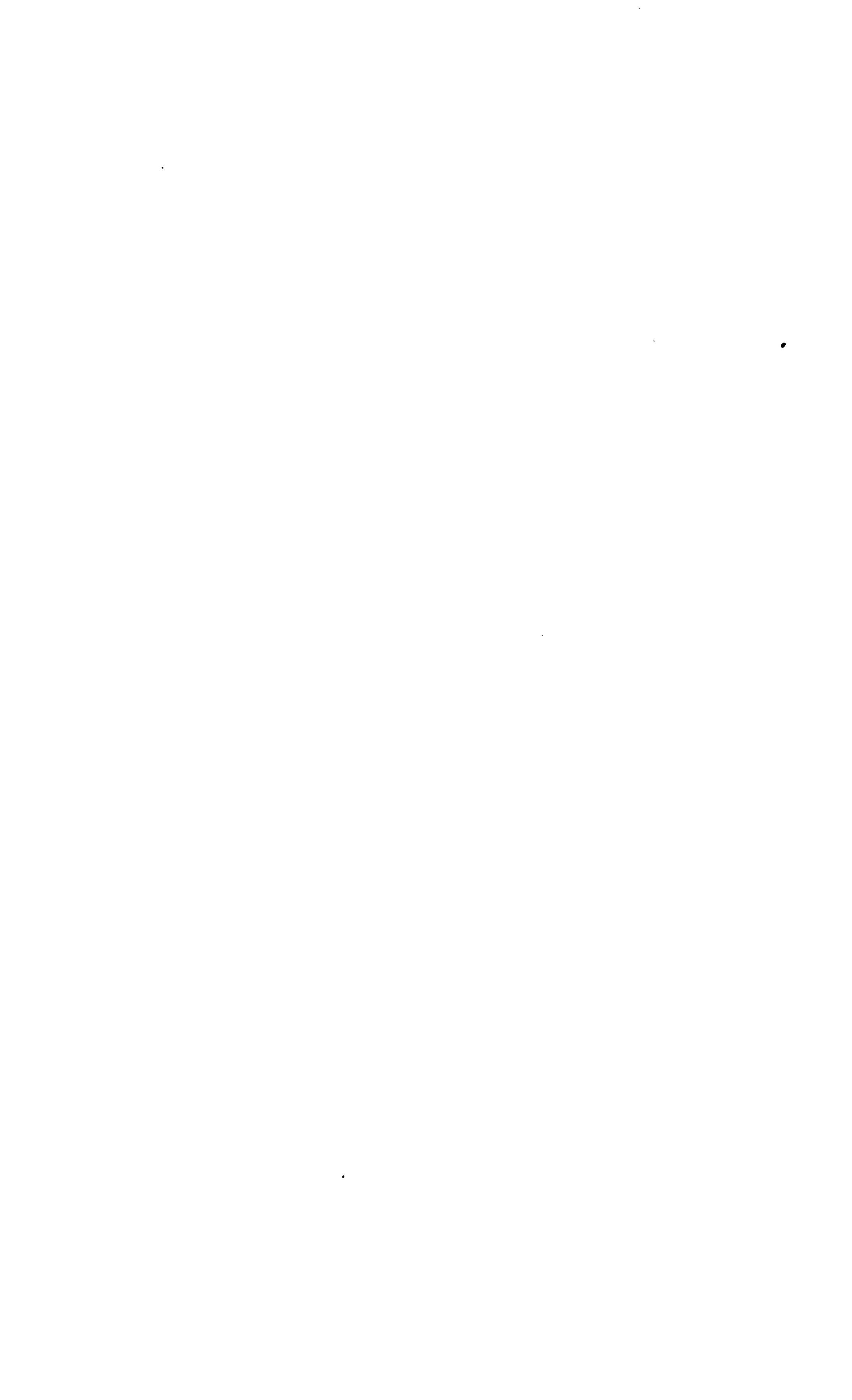
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



I. SITZUNG VOM 4. JÄNNER 1894.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 1. Jänner l. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe Herrn Professor Dr. Heinrich Hertz in Bonn.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt die aus dem erschienenen 60. Band (Jahrgang 1893) veranstaltete Collectiv-Ausgabe der Berichte der Commission für Erforschung des östlichen Mittelmeeres (Zweite Reihe), ferner das Heft X (December 1893) der Monatshefte für Chemie vor.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt ein im Gesandtschaftswege für die Bibliothek der kaiserl. Akademie eingelangtes Druckwerk: »Études des Gîtes Minéraux de la France«, publicirt im Auftrage des französischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten.

Das Präsidium der mathematischen Gesellschaft an der kaiserl. Universität in Moskau ladet die kaiserl. Akademie zur Theilnahme an der aus Anlass des 25jährigen Bestandes dieser Gesellschaft am 21. Jänner l. J. daselbst stattfindenden feierlichen Sitzung ein.

Das ungarische Central-Bureau für ornithologische Beobachtungen in Budapest zeigt an, dass diese neugegründete Anstalt mit 1. Jänner 1894 ihre Thätigkeit in der Organisirung des Beobachtungsnetzes begonnen hat.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. F. Streintz: »Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen.«

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens in Graz übersendet eine Abhandlung: »Über die Fundamentalgleichung eines Gattungsbereiches algebraischer Zahlen.«

Herr Prof. Dr. C. Nicoladoni in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die Skoliose des Lendensegmentes.« (Fortsetzung.)

Das w. M. Herr Hofrath C. Claus überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung unter dem Titel: »Zoologische Ergebnisse der Tiefsee-Expedition im östlichen Mittelmeere auf S. M. Schiff »Pola«. III. Die Holocypriden und ihre Entwicklungsstadien. Gesammelt 1890, 1891, 1892, 1893.«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Mittheilung von Dr. R. Daublebsky v. Sterneck: »Abzählung der Primzahlen von der Form $100n+1$«.

Der Secretär Herr Hofrath J. Hann überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten.«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Loewy, M., Recherches sur la détermination des constantes des chlichés photographiques du ciel. Paris, 1893; 4°.

Ministère des Trauvaux publics, Études des Gîtes Minéraux de la France. Publiées sous les auspices de M. le Ministre de Travaux publics par le Service des Topographies souterraines. Bassin houiller et permin d'Autun et d'Épinac. Fascicule IV. Flore Fossilie. IIme Partie par B. Renault. (Atlas). Paris, 1893; 4°.

Mayor, A., Louis Agassiz, sa vie et sa correspondance. Traduit de l'Anglais. (Orné d'un portrait d'Agassiz.) Neuchâtel, 1887; 8°.

Vincenti Giuseppe. La Fonografia universale Michela e la Fono-Telegrafia universale Vincenti. Torino 1893; Folio.

Über die Fundamentalgleichung eines Gattungsbereiches algebraischer Zahlen

von

F. Mertens,

c. M. k. Akad.

1.

Ist

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n = 0 \qquad (1)$$

eine gegebene irreductibele Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen Coëfficienten und ξ eine Wurzel derselben, so wird die Gesammtheit aller ganzen rationalzahligen Functionen von ξ nach Kronecker[1] ein Gattungsbereich genannt, welcher hier mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden soll.

Jede solche Function

$$\eta = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \ldots$$

welche immer unter den Grad n in ξ gebracht werden kann, genügt einer rationalzahligen Gleichung n^{ten} Grades

$$y^n + c'_1 y^{n-1} + c'_2 y^{n-2} + \ldots + c'_n = 0,$$

deren linke Seite die Norm von

$$y - b_0 - b_1 \xi - b_2 \xi^2 - \ldots$$

oder die Resultante von

$$y - b_0 - b_1 x - b_2 x^2 - \ldots$$

[1] Festschrift »Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen«, Crelle's Journal, Bd. 92.

und

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n$$

ist. Sind insbesondere in dieser Gleichung die Coëfficienten

$$c'_1, c'_2, \dots c'_n$$

ganze Zahlen, so wird η eine ganze algebraische Zahl des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$ genannt.

Es gibt unendlich viele Systeme von n ganzen algebraischen Zahlen

$$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$$

des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$, welche die Eigenschaft haben, dass jede ganze algebraische Zahl dieses Bereiches als Vielfachsumme[1] von $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ darstellbar ist. Ein solches System wird ein Fundamentalsystem von $\mathfrak{G}$ genannt.

Sind

$$\begin{array}{llll} \omega'_1, & \omega'_2, & \dots & \omega'_n \\ \omega''_1, & \omega''_2, & \dots & \omega''_n \\ \dots & & & \\ \omega_1^{(n-1)}, & \omega_2^{(n-1)}, & \dots & \omega_n^{(n-1)} \end{array}$$

die conjugirten Werthe der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, welche aus letzteren hervorgehen, wenn ξ nach und nach durch alle anderen Wurzeln der Gleichung (1) ersetzt wird, so heisst das Quadrat der Determinante

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \dots & \omega_n \\ \omega'_1, & \omega'_2, & \dots & \omega'_n \\ \dots & & & \\ \omega_1^{(n-1)}, & \omega_2^{(n-1)}, & \dots & \omega_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

welches für alle Fundamentalsysteme denselben Werth hat, die Discriminante des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$.

Sind ferner $u_1, u_2, \dots u_n$ Unbestimmte und setzt man

$$\begin{array}{l} \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \dots + \omega_n u_n = u \\ \omega'_1 u_1 + \omega'_2 u_2 + \dots + \omega'_n u_n = u' \\ \dots \\ \omega_1^{(n-1)} u_1 + \omega_2^{(n-1)} u_2 + \dots + \omega_n^{(n-1)} u_n = u^{(n-1)}, \end{array}$$

[1] Ich erlaube mir hier eine ganze ganzzahlige linear-homogene Function mehrerer Grössen kurz als Vielfachsumme dieser Grössen zu bezeichnen.

so ist das Product

$$(t-u)(t-u')\dots(t-u^{(n-1)})$$

in den Wurzeln der Gleichung (1) symmetrisch und daher als ganze Function von t von der Form

$$F(t) = t^n - C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} - \dots \pm C_n$$

darstellbar, in welcher

$$C_1, C_2, \dots C_n,$$

beziehungsweise ganze ganzzahlige homogene Functionen der Unbestimmten $u_1, u_2, \dots u_n$ vom Grade $1, 2, \dots n$ sind. Die Gleichung

$$F(t) = 0,$$

welche die Wurzeln

$$u, u', \dots u^{(n-1)}$$

hat und irreductibel ist, wird die Fundamentalgleichung des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$ genannt.

Es soll hier das Verhalten der Function $F(t)$ in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul untersucht werden.[1] Zu diesem Zwecke sollen jedoch behufs grösserer Klarheit einige Sätze und Bemerkungen vorausgeschickt werden.

2.

I. Unter einer Function einer oder mehrerer Veränderlichen oder Unbestimmten werde hier in diesem Abschnitte immer eine ganze ganzzahlige Function dieser Veränderlichen und unter p eine gegebene Primzahl verstanden. Das Zeichen Γ soll immer eine ganze ganzzahlige Function vorstellen.

Jede Function G ist in Bezug auf den Modul p einer Function G_0 congruent, deren Coëfficienten nicht negativ und $< p$ sind. Denn man braucht nur, um G_0 zu erhalten, jeden Coëfficienten von G durch seinen kleinsten nicht negativen Rest in Bezug auf den Modul p zu ersetzen. Unter der Gradzahl der Function G in Bezug auf eine der in derselben vorkommenden Veränderlichen wird die betreffende Gradzahl von G_0, unter der

[1] V. Kronecker's Festschrift, §. 25.

Gradzahl in Bezug auf mehrere Veränderliche die Summe der auf die einzelnen Veränderlichen sich beziehenden Gradzahlen verstanden. Wenn G_0 identisch $= 0$ ist oder alle Coëfficienten von G durch p theilbar sind, so hat G keine Gradzahlen in Bezug auf den Modul p.

II. Man sagt, dass eine Function A durch eine Function M, welche jedoch nicht durch p theilbar sein darf, in Bezug auf den Modul p theilbar ist oder dass M in A aufgeht oder ein Theiler von A ist, wenn

$$A \equiv \Gamma M \pmod{p}$$

ist.

Wenn A nicht durch p theilbar ist und M in Bezug auf p in A aufgeht, so hat M keine höheren Gradzahlen als A.

Wenn jede der Functionen M, N durch die andere in Bezug auf den Modul p theilbar ist, so ist

$$N \equiv aM \pmod{p},$$

wo a eine nicht durch p theilbare Zahl bezeichnet. Denn man hat

$$N \equiv QM \pmod{p}$$
$$M \equiv Q_1 N \pmod{p},$$

wo Q, Q_1 ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen. Aus diesen Congruenzen folgt

$$M(1-QQ_1) \equiv 0 \pmod{p},$$

also auch

$$1-QQ_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wenn aber

$$QQ_1 \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, so müssen alle Gradzahlen von Q und $Q_1 = 0$ sein und Q ist eine nicht durch p theilbare Zahl a.

III. Wenn die Producte einer Function G der Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

in n Functionen

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

derselben Veränderlichen, welche jedoch beziehungsweise in $x_1, x_2, \ldots x_n$ in Bezug auf p vom Grade 0 sind, durch die Function M in Bezug auf den Modul p theilbar sind, so ist G selbst in Bezug auf p durch M theilbar.

Gesetzt, man kenne eine Function ω der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche k verschwindende Gradzahlen besitzt, aber x_m in höherem als dem 0ten Grade enthält und deren Product in G durch M nach dem Modul p theilbar ist. Man hat dann

$$\omega G \equiv AM \pmod{p}$$
$$f_m G \equiv BM \pmod{p},$$

also auch

$$M(Af_m - \omega B) \equiv 0 \pmod{p},$$

wo A, B ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen. Hieraus folgt

$$Af_m - \omega B \equiv 0 \pmod{p}$$

oder

$$\omega B = Af_m + p\Gamma.$$

Ist nun ψx_m^r der die höchste Potenz von x_m enthaltende Bestandtheil von ω, P_{h-1} ein Product von irgend $h-1$ Coëfficienten, welche in ω bei den einzelnen Potenzen von x_m stehen, und b, C jeder Coëfficient einer Potenz von x_m in B und $Af_m + p\Gamma$, so gibt es einen Exponenten h von der Art,[1] dass sich jedes Product $\psi^h b$ als Vielfachsumme aller Producte $P_{h-1}\, C$ darstellen lässt. Da aber jeder Coëfficient C durch f_m in Bezug auf den Modul p theilbar ist, so wird

$$\psi^h b \equiv \Gamma f_m \pmod{p}$$

und demzufolge auch

$$\psi^h B \equiv \Gamma f_m \pmod{p}.$$

Hieraus folgt

$$\psi^h BM \equiv \psi^h f_m G \equiv \Gamma f_m M \pmod{p}$$

oder

$$f_m(\psi^h G - \Gamma M) \equiv 0 \pmod{p}$$

---

[1] Vergl. Mertens: »Über einen algebraischen Satz«, diese Sitzungsber., Bd. CI, Abth. II. a.

und also auch

$$\psi^h G - \Gamma M \equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Function ψ^h hat daher wieder dieselbe Eigenschaft wie ω, dass ihr Product in G nach dem Modul p durch M theilbar ist, besitzt aber eine verschwindende Gradzahl mehr als ω. Da man nun eine Function kennt, welche eine verschwindende Gradzahl besitzt und deren Product in G durch M nach dem Modul p theilbar ist, z. B. f_1, so können durch das vorstehende Verfahren nach und nach Functionen hergestellt werden, welche immer mehr verschwindende Gradzahlen aufweisen und deren Product in G durch M nach dem Modul p theilbar ist. Man gelangt daher auch zu einer Function mit lauter verschwindenden Gradzahlen oder zu einer nicht durch p theilbaren Zahl a, für welche

$$aG \equiv \Gamma M \pmod{p}$$

ist. Bestimmt man dann a' aus der Congruenz

$$aa' \equiv 1 \pmod{p},$$

so wird

$$aa'G \equiv G \equiv a'\Gamma M \pmod{p}.$$

IV. Wenn A, B gegebene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, deren keine durch p theilbar ist, so kann man eine nicht durch p theilbare Function M derselben Veränderlichen bestimmen, welche den Congruenzen

$$f_i A \equiv \mathfrak{A} M \pmod{p}$$
$$g_i B \equiv \mathfrak{B} M \pmod{p}$$
$$M \equiv A_0 A + B_0 B \pmod{p}$$

genügt, wo f_i, g_i, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, A_0, B_0 Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen, von welchen insbesondere f_i, g_i in Bezug auf x_i verschwindende Gradzahlen haben.

Man kann ähnlich wie bei dem Verfahren Euclid's eine Reihe von Functionen

$$A, B, C, \ldots M, 0 \tag{2}$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufstellen, welche folgende Eigenschaften hat. Sie fängt mit den gegebenen Functionen

A, B an und besteht mit Ausnahme der letzten Function, welche $\equiv 0$ ist, aus lauter durch p nicht theilbaren Functionen. Sind P, Q, R drei Glieder der Reihe, von welchen Q auf P und R auf Q folgt, so erreicht R in x_i den Grad von Q nicht, und es besteht eine Congruenz von der Form

$$\varphi_i P \equiv \Gamma Q + R \quad (\text{mod. } p),$$

wo die Function φ_i in x_i vom Grade 0 ist.

Sind zwei benachbarte Glieder P, Q der Reihe gegeben, welche nicht durch p theilbar sind, so findet man das auf Q folgende Glied R folgendermassen. Es sei

$$P \equiv a_0 x_i^{\mu} + a_1 x_i^{\mu-1} + \ldots + a_{\mu} \quad (\text{mod. } p)$$
$$Q \equiv b_0 x_i^{\nu} + b_1 x_i^{\nu-1} + \ldots + b_{\nu} \quad (\text{mod. } p),$$

wo a_0, b_0 nicht durch p theilbar sind. Man darf annehmen, dass $\mu \geqq \nu$ ist, da diese Bedingung bei den ersten zwei Gliedern der Reihe eventuell durch Vertauschung von A und B herbeigeführt werden kann und bei den späteren Gliedern von selbst erfüllt ist. Man hat dann durch algebraische Division

$$b_0^{\mu-\nu+1}(a_0 x_i^{\mu} + a_1 x_i^{\mu-1} + \ldots + a_{\mu}) = \Gamma(b_0 x_i^{\nu} + b_1 x_i^{\nu-1} + \ldots + b_{\nu}) + \mathfrak{R},$$

wo $\mathfrak{R}$ ganzzahlig ist und in x_i den Grad ν nicht erreicht. Geht der Ausdruck $\mathfrak{R}$ nach Ersetzung aller seiner Coëfficienten durch ihre kleinsten nicht negativen Reste in Bezug auf den Modul p in R über, so wird

$$b_0^{\mu-\nu+1} P \equiv \Gamma Q + R \quad (\text{mod. } p).$$

Bestimmt man in der dargelegten Weise zuerst aus den beiden ersten Gliedern A, B der Reihe das dritte Glied C, hierauf, wofern C noch nicht $= 0$ ist, aus B und C das vierte Glied D u. s. f., so gelangt man nach einigen Schritten zu der Function 0, da die Gradzahlen der Functionen $B, C, \ldots$ in Bezug auf x_i eine fallende Reihe bilden, und die gesuchte Reihe ist gebildet.

Gibt es nun für zwei benachbarte Functionen Q, R der Reihe (2) zwei nicht durch p theilbare und x_i nicht enthaltende Functionen χ_i, ω_i von der Art, dass die Producte $\chi_i Q, \omega_i R$ in Bezug auf den Modul p durch die vorletzte Function M der

Reihe theilbar sind, so findet dasselbe für die Functionen P und Q statt, wenn P der Function Q in der Reihe (2) unmittelbar vorangeht. Denn man hat

$$\varphi_i P \equiv \Gamma Q + R \pmod{p}$$

und daher auch

$$\begin{aligned} \omega_i \chi_i \varphi_i P &\equiv \Gamma \omega_i \chi_i Q + \chi_i \omega_i R \pmod{p} \\ &\equiv \Gamma M \pmod{p}. \end{aligned}$$

Da aber die beiden letzten Glieder der Reihe durch M theilbar sind, so gibt es auch zwei nicht durch p theilbare und x_i nicht enthaltende Functionen f_i, g_i von der Art, dass die Producte $f_i A$, $g_i B$ in Bezug auf den Modul p durch M theilbar sind.

Ist anderseits M durch die zwei benachbarten Functionen Q, R in der Gestalt

$$M = UQ + VR + p\Gamma$$

darstellbar, so findet dasselbe auch für die Functionen P und Q statt, da

$$\begin{aligned} M &\equiv UQ + V(\varphi_i P - \Gamma Q) \pmod{p} \\ &\equiv \varphi_i VP + (U - \Gamma V)Q \pmod{p} \end{aligned}$$

wird. M ist also auch durch die beiden Functionen A und B in derselben Weise darstellbar.

Die vorletzte Function M der Reihe (2) erfüllt mithin alle gewünschten Bedingungen.

V. Zwei Reihen von Functionen

$$A, B, \ldots E$$

und

$$A', B', \ldots E'$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sollen kurz gleichstimmig in Bezug auf den Modul p genannt werden, wenn sich für jede Veränderliche x_i und jede Function Φ der ersten Reihe und jede Function Φ' der zweiten Reihe Functionen f_i, f_i' von der Art angeben lassen, dass die auf x_i sich beziehenden Gradzahlen derselben $= 0$ sind und die Producte $f_i \Phi$, $f_i' \Phi'$ sich beziehungsweise in der Gestalt

$$f_i\Phi \equiv A'_0A' + B'_0B' + \ldots + E'_0E' \quad (\text{mod. } p)$$
$$f'_i\Phi' \equiv A_0A + B_0B + \ldots + E_0E \quad (\text{mod. } p)$$

darstellen lassen, wo A_0, $B_0, \ldots A'_0$, $B'_0, \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen.

Zwei Functionenreihen sind gleichstimmig, wenn sie mit einer und derselben dritten Functionenreihe gleichstimmig sind.

VI. Es gibt immer eine Function T, welche mit einer Reihe gegebener Functionen

$$A, B, \ldots E,$$

die nicht alle durch p theilbar sind, in Bezug auf den Modul p gleichstimmig ist. Die Function T ist bis auf einen Zahlenfactor bestimmt, da jede mit $A, B, \ldots E$ gleichstimmige Function T' auch mit einer bestimmten Function T dieser Art gleichstimmig sein, also in der Beziehung

$$T' \equiv aT \quad (\text{mod. } p)$$

stehen muss. Die Function T geht nach III in allen Functionen $A, B, \ldots E$ in Bezug auf den Modul p auf und ist durch jeden gemeinschaftlichen Theiler dieser Functionen nach p theilbar. Sie wird der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen $A, B, \ldots E$ in Bezug auf den Modul p genannt.

Ist T der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen $A, B, \ldots E$ in Bezug auf den Modul p und

$$A \equiv A_1T, \ B \equiv B_1T, \ldots E \equiv E_1T \quad (\text{mod. } p),$$

so ist 1 der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen $A_1, B_1, \ldots E_1$. Denn aus der Congruenz

$$f_iT \equiv A_0A + B_0B + \ldots + E_0E \quad (\text{mod. } p)$$

folgt

$$f_iT \equiv (A_0A_1 + B_0B_1 + \ldots + E_0E_1)T \quad (\text{mod. } p)$$

und demzufolge

$$f_i \equiv A_0A_1 + B_0B_1 + \ldots + E_0E_1 \quad (\text{mod. } p).$$

Sind φ, ψ ganze Functionen der Veränderlichen $v, \ldots$, deren Coëfficienten Functionen von x_1, $x_2, \ldots x_n$ sind und haben die Coëfficienten von φ, von welchen vorausgesetzt wird, dass sie

nicht alle durch p theilbar sind, den grössten gemeinschaftlichen Theiler T in Bezug auf p, so sind die Coëfficienten von $T\psi$ mit denen von $\varphi\psi$ gleichstimmig in Bezug auf den Modul p.

Es seien, um dies darzuthun,

$$\begin{array}{l} A_1, A_2, \ldots \\ B_1, B_2, \ldots \\ C_1, C_2, \ldots \end{array}$$

beziehungsweise die Coëfficienten der verschiedenen Potenzproducte der Unbestimmten $v, \ldots$ in den Functionen φ, ψ und $\varphi\psi$, P_μ irgend ein Product von μ Coëfficienten von φ und m die Anzahl der Coëfficienten von φ. Es gibt einen Exponenten h von der Art,[1] dass jedes Product $A_\alpha^h B_\beta$ sich als Vielfachsumme aller Producte $P_{h-1} C_\gamma$ darstellen lässt. Ist nun

$$f_i T \equiv \mathfrak{A}_1 A_1 + \mathfrak{A}_2 A_2 + \ldots + \mathfrak{A}_m A_m \quad (\text{mod. } p),$$

wo f_i die Veränderliche x_i nicht enthält und nicht durch p theilbar ist, so wird

$$f_i^{hm} T^{hm} \equiv (\mathfrak{A}_1 A_1 + \mathfrak{A}_2 A_2 + \ldots + \mathfrak{A}_m A_m)^{hm} \quad (\text{mod. } p).$$

Da aber die Potenz

$$(\mathfrak{A}_1 A_1 + \mathfrak{A}_2 A_2 + \ldots)^{hm}$$

eine Vielfachsumme von Ausdrücken $\mathfrak{P} P_{hm}$ ist, in welchen $\mathfrak{P}$ ein Product von Ausdrücken $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_m$ bezeichnet, und da jedes Product P_{hm} die Gestalt $P_{hm-h} A_r^h$ hat, so ist $f_i^{hm} T^{hm} B_\beta$ als Vielfachsumme von Ausdrücken $\mathfrak{P} P_{hm-1} C_\gamma$ und daher auch in der Gestalt

$$T^{hm-1}(\mathfrak{C}_1 C_1 + \mathfrak{C}_2 C_2 + \ldots) + p\Gamma$$

darstellbar, wo $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen. Man hat also auch für jedes i

$$f_i^{mh} T B_\beta \equiv \mathfrak{C}_1 C_1 + \mathfrak{C}_2 C_2 + \ldots \quad (\text{mod. } p).$$

---

[1] L. c.

Anderseits ist C_γ eine Vielfachsumme von Producten $A_\alpha B_\beta$ und somit in der Form

$$T(\mathfrak{B}_1 B_1 + \mathfrak{B}_2 B_2 + \ldots) + p\Gamma$$

darstellbar, wo $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ ganzzahlige Functionen bezeichnen.

Der Beweis für die Existenz des grössten gemeinschaftlichen Theilers in Bezug auf den Modul p lässt sich zunächst für Functionen einer Veränderlichen unmittelbar und dann für Functionen mehrerer Veränderlichen durch den Schluss von n auf $n+1$ führen. Hiebei können die etwa durch p theilbaren Functionen der gegebenen Functionenreihe weggelassen werden.

Es seien also

$$A, B, \ldots E$$

gegebene Functionen einer Veränderlichen x.

Besteht die Reihe aus nur einem Gliede A, so ist $T = A$.

Besteht die Reihe aus zwei Functionen A, B, so gibt es nach IV eine Function M, welche den Bedingungen

$$aA \equiv HM \pmod{p}$$
$$bB \equiv KM \pmod{p}$$
$$M \equiv A_0 A + B_0 B \pmod{p}$$

genügt, wo a, b nicht durch p theilbare Zahlen und H, K, A_0, B_0 ganze ganzzahlige Functionen von x bezeichnen. Ist

$$aa' \equiv 1 \qquad bb' \equiv 1 \pmod{p},$$

so wird

$$aa'A \equiv A \qquad bb'B \equiv B \pmod{p}$$

und daher

$$A \equiv a'HM \pmod{p}$$
$$B \equiv b'KM \pmod{p}.$$

Man kann also $T = M$ setzen.

Bei drei Functionen A, B, C suche man zunächst den grössten gemeinschaftlichen Theiler M zweier Functionen A und B in Bezug auf p und hierauf den von M und C. U. s. f.[1]

[1] V. Gauss' Werke, Bd. II, Analysis residuorum, Dedekind, Abriss einer Theorie der höheren Congruenzen in Bezug auf einen r. Primzahlmodulus, Crelle, Bd. 54.

Es werde nun angenommen, dass die Existenz des grössten gemeinschaftlichen Theilers in Bezug auf p für Functionen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bereits feststeht. Es ist zu zeigen, wie man den grössten gemeinschaftlichen Theiler T einer gegebenen Reihe $A, B, \ldots E$ von Functionen von $n+1$ Veränderlichen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ in Bezug auf den Modul p finden kann.

Für eine Function A ist $T = A$.

Für zwei Functionen A, B gibt es nach IV eine Function M, welche den Congruenzen

$$\varphi A \equiv \mathfrak{A} M \pmod{p}$$
$$\psi B \equiv \mathfrak{B} M \pmod{p}$$
$$M \equiv A_0 A + B_0 B \pmod{p}$$

genügt, wo φ, ψ nicht durch p theilbare Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, welche x nicht enthalten. Ist g der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x in M in Bezug auf p und $M \equiv g M_1 \pmod{p}$, so sind die Coëfficienten der Potenzen von x in $g\mathfrak{A}$ und $M\mathfrak{A}$ oder φA gleichstimmig, und es ist daher $g\mathfrak{A}$ durch φ in Bezug auf p theilbar. Man kann also

$$g\mathfrak{A} \equiv \varphi \mathfrak{A}_1 \pmod{p}$$

und aus ähnlichen Gründen

$$g\mathfrak{B} \equiv \psi \mathfrak{B}_1 \pmod{p}$$

setzen und hat

$$A \equiv \mathfrak{A}_1 M_1 \pmod{p}$$
$$B \equiv \mathfrak{B}_1 M_1 \pmod{p}.$$

Ist noch f der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten der Potenzen von x in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ zusammengenommen und setzt man

$$\mathfrak{A}_1 \equiv fP \qquad \mathfrak{B}_1 \equiv fQ \pmod{p}$$
$$fM_1 = T,$$

so wird

$$A \equiv PT \pmod{p}$$
$$B \equiv QT \pmod{p} \tag{3}$$
$$gT \equiv fA_0 A + fB_0 B \pmod{p},$$

wo alle Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x in P und Q zusammengenommen in Bezug auf p den grössten gemeinschaftlichen Theiler 1 haben.

T ist nun der gesuchte grösste gemeinschaftliche Theiler von A und B in Bezug auf p. Verfährt man nämlich mit P und Q in Bezug auf x_i so wie vorher mit A und B in Bezug auf x, so findet man eine Function U, welche den Congruenzen

$$P \equiv P_0 U \pmod{p}$$
$$Q \equiv Q_0 U \pmod{p}$$
$$g_i U \equiv P_1 P + Q_1 Q \pmod{p}$$

genügt, wo g_i nicht durch p theilbar ist und die Veränderliche x nicht enthält. Aus (3) folgt dann

$$\begin{aligned} gT &\equiv fA_0 P_0 TU + fB_0 Q_0 TU \pmod{p} \\ &\equiv \Gamma TU \pmod{p}, \end{aligned}$$

und es ist also

$$g \equiv \Gamma U \pmod{p}.$$

Diese Congruenz zeigt, dass U die Veränderliche x nicht enthält. Dann muss aber U in allen Coëfficienten der einzelnen Potenzen von x in P und Q aufgehen und somit $= 1$ sein. Es ist also

$$g_i \equiv P_1 P + Q_1 Q \pmod{p}$$

und demzufolge auch

$$\begin{aligned} g_i T &\equiv P_1 PT + Q_1 QT \\ &\equiv P_1 A + Q_1 B \pmod{p}. \end{aligned}$$

Bei drei Functionen A, B, C suche man zunächst den grössten gemeinschaftlichen Theiler M zweier Functionen A, B in Bezug auf p und hierauf den von M und C. U. s. f.

VII. Eine Function wird reductibel oder irreductibel in Bezug auf den Modul p genannt, je nachdem sie in Bezug auf diesen Modul als Product zweier Functionen, welche beide von höherem als dem 0ten Grade sind, darstellbar ist oder nicht. Die Irreductibilität, beziehungsweise Reductibilität einer gegebenen Function lässt sich immer durch eine endliche Anzahl von Ver-

suchen feststellen, da die Gradzahlen und Coëfficienten jedes etwaigen Theilers einer solchen Function nur eine endliche Anzahl von Werthen haben können.

3.

Unter einer ganzen algebraischen Form des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$ versteht man eine ganze Function von Unbestimmten, in welcher die bei den einzelnen verschiedenen Potenzproducten der Unbestimmten stehenden Coëfficienten ganze algebraische Zahlen von $\mathfrak{G}$ sind.

Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten der Norm $N\varphi$ einer ganzen algebraischen Form φ von $\mathfrak{G}$ soll die numerische Norm von φ genannt werden. Eine ganze algebraische Form heisst primitiv, wenn ihre numerische Norm $= 1$ ist.

Von einer ganzen algebraischen Form ψ von $\mathfrak{G}$ soll gesagt werden, dass sie durch eine andere ebensolche Form φ theilbar ist, wenn es eine ganze ganzzahlige primitive Form E von der Art gibt, dass der Quotient $\frac{E\psi}{\varphi}$ eine ganze algebraische Form von $\mathfrak{G}$ ist. Wenn die Form ψ durch φ theilbar ist, so ist jeder einzelne Coëfficient von ψ durch φ theilbar.[1] Zwei Formen heissen absolut äquivalent, wenn jede durch die andere theilbar ist.

Eine ganze algebraische Form φ von $\mathfrak{G}$ heisst irreductibel oder unzerfällbar, wenn es keine ganze algebraische Form von $\mathfrak{G}$ gibt, welche in φ aufgeht und deren numerische Norm kleiner als die von φ und grösser als 1 ist.

Eine ganze algebraische Form φ von $\mathfrak{G}$ wird nach Kronecker[2] eine Grundform genannt, wenn alle Coëfficienten der Formen

$$\omega_1\varphi, \omega_2\varphi, \ldots \omega_n\varphi$$

als Vielfachsummen der Coëfficienten der Form φ darstellbar sind. Eine nicht identisch verschwindende Grundform kann nicht weniger als n Coëfficienten besitzen.

---

[1] Festschrift §. 14.

[2] Ebendaselbst §. 24.

Eine ganze algebraische Form kann nur dann durch eine Grundform theilbar sein, wenn ihre Coëfficienten als Vielfachsummen der Coëfficienten der Grundform darstellbar sind.

Sind

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= c_{11}\,\omega_1 + c_{21}\,\omega_2 + \dots + c_{n1}\,\omega_n \\
\gamma_2 &= c_{12}\,\omega_1 + c_{22}\,\omega_2 + \dots + c_{n2}\,\omega_n \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\gamma_m &= c_{1m}\,\omega_1 + c_{2m}\,\omega_2 + \dots + c_{nm}\,\omega_n
\end{aligned}$$

die Coëfficienten einer Grundform φ und setzt man für jede Combination n^{ter} Classe $\alpha\beta\dots\varepsilon$ der Zahlen $1, 2, \dots m$

$$\begin{vmatrix} c_{1\alpha} c_{1\beta} \dots c_{1\varepsilon} \\ c_{2\alpha} c_{2\beta} \dots c_{2\varepsilon} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_{n\alpha} c_{n\beta} \dots c_{n\varepsilon} \end{vmatrix} = C_{\alpha\beta\dots\varepsilon},$$

so ist die numerische Norm von φ der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Determinanten $C_{\alpha\beta\dots\varepsilon}$, welche den einzelnen Combinationen $\alpha\beta\dots\varepsilon$ entsprechen.

Es sei h die numerische Norm von φ und man setze

$$N\varphi = hE,$$

wo E eine ganze ganzzahlige primitive Form bezeichnet. Die Quotienten

$$\frac{E\gamma_1}{\varphi}, \frac{E\gamma_2}{\varphi}, \dots \frac{E\gamma_m}{\varphi}$$

sind dann ganze algebraische Formen von $\mathfrak{G}$, und es sei

$$\begin{aligned}
E\gamma_i &= B_i\varphi \\
&= (b_{1i}\omega_1 + b_{2i}\omega_2 + \dots + b_{ni}\omega_n)\varphi. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Da ferner $\omega_i\gamma_\varkappa$ sich als Vielfachsumme von $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_m$ darstellen lässt, so ist

$$\omega_i\varphi = \varphi_{i1}\gamma_1 + \varphi_{i2}\gamma_2 + \dots + \varphi_{im}\gamma_m, \qquad (4)$$

wo $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots \varphi_{im}$ ganze ganzzahlige Functionen bezeichnen.

Sind nun

$$\begin{array}{l}\varphi', \varphi'', \ldots \\ \omega_i', \omega_i'', \ldots \\ \gamma_i', \gamma_i'', \ldots \\ B_i', B_i'', \ldots\end{array}$$

die conjugirten Werthe von φ, ω_i, γ_i, B_i, und setzt man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} \varphi_{1\alpha}\varphi_{1\beta}\cdots\varphi_{1\varepsilon} \\ \varphi_{2\alpha}\varphi_{2\beta}\cdots\varphi_{2\varepsilon} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{n\alpha}\varphi_{n\beta}\cdots\varphi_{n\varepsilon} \end{vmatrix} = \Phi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_\alpha\gamma_\beta\cdots\gamma_\varepsilon \\ \gamma_\alpha'\gamma_\beta'\cdots\gamma_\varepsilon' \\ \gamma_\alpha''\gamma_\beta''\cdots\gamma_\varepsilon'' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix} = \Gamma_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$

$$\begin{vmatrix} b_{1\alpha}b_{1\beta}\ldots b_{1\varepsilon} \\ b_{2\alpha}b_{2\beta}\ldots b_{2\varepsilon} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n\alpha}b_{n\beta}\ldots b_{n\varepsilon} \end{vmatrix} = B_{\alpha\beta\ldots\varepsilon},$$

so wird nach (4)

$$\begin{aligned}\Omega N\varphi &= \Omega\varphi\varphi'\varphi''\ldots \\ &= \begin{vmatrix} \omega_1\varphi, & \omega_2\varphi, & \ldots\omega_n\varphi \\ \omega_1'\varphi', & \omega_2'\varphi', & \ldots\omega_n'\varphi' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \omega_1''\varphi'', & \omega_2''\varphi'', & \ldots\omega_n''\varphi'' \end{vmatrix} \\ &= \Sigma\Phi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}\Gamma_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}\end{aligned}$$

und der Gleichung

$$\Gamma_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \Omega C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$

zufolge

$$N\varphi = \Sigma\Phi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}, \tag{5}$$

wo die Summen über alle Combinationen n^{ter} Classe $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ der Zahlen $1, 2, \ldots m$ zu erstrecken sind.

Anderseits ist nach (3)

$$E^n \Gamma_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \begin{vmatrix} E\gamma_\alpha, E\gamma_\beta, \ldots E\gamma_\varepsilon \\ E\gamma'_\alpha, E\gamma'_\beta, \ldots E\gamma'_\varepsilon \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi B_\alpha, \varphi B_\beta, \ldots \varphi B_\varepsilon \\ \varphi' B'_\alpha, \varphi' B'_\beta, \ldots \varphi B'_\varepsilon \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} B_\alpha, B_\beta, \ldots B_\varepsilon \\ B'_\alpha, B'_\beta, \ldots B'_\varepsilon \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{vmatrix} \varphi\varphi'\varphi'' \ldots$$

$$= B_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \Omega N\varphi$$

und man hat

$$E^n C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = B_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} N\varphi. \tag{6}$$

Nach (5), (6) sind sowohl die Coëfficienten von $N\varphi$ Vielfachsummen der Determinanten $C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ als auch umgekehrt diese Vielfachsummen jener. Die grössten gemeinschaftlichen Theiler der Coëfficienten von $N\varphi$ und der Determinanten $C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ fallen daher zusammen.

Jede ganze algebraische Form φ von $\mathfrak{G}$ ist einer linearen Grundform absolut äquivalent. Sind nämlich $\alpha, \beta, \ldots$ die Coëfficienten der Form φ, so braucht man nur eine lineare Form zu bilden, deren Coëfficienten sämmtliche Producte

$$\begin{matrix} \omega_1\alpha, \omega_2\alpha, \ldots \omega_n\alpha \\ \omega_1\beta, \omega_2\beta, \ldots \omega_n\beta \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{matrix}$$

sind. Die so gebildete Form ist eine Grundform und hat dieselben Coëfficienten wie die Form

$$(s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \ldots + s_n\omega_n)\varphi,$$

wenn die Unbestimmten $s_1, s_2, \ldots s_n$ in φ nicht vorkommen, ist also mit dieser Form und daher auch mit φ absolut äquivalent, weil die Form $s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \ldots + s_n\omega_n$ primitiv ist.

4.

Ist

$$F(t) = 0$$

die Fundamentalgleichung des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$, so hat jeder Theiler f von $F(t)$ in Bezug auf den Primzahlmodul p die Gestalt

$$f = a_0 t^\nu + a_1 t^{\nu-1} + a_2 t^{\nu-2} + \ldots + a_\nu,$$

wo a_0 eine nicht durch p theilbare Zahl und a_i in den Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganz, ganzzahlig, homogen und vom Grade i ist. Ist a_0 nicht $= 1$ und $a_0 a' \equiv 1$ (mod. p), so ist

$$a' f \equiv t^\nu + a' a_1 t^{\nu-1} + \ldots + a' a_\nu$$

und die Function

$$t^\nu + a' a_1 t^{\nu-1} + \ldots + a' a_\nu$$

ebenfalls ein Theiler von $F(t)$, durch welchen sich f mittelst der Congruenz

$$f \equiv a_0 (t^\nu + a' a_1 t^{\nu-1} + \ldots + a' a_\nu) \quad (\text{mod. } p)$$

ausdrücken lässt. Man erhält daher alle möglichen Theiler von $F(t)$ in Bezug auf den Modul p, wenn man die Theiler von der Form

$$t^\nu + a_1 t^{\nu-1} + a_2 t^{\nu-2} + \ldots + a_\nu$$

aufsucht und jeden derselben mit den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ multiplicirt.

5.

Es sei $P(t)$ irgend ein irreductibeler Theiler der Function $F(t)$ in Bezug auf den Primzahlmodul p von der Form

$$P(t) = t^\nu + a_1 t^{\nu-1} + a_2 t^{\nu-2} + \ldots + a_\nu \tag{7}$$

und man setze

$$P(t) + p = \varphi(t)$$

$$u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + \ldots + u_n \omega_n = u.$$

Es gelten dann folgende Sätze:

I. Die numerische Norm h von $\varphi(u)$ ist eine Potenz von p, deren Exponent $\geqq \nu$ ist.

Man hat

$$F(t) \equiv \Gamma P(t) \pmod{p}$$

und es besteht daher eine Identität von der Form

$$F(t) = \Gamma\varphi(t) + pG(t),$$

wo Γ, G ganze ganzzahlige Functionen von $t, u_1, u_2, \ldots u_n$ bezeichnen. Die Norm von $\varphi(u)$ oder die Resultante von $\varphi(t)$ und $F(t)$ fällt hienach mit der Resultante von $\varphi(t)$ und $pG(t)$ zusammen und hat also die Gestalt $p^\nu H$, wo H die Resultante von $\varphi(t)$ und $G(t)$ ist. Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten von $\varphi(u)$ ist demnach durch p^ν theilbar. Anderseits geht derselbe in dem die Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n$ nicht enthaltenden Gliede p^n von $N\varphi(u)$ auf.

II. Es sei $g(t)$ eine ganze ganzzahlige Function von t, $u_1, u_2, \ldots u_n$ und eventuell noch anderen Unbestimmten und $f(t)$ der Rest, welcher bei der Division von $g(t)$ durch P in Bezug auf t bleibt und den Grad ν in t nicht erreicht. Ist $f(t)$ nicht durch p theilbar, so ist weder die — in Bezug auf t zu bildende — Resultante S von $g(t)$ und $P(t)$ durch p, noch $g(u)$ durch $\varphi(u)$ theilbar.

Der grösste gemeinschaftliche Theiler von $P(t)$ und $f(t)$ in Bezug auf den Modul p kann nur $= 1$ sein. Denn man kann denselben in der Gestalt

$$t^\rho + b_1 t^{\rho-1} + \ldots + b_\rho$$

annehmen, und es muss $\rho > \nu$ sein, da $f(t)$ den Grad ν in t nicht erreicht. Wäre nun $\rho > 0$, so wäre P gegen die Annahme reductibel.

Man hat also eine Identität von der Form

$$U = AP(t) + Bf(t) + p\Gamma$$

und daher auch eine solche von der Form

$$U = AP(t) + Bg(t) + pG(t), \tag{8}$$

wo A, B, Γ, G, U ganze ganzzahlige Functionen von $t, u_1, u_2, \ldots u_n$ bezeichnen, deren letzte insbesondere t nicht enthält und nicht durch p theilbar ist.

Aus dieser Identität folgt zunächst, dass die Resultante U^ν von U und $P(t)$ in Bezug auf t mit der von $Bg(t)+pG(t)$ und $P(t)$ zusammenfällt und daher der Resultante von Bg und P in Bezug auf den Modul p congruent ist. Bezeichnet also L die Resultante von B und P, so hat man

$$U^\nu \equiv LS \pmod{p}$$

und es erhellt, dass S nicht durch p theilbar sein kann, weil p nicht in U^ν aufgeht.

Aus der Identität (8) folgt ferner, wenn $t = u$ gesetzt wird,

$$U \equiv A(u)P(u)+B(u)g(u) \pmod{p}.$$

Da $\varphi(u)$ in p und $P(u)$ aufgeht, so müsste, wenn $g(u)$ durch $\varphi(u)$ theilbar wäre, auch U durch $\varphi(u)$ theilbar sein und man hätte eine Identität von der Form

$$EU = v.\varphi(u),$$

wo E eine ganze ganzzahlige primitive und v eine ganze algebraische Form bezeichnen. Die Norm $E^n U^n$ von $v\varphi(u)$ müsste dann durch die Norm von $\varphi(u)$ und also auch durch p theilbar sein, was nicht der Fall ist.

Durch Umkehrung schliesst man, dass $f(t)$ durch p theilbar sein muss, wenn entweder die Resultante S durch p oder die Function $g(u)$ durch $\varphi(u)$ theilbar ist, und dass S durch p theilbar sein muss, wenn $\varphi(u)$ in $g(u)$ aufgeht, weil die Resultante einer Function von der Form $\Gamma P(t)+f(t)$ und der Function $P(t)$ durch p theilbar ist, wenn p in $f(t)$ aufgeht.

III. Die Function $P'(t) = \frac{\partial P}{\partial t}$ ist nicht durch p theilbar.

Es sei

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = P_i(t).$$

Da $\varphi(u)$ in den bei den einzelnen Potenzproducten der Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n$ in $P(u)$ stehenden Coëfficienten aufgeht, so ist auch die Ableitung

$$\frac{\partial P(u)}{\partial u_i} = \omega_i P'(u) + P_i(u)$$

durch $\varphi(u)$ theilbar und man hat für alle Werthe $1, 2, \ldots n$ von i

$$P'(u)\omega_i + P_i(u) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \varphi u). \tag{9}$$

Wäre nun $P'(t)$ durch p theilbar, so wäre $P'(u)$ durch p und also auch durch φu theilbar, und $\varphi(u)$ musste der vorstehenden Identität zufolge in $P_i(u)$ aufgehen. Nach II müsste dann die Function $P_i(t)$, da sie in t den Grad ν nicht erreicht, durch p theilbar sein. Wenn aber alle Ableitungen

$$P', P_1, P_2, \ldots P_n$$

von P durch p theilbar sind, so ist P einer ganzen ganzzahligen Function

$$\psi(t^p, u_1^p, u_2^p, \ldots u_n^p)$$

in Bezug auf den Modul p congruent, und man hätte die mit der Irreductibilität von P in Widerspruch stehende Congruenz

$$P \equiv \psi(t, u_1, u_2, \ldots u_n)^p \quad (\text{mod. } p).$$

Nach II ist also auch die Resultante von $P'(t)$ und $P(t)$ nicht durch p theilbar. Bezeichnet R diese Resultante, so besteht eine Identität von der Form

$$R = Q(t)P'(t) + Q_1(t)P(t),$$

wo Q, Q_1 ganze ganzzahlige Functionen von $t, u_1, u_2, \ldots u_n$ sind, und man hat für $t = u$

$$\begin{aligned} R &= Q(u)P'(u) + Q_1(u)P(u) \\ &\equiv Q(u)P'(u) \quad (\text{mod. } \varphi u). \end{aligned}$$

Nach (9) folgt hieraus

$$R\omega_i \equiv -Q(u)P_i(u) \quad (\text{mod. } \varphi u).$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} -Q(t)P_i(t) &= g_i(t) + \Gamma P(t) \\ g_i(t) &= g_{1i} + g_{2i}t + \ldots + g_{\nu i}t^{\nu-1}, \end{aligned}$$

wo $g_i(t)$ den bei der Division von $-QP_i$ durch P in Bezug auf t sich ergebenden und den Grad ν in t nicht erreichenden Rest bezeichnet, so wird

$$R\omega_i \equiv g_i(u) \quad (\text{mod. } \varphi u). \tag{10}$$

IV. Die numerische Norm h von $\varphi(u)$ ist p^ν.

Es sei, wie in III, R die Resultante von P' und P und

$$u^{m-1} = \psi_{m1}\omega_1 + \psi_{m2}\omega_2 + \ldots + \psi_{mn}\omega_n,$$

wo $\psi_{m1}, \psi_{m2}, \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen der Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots$ bezeichnen. Nach (10) wird

$$Ru^{m-1} - \psi_{m1}g_1(u) - \psi_{m2}g_2(u) - \ldots - \psi_{mn}g_n(u) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \varphi u),$$

und es folgt hieraus nach II, wenn $m \leqq \nu$ ist,

$$Rt^{m-1} - \psi_{m1}g_1(t) - \psi_{m2}g_2(t) - \ldots - \psi_{mn}g_n(t) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Setzt man daher

$$e_{\mu m} = \psi_{m1}g_{\mu 1} + \psi_{m2}g_{\mu 2} + \ldots + \psi_{mn}g_{\mu n}$$

und versteht unter dem Symbol m_μ die Einheit oder Null, je nachdem m und μ gleich oder ungleich sind, so ist

$$e_{\mu m} \equiv m_\mu R \quad (\text{mod. } p)$$

und demzufolge

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1\nu} \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{\nu 1} & e_{\nu 2} & \ldots & e_{\nu\nu} \end{vmatrix} \equiv R^\nu \quad (\text{mod. } p).$$

Setzt man aber anderseits für jede Combination ν^{ter} Classe $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ der Zahlen $1, 2, \ldots n$

$$\begin{vmatrix} g_{1\alpha} & g_{1\beta} & \ldots & g_{1\varepsilon} \\ g_{2\alpha} & g_{2\beta} & \ldots & g_{2\varepsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{\nu\alpha} & g_{\nu\beta} & \ldots & g_{\nu\varepsilon} \end{vmatrix} = G_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$

$$\begin{vmatrix} \psi_{1\alpha} & \psi_{1\beta} & \ldots & \psi_{1\varepsilon} \\ \psi_{2\alpha} & \psi_{2\beta} & \ldots & \psi_{2\varepsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{\nu\alpha} & \psi_{\nu\beta} & \ldots & \psi_{\nu\varepsilon} \end{vmatrix} = \Psi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon},$$

so wird, über alle Combinationen $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ erstreckt,

$$\begin{vmatrix} e_{11} e_{12} \ldots e_{1\nu} \\ e_{21} e_{22} \ldots e_{2\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e_{\nu 1} e_{\nu 2} \ldots e_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \Sigma G_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \Psi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$

und man hat

$$\Sigma G_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \Psi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \equiv R^{\nu} \pmod{p}.$$

Diese Congruenz lehrt, dass wenigstens eine der Determinanten $G_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ nicht durch p theilbar ist.

Es sei also $\rho\sigma\ldots\tau$ eine bestimmte Combination, für welche $G_{\rho\sigma\ldots\tau}$ nicht durch p theilbar ist, und man setze zur Abkürzung

$$RG_{\rho\sigma\ldots\tau} = H;$$

es seien ferner $\varkappa, \lambda, \ldots \mu$ die Stellenzeiger, welche die Zahlen $\rho, \sigma, \ldots \tau$ zu $1, 2, \ldots n$ ergänzen, und

$$\begin{aligned} \pi_1 &= c_{11}\, \omega_1 + c_{21}\, \omega_2 + \ldots + c_{n1}\, \omega_n \\ \pi_2 &= c_{12}\, \omega_1 + c_{22}\, \omega_2 + \ldots + c_{n2}\, \omega_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \pi_m &= c_{1m}\, \omega_1 + c_{2m}\, \omega_2 + \ldots + c_{nm}\, \omega_n \end{aligned}$$

die Coëfficienten einer mit φu absolut äquivalenten Grundform. Man hat für jeden Stellenzeiger r nach (10)

$$\begin{aligned} &R\omega_r - g_{1r} - g_{2r} u - \ldots - g_{\nu r} u^{\nu-1} \equiv 0 \\ &R\omega_\rho - g_{1\rho} - g_{2\rho} u - \ldots - g_{\nu\rho} u^{\nu-1} \equiv 0 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &R\omega_\tau - g_{1\tau} - g_{2\tau} u - \ldots - g_{\nu\tau} u^{\nu-1} \equiv 0 \pmod{\varphi u} \end{aligned}$$

und erhält nach Fortschaffung von $1, u, u^2, \ldots u^{\nu-1}$

$$\begin{vmatrix} R\omega_r\, g_{1r}\, g_{2r} \ldots g_{\nu r} \\ R\omega_\rho\, g_{1\rho}\, g_{2\rho} \ldots g_{\nu\rho} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ R\omega_\tau\, g_{1\tau}\, g_{2\tau} \ldots g_{\nu\tau} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\varphi u},$$

oder

$$H\omega_r - RG_{r\sigma\ldots\tau}\,\omega_\rho + \ldots \equiv 0 \pmod{\varphi u}.$$

Aus dieser Congruenz folgt, dass der Ausdruck

$$H\omega_r - RG_{r\sigma\ldots\tau}\omega_\rho + \ldots$$

als linear-homogene Function f_r von $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m$ mit in $u_1, u_2, \ldots$ ganzen und ganzzahligen Coëfficienten darstellbar ist.

Es lassen sich also auch, wenn $r = \varkappa, \lambda, \ldots \mu$ gesetzt wird, die $n-\nu$ Producte

$$H\omega_\varkappa, H\omega_\lambda, \ldots H\omega_\mu$$

und die ν Zahlen

$$\omega_\rho, \omega_\sigma, \ldots \omega_\tau$$

als linear-homogene Functionen von

$$\omega_\rho, \omega_\sigma, \ldots \omega_\tau, f_\varkappa, f_\lambda, \ldots f_\mu$$

mit in $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganzen und ganzzahligen Coëfficienten darstellen, und es wird demzufolge, wenn die conjugirten Werthe von ω_i, π_i, f_i mit $\omega_i', \omega_i'', \ldots \pi_i', \pi_i'', \ldots f_i', f_i'', \ldots$ bezeichnet werden,

$$H^{n-\nu}\Omega = \Gamma \begin{vmatrix} \omega_\rho, \omega_\sigma, \ldots \omega_\tau, f_\varkappa, f_\lambda, \ldots f_\mu \\ \omega_\rho', \omega_\sigma', \ldots \omega_\tau', f_\varkappa', f_\lambda', \ldots f_\mu' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix},$$

wo Γ in $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganz und ganzzahlig ist. Nach Multiplication mit p^ν folgt hieraus

$$p^\nu H^{n-\nu}\Omega = \Gamma \begin{vmatrix} p\omega_\rho, p\omega_\sigma, \ldots p\omega_\tau, f_\varkappa, f_\lambda, \ldots f_\mu \\ p\omega_\rho', p\omega_\sigma', \ldots p\omega_\tau', f_\varkappa', f_\lambda', \ldots f_\mu' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}.$$

Da $\varphi(u)$ in den Zahlen $p\omega_\rho, p\omega_\sigma, \ldots p\omega_\tau$ aufgeht, so sind dieselben Vielfachsummen oder ganzzahlige linear-homogene Functionen $f_\rho, f_\sigma, \ldots f_\tau$ von $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m$, und man hat, wenn die conjugirten Werthe von $f_\rho, f_\sigma, \ldots$ mit $f_\rho', f_\sigma', \ldots f_\rho'', f_\sigma'' \ldots$ bezeichnet werden,

$$p^\nu H^{n-\nu}\Omega = \pm\Gamma \begin{vmatrix} f_1, & f_2, \ldots f_n \\ f_1', & f_2', \ldots f_n' \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun

$$f_i = b_{i1}\pi_1 + b_{i2}\pi_2 + \ldots + b_{im}\pi_m$$

und für jede Combination n^{ter} Classe $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ der Zahlen $1, 2, \ldots m$

$$\begin{vmatrix} b_{1\alpha} b_{1\beta} \ldots b_{1\varepsilon} \\ b_{2\alpha} b_{2\beta} \ldots b_{2\varepsilon} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n\alpha} b_{n\beta} \ldots b_{n\varepsilon} \end{vmatrix} = B_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$

$$\begin{vmatrix} c_{1\alpha} c_{1\beta} \ldots c_{1\varepsilon} \\ c_{2\alpha} c_{2\beta} \ldots c_{2\varepsilon} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{n\alpha} c_{n\beta} \ldots c_{n\varepsilon} \end{vmatrix} = C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$

$$\begin{vmatrix} \pi_\alpha \pi_\beta \ldots \pi_\varepsilon \\ \pi'_\alpha \pi'_\beta \ldots \pi'_\varepsilon \\ \pi''_\alpha \pi''_\beta \ldots \pi''_\varepsilon \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix} = \Pi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon},$$

so wird, über alle Combinationen $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ erstreckt,

$$\begin{vmatrix} f_1, & f_2, \ldots f_n \\ f'_1, & f'_2, \ldots f'_n \end{vmatrix} = \Sigma B_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \Pi_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$
$$= \Omega \Sigma B_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$

und man hat

$$p^\nu H^{n-\nu} = \pm \Gamma \Sigma B_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}.$$

Da H nicht durch p theilbar ist, so folgt aus dieser Gleichung, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler h aller Determinanten $C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$, welcher nach I eine Potenz von p ist, in p^ν aufgehen muss. Da aber auch anderseits p^ν in h aufgeht, so ist $h = p^\nu$.

V. Die Form $\varphi(u)$ ist unzerfällbar.

Es seien ψ, χ irgend zwei ganze algebraische Formen von $\mathfrak{G}$, deren Product mit $\varphi(u)$ absolut äquivalent ist. Setzt man

$$\psi = \psi_1 \omega_1 + \psi_2 \omega_2 + \ldots + \psi_n \omega_n$$
$$\chi = \chi_1 \omega_1 + \chi_2 \omega_2 + \ldots + \chi_n \omega_n$$
$$\psi_1 g_1(t) + \psi_2 g_2(t) + \ldots + \psi_n g_n(t) = f(t)$$
$$\chi_1 g_1(t) + \chi_2 g_2(t) + \ldots + \chi_n g_n(t) = f_1(t),$$

so sind f, f_1 ganze ganzzahlige Functionen, und es wird nach (10)

$$R\psi \equiv f(u) \quad (\text{mod. } \varphi u)$$
$$R\chi \equiv f_1(u) \quad (\text{mod. } \varphi u)$$

und demzufolge

$$R^2\psi\chi \equiv f(u)f_1(u) \quad (\text{mod. } \varphi u).$$

Da $\psi\chi$ durch $\varphi(u)$ theilbar ist, so folgt hieraus

$$f(u)f_1(u) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \varphi u).$$

Bezeichnet M die Resultante von $f(t)$ und $P(t)$, M_1 die von $f_1(t)$ und $P(t)$, so muss also nach II die Resultante MM_1 von $f(t)$, $f_1(t)$ und $P(t)$ durch p theilbar sein. Dann muss aber p in einer der Functionen M, M_1 und daher auch in $f(t)$ oder $f_1(t)$ aufgehen. Ist etwa

$$f(t) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

so ist $f(u)$ durch $\varphi(u)$ theilbar. Dasselbe gilt dann auch, wenn s eine Unbestimmte bezeichnet, von $(R+ps)\psi$, und es ist also ψ durch $\varphi(u)$ theilbar, weil $R+ps$ eine primitive Form ist. Dann sind aber ψ und $\varphi(u)$ absolut äquivalent, und χ muss die numerische Norm 1 haben.

6.

Man denke sich $F(t)$ in Bezug auf den Primzahlmodul p als Potenzproduct von irreductibelen Functionen

$$P_1, P_2, \ldots P_m$$

von der Form (7) dargestellt, und es sei

$$F(t) \equiv P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \ldots P_m^{\mu_m} \quad (\text{mod. } p). \tag{11}$$

Es ist dann auch identisch

$$F(t) = (P_1+p)^{\mu_1}(P_2+p)^{\mu_2}\ldots(P_m+p)^{\mu_m} - p\Theta(t),$$

wo $\Theta(t)$ eine ganze ganzzahlige Function von t, u_1, $u_2, \ldots u_n$ bezeichnet. Da $F(t)$ für $t = u$ verschwindet, so folgt hieraus

$$p\Theta(u) = (P_1(u)+p)^{\mu_1}(P_2(u)+p)^{\mu_2}\ldots(P_m(u)+p)^{\mu_m}. \tag{12}$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Normen, so wird

$$p^n N\Theta(u) = N(P_1(u)+p)^{\mu_1}.N(P_2(u)+p)^{\mu_2}\dots N(P_m(u)+p)^{\mu_m};$$

es ist aber nach 5, IV

$$\begin{aligned} N(P_1(u)+p) &= p^{\nu_1}E_1 \\ N(P_2(u)+p) &= p^{\nu_2}E_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ N(P_m(u)+p) &= p^{\nu_m}E_m, \end{aligned}$$

wo ν_i den Grad von P_i in t und $E_1, E_2, \dots E_m$ ganze ganzzahlige primitive Formen von $u_1, u_2, \dots u_n$ bezeichnen, und nach (11)

$$\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \dots + \mu_m\nu_m = n.$$

Man hat also

$$N\Theta(u) = E_1^{\mu_1}E_2^{\mu_2}\dots E_m^{\mu_m}.$$

Die Form $\Theta(u)$ ist demnach primitiv und die Gleichung (12) liefert eine Zerlegung der Primzahl p in unzerfällbare Formen.

Eine ganze ganzzahlige Function $f(t)$ von $t, u_1, u_2, \dots u_n$, welche in t den Grad n nicht erreicht, ist durch p theilbar, wenn $f(u)$ durch p theilbar ist.

Es sei

$$\begin{aligned} P_1(t)+p &= \varphi_1(t) \\ P_2(t)+p &= \varphi_2(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_m(t)+p &= \varphi_m(t) \end{aligned}$$

und

$$\psi(t) = P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\dots P_m^{\alpha_m}$$

jedes Potenzproduct der irreductibelen Theiler $P_1, P_2 \dots$ von $F(t)$, in welchem die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ beziehungsweise die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m$ nicht übersteigen. Nennt man den Rest, welcher sich bei der Division einer ganzen Function von t durch $\psi(t)$ in Bezug auf t ergibt und den Grad von $\psi(t)$ in t nicht erreicht, kurz den echten Rest dieser Function in Bezug auf den Theiler $\psi(t)$, so ist der echte Rest von $f(t)$ in Bezug auf alle Functionen $\psi(t)$ durch p theilbar.

Ist nämlich zunächst

$$\psi(t) = P_1,$$

so wird der Congruenz

$$f(u) \equiv 0 \pmod{p}$$

zufolge

$$f(u) \equiv 0 \pmod{\varphi_1(u)}$$

und die Behauptung folgt aus 5, II. Steht ferner die Behauptung bereits für eine bestimmte Function $\psi(t)$ fest, in welcher nicht alle Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die Grenzen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ erreichen und etwa $\alpha_\varkappa < \mu_\varkappa$ ist, so gilt sie auch für die Function $\psi(t) P_\varkappa$. Es seien $Q(t)$, $R(t)$ der Quotient und echte Rest, welche sich bei der Division von $f(t)$ durch $\psi(t)$ in Bezug auf t ergeben, so dass identisch

$$f(t) = Q(t)\psi(t) + R(t)$$

ist. Man hat dann, da R nach der Annahme durch p theilbar ist,

$$f(t) \equiv Q(t)\varphi_1(t)^{\alpha_1}\varphi_2(t)^{\alpha_2}\ldots\varphi_m(t)^{\alpha_m} \pmod{p}$$

und erhält für $t = u$

$$Q(u)\varphi_1(u)^{\alpha_1}\varphi_2(u)^{\alpha_2}\ldots\varphi_m(u)^{\alpha_m} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da aber p nach (12) durch

$$\varphi_\varkappa(u).\ \varphi_1(u)^{\alpha_1}\varphi_2(u)^{\alpha_2}\ldots\varphi_m(u)^{\alpha_m}$$

theilbar ist, so muss $\varphi_\varkappa(u)$ in $Q(u)$ aufgehen. Bezeichnet also $R_1(t)$ den echten Rest von $Q(t)$ in Bezug auf den Theiler $P_\varkappa$, so geht p nach 5, II in $R_1(t)$ und also auch in dem echten Rest

$$R_1(t)\psi(t) + R(t)$$

von $f(t)$ in Bezug auf den Theiler $\psi P_\varkappa$ auf.

Es muss daher auch der echte Rest von $f(t)$ in Bezug auf den Theiler

$$P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \ldots P_m^{\mu_m}$$

durch p theilbar sein. Dieser Rest ist aber $f(t)$ selbst.

7.

Es sei Δ die Discriminante von $F(t)$ und

$$\Delta = Q(t)F'(t) + Q_1(t)F(t) \tag{13}$$

die Identität, welcher sie genügt und in welcher Q, Q_1 ganze ganzzahlige Functionen von $t, u_1, u_2, \ldots u_n$ sind. Differentiirt man die in $u_1, u_2, \ldots u_n$ identische Gleichung

$$F(u) = 0$$

nach u_i und bezeichnet zu diesem Ende die Ableitung $\frac{\partial F(t)}{\partial u_i}$ mit $F_i(t)$, so ergibt sich

$$F'(u)\omega_i + F_i(u) = 0. \tag{14}$$

Setzt man daher

$$-Q(t)F_i(t) = f_i(t) + \Gamma F(t),$$

wo f_i in t den Grad n nicht erreicht, so hat man für $t = u$

$$\Delta = Q(u)F'(u)$$
$$-Q(u)F_i(u) = f_i(u)$$

und daher nach (14)

$$\Delta\omega_i = f_i(u).$$

Ist nun h der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coëfficienten von Δ und

$$\Delta = hE,$$

wo E eine ganze ganzzahlige primitive Form von $u_1, u_2, \ldots u_n$ bezeichnet, so wird

$$E\omega_i = \frac{1}{h} f_i(u).$$

Da hienach $\frac{1}{h} f_i(u)$ eine ganze algebraische Form von $\mathfrak{G}$ ist, so ist $f_i(u)$ durch alle Primfactoren von h theilbar. Dasselbe muss also nach 6 auch mit $f_i(t)$ der Fall sein und man kann

$$f_i(t) = h\psi_i(t)$$

setzen, wo $\psi_i(t)$ ganz und ganzzahlig in $t, u_1, u_2, \ldots u_n$ ist. Es wird dann

$$E\omega_i = \psi_i(u). \tag{15}$$

8.

Es sei, wie in 5, IV,

$$u^{m-1} = \psi_{m1}\omega_1 + \psi_{m2}\omega_2 + \ldots + \psi_{mn}\omega_n$$

und

$$\Sigma \pm \psi_{11}\psi_{22}\ldots\psi_{nn} = \Psi;$$

es bezeichne ferner Δ die Discriminante von $F(t)$, D die des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$ und Π das Differenzen- oder alternirende Product der conjugirten Functionen

$$u, u', u'', \ldots u^{(n-1)}.$$

Man hat

$$\Pi = \Psi\Omega$$
$$D = \Omega^2$$
$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Pi^2$$

und demzufolge

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D\Psi^2. \tag{16}$$

Anderseits ergibt sich aus (15), wenn

$$\psi_i(t) = a_{i1} + a_{i2}t + a_{i3}t^2 + \ldots + a_{in}t^{n-1}$$
$$\Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} = A$$

gesetzt wird,

$$E^n\Omega = \begin{vmatrix} \psi_1(u), & \psi_2(u), & \ldots\psi_n(u) \\ \psi_1(u'), & \psi_2(u'), & \ldots\psi_n(u') \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$
$$= A\Pi,$$

und es wird

$$E^{2n}D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\Delta A^2. \tag{17}$$

Aus (16) und (17) folgt

$$E^{2n} = A^2\Psi^2,$$

und es muss also Ψ eine primitive Form sein.

Nach Kronecker's Festschrift blieb es unentschieden, ob Ψ' Theiler zulässt, welche in der Reihe $2, 3, \ldots n-2$ enthalten sind und in D aufgehen.[1]

9.

Sind $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ die Exponenten, welche in der Zerlegung von $F(t)$ in irreductibele Factoren

$$F(t) \equiv P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \ldots P_m^{\mu_m} \quad (\text{mod. } p)$$

in Bezug auf den Primzahlmodul p auftreten, so stimmen dieselben genau mit den Exponenten überein, welche bei der Zerlegung (12) von p in unzerfällbare Formen des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$ oder nach H. Dedekind's Auffassung bei der Zerlegung von p in Primideale vorkommen.

Es ist leicht zu zeigen, dass unter den genannten Exponenten dann und nur dann solche vorkommen, welche > 1 sind, wenn p in der Discriminante D des Gattungsbereiches aufgeht.

Man hat nach (13), (16)

$$\Delta = \pm D\Psi'^2 = Q(t)F'(t) + Q_1(t)F(t).$$

Ist nun

$$F(t) \equiv H(t)P^2(t) \quad (\text{mod. } p),$$

wo P einen irreductibelen Theiler von $F(t)$ in Bezug auf den Modul p bezeichnet, so hat man

$$F'(t) \equiv (2HP' + HP)P \quad (\text{mod. } p)$$

und daher

$$\pm D\Psi'^2 \equiv (QHP + 2QHP' + Q_1HP)P \quad (\text{mod. } p).$$

Weil aber $D\Psi'^2$ die Veränderliche t nicht enthält, so folgt hieraus

$$D\Psi'^2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

und infolge der Primitivität von Ψ'

$$D \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

---

[1] Vergl. Dedekind, Über die Discriminanten endlicher Körper. Abh. der k. Ges. d. W. zu Göttingen, Bd. XXIX.

Ist umgekehrt D durch p theilbar, P ein irreductibeler Theiler von $F(t)$ in Bezug auf den Modul p und

$$F(t) \equiv \Gamma P \pmod{p},$$

so kann Γ nicht $= 1$ sein. Denn es wäre dann $F' \equiv P' \pmod{p}$ und daher Δ der Resultante von P' und P in Bezug auf p congruent. Diese Resultante müsste daher durch p theilbar sein, was nicht der Fall ist. Zerlegt man also F in irreductibele Factoren $P_1, P_2, P_3 \ldots$ in Bezug auf den Modul p, so ist die Anzahl derselben wenigstens $= 2$ und aus den Congruenzen

$$F \equiv P_1 P_2 \ldots \pmod{p}$$
$$F' \equiv P_1' P_2 P_3 \ldots + P_2' P_1 P_3 \ldots + \ldots \pmod{p}$$

folgt, dass $\pm \Delta$ nach dem Modul p dem Producte der Resultanten von P_1 und P_1', von P_2 und P_2' u. s. w. in die Quadrate der Resultanten von P_1 und P_2, P_1 und P_3 u. s. w. congruent ist. Da aber p in Δ aufgeht, in den Resultanten von P_1 und P_1', P_2 und P_2' u. s. w. aber nicht, so muss eine der Resultanten von P_1 und P_2, P_1 und P_3 u. s. w. durch p theilbar sein. Es sei etwa die von P_1 und P_2 durch p theilbar. Die Function P_2 muss dann nach 5, II durch P_1 nach dem Modul p theilbar sein und demzufolge mit P_1 zusammenfallen, da sie irreductibel ist. $F(t)$ lässt also den Theiler P_1 mindestens zweimal zu.

10.

Ich will hier noch den Fermat'schen Satz für eine unzerfällbare Form des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$ beweisen. Jede solche Form ist einer Form $P(u)+p$ absolut äquivalent, wo p eine Primzahl und $P(t)$ einen irreductibelen Theiler von $F(t)$ in Bezug auf den Modul p bezeichnen. Man setze, wie in (5)

$$P(t)+p = \varphi(t)$$

und bezeichne den Grad von $P(t)$ in t mit ν.

Es sei

$$u_1 \omega_1^{p^\varkappa} + u_2 \omega_2^{p^\varkappa} + \ldots + u_n \omega_n^{p^\varkappa} = \varphi_\varkappa$$

und man bezeichne die Functionen, welche aus $\varphi_\varkappa$, $P(t)$ hervorgehen, wenn man $u_1, u_2, \ldots u_n$ der Reihe nach durch $u_1^{p^m}$, $u_2^{p^m}$, $\ldots u_n^{p^m}$ ersetzt, mit $\varphi_\varkappa^{(m)}$, $P^{(m)}(t)$. Setzt man

$$P(\varphi_\varkappa) = \gamma\mathfrak{P} + \gamma_1\mathfrak{P}_1 + \ldots,$$

wo $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots$ verschiedene Potenzproducte der Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots$ und $\gamma, \gamma_1, \ldots$ ganze algebraische Zahlen von $\mathfrak{G}$ sind, so ergibt sich einerseits

$$P^{(\varkappa)}(\varphi_\varkappa^{(\varkappa)}) = \gamma\mathfrak{P}^{p^\varkappa} + \gamma_1\mathfrak{P}_1^{p^\varkappa} + \ldots$$

und anderseits

$$P^{p^\varkappa}(u) \equiv P^{(\varkappa)}(u^{p^\varkappa}) \equiv P^{(\varkappa)}(\varphi_\varkappa^{(\varkappa)}) \quad (\text{mod. } p).$$

Es ist also $P^{(\varkappa)}(\varphi_\varkappa^{(\varkappa)})$ durch $\varphi(u)$ theilbar. Dasselbe muss dann auch wegen der Verschiedenheit der Potenzproducte $\mathfrak{P}^{p^\varkappa}, \mathfrak{P}_1^{p^\varkappa}, \ldots$ von den Coëfficienten $\gamma, \gamma_1, \ldots$ und also auch von $P(\varphi_\varkappa)$ gelten. Hienach hat die Congruenz

$$P(t) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \varphi(u))$$

die Wurzeln

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

Eine solche Congruenz kann aber nicht mehr als ν in Bezug auf $\varphi(u)$ incongruente Wurzeln haben. Sind nämlich

$$x_1, x_2, \ldots x_{\nu+1}, v_0, v_1, \ldots v_\nu$$

Unbestimmte und setzt man

$$(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_{\nu+1}) = (t-x_i)\pi_i(t)$$
$$v_0 + v_1 t + \ldots + v_\nu t^\nu = f(t)$$
$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{\nu+1})$$
$$(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{\nu+1})$$
$$\ldots(x_\nu-x_{\nu+1}) = \Theta$$
$$= \pi_i(x_i)\Theta_i,$$

so ist nach der Lagrange'schen Interpolationsformel

$$\Theta f(t) = \Theta_1 f(x_1)\pi_1(t) + \Theta_2 f(x_2)\pi_2(t) + \ldots + \Theta_{\nu+1} f(x_{\nu+1})\pi_{\nu+1}(t).$$

Setzt man in dieser Identität

$$x_1 = \varphi_0,\ x_2 = \varphi_1, \ldots\ x_{\nu+1} = \varphi_\nu$$
$$f(t) = P(t),$$

so ergibt sich, dass das Product

$$(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2)\ldots(\varphi_\nu - \varphi_{\nu+1})P(t)$$

und daher auch der Coëfficient

$$(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2)\ldots(\varphi_\nu - \varphi_{\nu+1})$$

von t^ν in demselben durch $\varphi(u)$ theilbar sein muss. Dann muss aber wegen der Unzerfällbarkeit von $\varphi(u)$ eine der Differenzen

$$\varphi_0 - \varphi_1,\ \varphi_0 - \varphi_2, \ldots \varphi_\nu - \varphi_{\nu+1}$$

durch $\varphi(u)$ theilbar sein.

Ist φ_r die erste Function der Reihe $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, welche einer vorhergehenden Function φ_i nach dem Modul $\varphi(u)$ congruent ist, so hat man

$$\begin{aligned}(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2)\ldots(\varphi_0 - \varphi_r)]^{p^i} &\equiv (\varphi_0^{p^i} - \varphi_1^{p^i})(\varphi_0^{p^i} - \varphi_2^{p^i})\ldots(\varphi_0^{p^i} - \varphi_r^{p^i}) \\ &\equiv (\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+1}^{(i)})(\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+2}^{(i)})\ldots \\ &\quad \ldots(\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+r}^{(i)}) \pmod{p}. \quad (18)\end{aligned}$$

Aus der Congruenz

$$\varphi_r \equiv \varphi_i \pmod{\varphi u}$$

folgt aber

$$\varphi_r^{(i)} \equiv \varphi_i^{(i)} \pmod{\varphi u}$$

und also auch

$$(\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+1}^{(i)})(\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+2}^{(i)})\ldots(\varphi_i^{(i)} - \varphi_{i+1}^{(i)}) \equiv 0 \pmod{\varphi u}.$$

Nach (18) wird dann

$$[(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi_2)\ldots(\varphi_0 - \varphi_r)]^{p^i} \equiv 0 \pmod{\varphi u},$$

und es muss demzufolge

$$\varphi_0 - \varphi_r \equiv 0 \pmod{\varphi u}$$

oder $i = 0$ sein.

Setzt man

$$(t-\varphi_0)(t-\varphi_1)\ldots(t-\varphi_{r-1}) = L(t)$$

und entwickelt $L(t)$ nach Potenzproducten $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots$ der Veränderlichen $t, u_1, u_2, \ldots u_n$, so ergibt sich

$$L(t) = \gamma\mathfrak{P}+\gamma_1\mathfrak{P}_1+\ldots,$$

wo $\gamma, \gamma_1, \ldots$ ganze algebraische Zahlen von $\mathfrak{G}$ bezeichnen. Nun ist einerseits

$$\begin{aligned} L(t)^p &\equiv (t^p-\varphi_0^p)(t^p-\varphi_1^p)\ldots(t^p-\varphi_{r-1}^p) && (\text{mod. } p) \\ &\equiv (t^p-\varphi_1^{(1)})(t^p-\varphi_2^{(1)})\ldots(t^p-\varphi_r^{(1)}) && (\text{mod. } p) \\ &\equiv (t^p-\varphi_0^{(1)})(t^p-\varphi_1^{(1)})\ldots(t^p-\varphi_{r-1}^{(1)}) && (\text{mod. } \varphi u) \\ &\equiv \gamma\mathfrak{P}^p+\gamma_1\mathfrak{P}_1^p+\ldots && (\text{mod. } \varphi u) \end{aligned}$$

und anderseits

$$L(t)^p \equiv \gamma^p\mathfrak{P}^p+\gamma_1^p\mathfrak{P}_1^p+\ldots \quad (\text{mod. } p).$$

Hieraus folgt

$$0 \equiv (\gamma^p-\gamma)\mathfrak{P}^p+(\gamma_1^p-\gamma_1)\mathfrak{P}_1^p+\ldots \quad (\text{mod. } \varphi u),$$

und man hat wegen der Verschiedenheit der Potenzproducte $\mathfrak{P}^p, \mathfrak{P}_1^p, \ldots$

$$\gamma^p-\gamma \equiv 0, \; \gamma_1^p-\gamma_1 \equiv 0, \ldots \quad (\text{mod. } \varphi u).$$

Da aber

$$\gamma^p-\gamma \equiv \gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots(\gamma-p+1) \quad (\text{mod. } p)$$

ist, so wird

$$\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots(\gamma-p+1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \varphi u),$$

und es muss γ einer gewöhnlichen Zahl nach dem Modul $\varphi(u)$ congruent sein. Dasselbe gilt von γ_1 und allen Coëfficienten von $L(t)$. Das Product $L(t)$ ist daher einer ganzen ganzzahligen Function $g(t)$ von $t, u_1, u_2, \ldots u_n$ von der Form

$$t^r+b_1t^{r-1}+\ldots+b_r$$

in Bezug auf $\varphi(u)$ congruent.

Da die Differenz $P(t) - t^{\nu-r} g(t)$ in t den Grad ν nicht erreicht und für $t = u$ durch $\varphi(u)$ theilbar wird, so ist sie nach 5, II durch p theilbar und man hat

$$P(t) \equiv t^{\nu-r} g(t) \quad (\text{mod. } p).$$

Die Irreductibilität von P erfordert dann, dass $r = \nu$ ist, und es wird

$$g(t) \equiv P(t) \quad (\text{mod. } p).$$

Hienach ist für jeden Stellenzeiger i

$$\omega_i^{p^\nu} \equiv \omega_i \quad (\text{mod. } \varphi u)$$

und daher auch für jede ganze algebraische Zahl

$$\gamma = g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2 + \ldots + g_n \omega_n$$

des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}$

$$\begin{aligned}
\gamma^{p^\nu} &\equiv g_1^{p^\nu} \omega_1^{p^\nu} + g_2^{p^\nu} \omega_2^{p^\nu} + \ldots + g_n^{p^\nu} \omega_n^{p^\nu} && (\text{mod. } p) \\
&\equiv g_1 \omega_1^{p^\nu} + g_2 \omega_2^{p^\nu} + \ldots + g_n \omega_n^{p^\nu} && (\text{mod. } p) \\
&\equiv g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2 + \ldots + g_n \omega_n && (\text{mod. } \varphi u) \\
&\equiv \gamma \quad (\text{mod. } \varphi u).
\end{aligned}$$

II. SITZUNG VOM 11. JÄNNER 1894.

Das k. k. Finanzministerium übermittelt ein Exemplar der von demselben verfassten Tabellen zur Währungs-Statistik.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Pflanzenphysiologische Mittheilungen aus Buitenzorg.« I. II.

Herr Professor Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt weitere Fortsetzungen seiner neuesten Mondarbeiten.

Herr Prof. Dr. J. Finger in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind«.

Die Herren Professoren Dr. J. Mauthner und Dr. W. Suida in Wien übersenden eine gemeinsam ausgeführte Arbeit unter dem Titel: »Beiträge zur Kenntniss des Cholesterins« (I. Abhandlung).

Herr Prof. Dr. R. v. Lendenfeld in Czernowitz übersendet als Anhang zu seiner Abhandlung: »Tetractionelliden der Adria« eine Mittheilung über die Lithistiden.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitäts - Laboratorium in Wien von den

Herren Dr. J. Herzig und Th. v. Smoluchowski ausgeführte Arbeit: »Zur Kenntniss des Aurins«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen«.

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, überreicht den fünften und zugleich letzten vorläufigen Bericht über die im verflossenen Sommer von ihm ausgeführten erdmagnetischen Messungen.

Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs

(V. und letzter vorläufiger Bericht)

von

J. Liznar.

Mit dieser Mittheilung schliesst die Reihe der vorläufigen Berichte, welche ich über die von mir in Cisleithanien ausgeführten erdmagnetischen Messungen seit 1889 veröffentlicht habe. Sie enthält die Werthe der erdmagnetischen Elemente, welche aus den Messungen des verflossenen Sommers resultiren. Während des Zeitraumes vom 15. Juni bis 14. September 1893 habe ich 21 Stationen besucht und an jeder derselben, genau so wie in den früheren Jahren, 5 Declinations-, 10 Intensitäts- und 10 Inclinations-Messungen ausgeführt. Von diesen 21 Stationen liegen 2 in Nieder-Österreich, 10 in Steiermark, 3 in Kärnten, 3 in Krain und 3 in Istrien. Die Station Triest, wo bereits Laschober und Kesslitz beobachtet haben, wurde von mir nur deshalb gewählt, um mit ihnen nebst Pola noch einen zweiten Punkt gemeinsam zu haben.

Die Beobachtungen geschahen mit denselben Instrumenten und nach denselben Methoden wie in den Vorjahren. Eine besondere Sorgfalt habe ich auch diesmal auf die Vergleichung der Reiseinstrumente verwendet, da eine strenge Vergleichbarkeit der erhaltenen Resultate nur dann erzielt wird, wenn eine etwaige Änderung in den Angaben der Reiseinstrumente in Rechnung gebracht werden kann. Um die Beobachtungsresultate, welche von dem leider bereits verstorbenen Fregatten-Capitän Laschober und den Herren Linienschiffslieutenant Kesslitz

und Linienschiffsfähnrich von Schluet an den Küsten der Adria und in Bosnien und der Herzegowina erhalten worden sind, mit den meinigen verbinden zu können, habe ich mich nicht damit begnügt, dass ihre Reiseinstrumente mit den von mir bei den Reisebeobachtungen verwendeten in Wien verglichen worden sind, sondern ich habe auch am k. und k. hydrographischen Amte in Pola die Vergleichungen wiederholt. Bei dieser Arbeit haben mich die Herren Schiffslieutenant Kesslitz und Schiffsfähnrich von Schluet in liebenswürdigster Weise unterstützt, wofür ich ihnen meinen verbindlichsten Dank sage. Zum besonderen Danke hat mich der Director des k. und k. hydrographischen Amtes Herr R. Müller verpflichtet, da er in freundlichster Weise die Benützung der Beobachtungsräume und der Instrumente gestattet hat. Auf die Resultate der vielen Vergleichsbeobachtungen, welche ich während der fünf Beobachtungsjahre ausgeführt habe, werde ich in der später erscheinenden ausführlichen Publication meiner Messungen zurückkommen. Das Eine kann ich aber jetzt schon sagen, dass eine nennenswerthe Änderung in den Angaben der Instrumente nicht stattgefunden hat, was der guten Verpackung und dem sorgfältigen Transporte derselben zugeschrieben werden muss.

Die am Schlusse folgenden Tabellen enthalten nebst den geographischen Coordinaten die Werthe der erdmagnetischen Elemente, und zwar stehen in Tabelle II unter D (1890) die von mir beobachteten und auf das »Augustmittel 1890« reducirten Werthe der Declination; die entsprechenden Werthe der Horizontalintensität findet man in Tabelle III unter H (1890). Die Inclination unter J (1890) in Tabelle IV ist zwar nicht auf die angegebene Epoche reducirt, doch beträgt der Unterschied der daselbst angeführten Werthe gegen die reducirten kaum drei Minuten. Unter D_1 (1850), H_1 (1850) und J_1 (1850) sind die von Kreil nach seinen Beobachtungen auf die Epoche 1850·0 reducirten Daten beigesetzt. Die dritte Zahlencolumne enthält die Differenz meiner und Kreil's Werthe.

Die Unregelmässigkeit der Differenzen ist, wie auch an den früheren Stationen, bei der Declination am grössten, weil Kreil's Werthe nicht hinreichend genau sind. Wenn man z. B.

die Declination von Laibach und Rudolfswert vergleicht, so ergeben meine Messungen eine Differenz von 17'2, während aus jenen Kreil's ein Unterschied von 1° 4'2 folgt. Betrachtet man eine Isogonenkarte, so sieht man sogleich, dass nach der Lage der beiden Orte die Differenz unmöglich so gross sein könne, wie sie die Messungen Kreil's ergaben, wenn nicht ein bedeutender localer Einfluss vorhanden ist. Auch die Daten des Stationspaares Admont-Eisenerz zeigen, dass Kreil's Werthe mit bedeutenden Unsicherheiten behaftet sind. Während nach seinen Beobachtungen die Declination in Eisenerz um mehr als $^1/_4$° grösser ist als in Admont, zeigen meine Werthe gerade umgekehrt die Declination in Eisenerz um 11' kleiner als in Admont, was auch der Lage der Stationen gegeneinander entspricht, da Admont westlicher liegt als Eisenerz. Einige Gründe für die Unsicherheit der Declinationswerthe Kreil's habe ich in meinen letzten zwei Berichten angeführt, hier möchte ich nur noch erwähnen, dass an mancher Station der Aufstellungsort local beeinflusst gewesen sein dürfte.

Relativ viel genauer sind die Messungen der Horizontalintensität und der Inclination, obwohl gerade das letzte Element viel schwieriger zu bestimmen ist als die Declination. Bei den letzt erwähnten Elementen kann man daher auch aus den Differenzen der Werthe für 1850 und 1890 eine gesetzmässige Abhängigkeit der secularen Änderung von der geographischen Lage erkennen, während dies bei der Declination nicht möglich ist. Da ich bei der Bearbeitung des neuen Beobachtungsmaterials die Verhältnisse ausführlicher zu besprechen gedenke, so mögen hier die wenigen Andeutungen genügen.

Meine nächste Aufgabe wird es nun sein, eine detaillirte Darstellung der von mir an 108 Orten ausgeführten Messungen zu geben. Eine endgiltige Verarbeitung aller Daten kann ich aber erst dann vornehmen, wenn mir auch die Beobachtungsresultate von Ungarn, wo seit 1892 der Vicedirector der königl. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Budapest Herr Ignaz Kurländer Messungen vornimmt, zur Verfügung stehen werden.

Nach den neuen Daten werden wir im Grossen und Ganzen ein richtiges Bild über die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft

in Österreich-Ungarn erhalten. Die Anzahl der Stationen ist jedoch viel zu klein, um auch eine Darstellung der Störungsgebiete geben zu können; dies muss einer späteren Zeit vorbehalten werden, wo es möglich sein wird, wenigstens über die Störungsgebiete ein dichtes Stationsnetz zu ziehen. Frankreich ist in dieser Beziehung mit gutem Beispiel vorangegangen; es wäre zu wünschen, dass andere Staaten demselben folgen möchten.

Jetzt nachdem ich der übernommenen Verpflichtung mit grösster Gewissenhaftigkeit nachgekommen bin, kann ich mit grosser Befriedigung auf die erhaltenen Resultate blicken, und selbst die Erinnerung an die vielen Strapazen und Widerwärtigkeiten der Reisezeit ist nicht im Stande, dies erhebende Gefühl herabzudrücken. Berücksichtigt man, dass ich jeden nothwendigen Schritt selbst thun und jede Zahl selbst beobachten oder berechnen musste, so wird man mir das Zeugniss nicht versagen können, dass ich mit Aufgebot meiner ganzen physischen und moralischen Kräfte an der Lösung der Aufgabe gearbeitet habe. Man wird mir aber auch nicht verübeln, wenn ich dem Wunsche Ausdruck gebe, dass solche Arbeiten in Fachkreisen eine bessere Anerkennung finden möchten als dies bisher der Fall war. Sie gebührt ihnen in um so höheren Masse, da sie Daten von bleibendem Werthe liefern, welche wichtige Bausteine für eine aufzubauende Theorie des Erdmagnetismus bilden.

Zum Schlusse kann ich es nicht unterlassen, der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, welche nicht nur die Ausführung der neuen magnetischen Aufnahme in Cisleithanien ermöglicht, sondern auch ihre Ausdehnung auf Ungarn befürwortet hat, den ehrerbietigsten Dank auszusprechen für das Vertrauen, welches sie in meine Leistungsfähigkeit gesetzt hat. Meinem hochverehrten Vorstande, Herrn Hofrath Prof. Dr. Hann, bin ich aber zu tiefstem Danke verpflichtet, dass er mich mit der Ausführung der Messungen betraut hat und mir dadurch Gelegenheit bot, einen kleinen Beitrag zur Erforschung der physikalischen Verhältnisse des Vaterlandes liefern zu können. Mein wärmster Dank gebührt endlich allen k. k. Behörden und jenen Herren, welche zur Förderung meiner Arbeit beigetragen haben.

I. Geographische Coordinaten der magnetischen Stationen (der Beobachtungspunkte).

Nr.	Station	φ	λ E v. Gr.
1	Wr. Neustadt	47° 48'4	16° 15'7
2	Schottwien	47 39·4	15 52·5
3	Bruck a./M.	47 24·8	15 16·3
4	Aflenz	47 32·7	15 14·7
5	Liezen	47 34·2	14 14·8
6	Admont	47 35·1	14 27·8
7	Eisenerz	47 32·7	14 53·9
8	Graz	47 4·8	15 27·2
9	Gleichenberg	46 52·7	15 54·5
10	Marburg	46 34·0	15 38·2
11	St. Paul	46 41·8	14 52·1
12	Gmünd	46 54·3	13 32·3
13	Klagenfurt	46 37·8	14 18·3
14	St. Lambrecht	47 4·2	14 18·2
15	Laibach	46 2·7	14 30·6
16	Rudolfswert	45 48·5	15 10·0
17	Cilli	46 13·9	15 15·2
18	Adelsberg	45 46·4	14 12·4
19	Görz	45 57·8	13 38·2
20	Triest	45 38·7	13 45·9
21	Pola	44 51·8	13 50·8

II. Declination (West).

Nr.	Station	D (1890)	D_1 (1850)	$D_1 - D$
1	Wr. Neustadt	9° 13'9[1]	—	—
2	Schottwien	9 31·0	13° 53'1	4° 22'1
3	Bruck a./M.	9 46·1	13 51·5	4 5·4
4	Aflenz	9 43·3	13 51·7	4 8·4
5	Liezen	10 11·9	14 35·1	4 23·2
6	Admont	10 6·3	14 13·1	4 6·8
7	Eisenerz	9 55·0	14 30·0	4 35·0
8	Graz	9 37·4	14 12·0	4 34·6
9	Gleichenberg	9 13·5	13 45·8	4 32·3
10	Marburg	9 28·0	13 51·1	4 23·1

[1] In Wr. Neustadt hat Kreil nicht beobachtet.

Nr.	Station	D (1890)	D_1 (1850)	D_1 —D
11	St. Paul	9° 52'7	14° 18'6	4° 25'9
12	Gmünd..................	10 28·5	15 6·4	4 37·9
13	Klagenfurt....	10 13·0	14 28·2	4 15·2
14	St. Lambrecht	10 22·9	14 58·6	4 35·7
15	Laibach	10 2·7	14 22·8	4 20·1
16	Rudolfswert	9 45·5	13 18·6	3 33·1
17	Cilli	9 41·7	13 40·9	3 59·2
18	Adelsberg	10 9·4	13 49·6	3 40·2
19	Görz	10 25·3	13 58·5	3 33·2
20	Triest..................	10 22·7	14 31·8	4 9·1
21	Pola	10 13·1	14 16·0	4 2·9

III. Horizontale Intensität.

Nr.	Station	H (1890)[1]	H_1 (1850)	$H—H_1$
1	Wr. Neustadt.............	2·0800	—	—
2	Schottwien	2·0852	2·0090	0·0762
3	Bruck a./M.	2·0933	2·0158	0·0775
4	Aflenz	2·0830	2·0081	0·0749
5	Liezen	2·0747	1·9944	0·0803
6	Admont	2·0730	2·0046	0·0684
7	Eisenerz	2·0800	2·0086	0·0714
8	Graz	2·1074	2·0380	0·0694
9	Gleichenberg.............	2·1145	2·0453	0·0692
10	Marburg	2·1273	2·0529	0·0744
11	St. Paul	2·1169	2·0454	0·0715
12	Gmünd..................	2·1047	2·0163	0·0884
13	Klagenfurt...............	2·1120	2·0440	0·0680
14	St. Lambrecht	2·0846	2·0197	0·0649
15	Laibach	2·1515	2·0707	0·0808
16	Rudolfswert..............	2·1614	2·0759	0·0855
17	Cilli	2·1434	2·0775	0·0659
18	Adelsberg	2·1554	2·0813	0·0741
19	Görz....................	2·1440	2·0687	0·0753
20	Triest...................	2·1602	2·0810	0·0792
21	Pola	2·1922	2·1122	0·0800
22	Rattenberg[2].............	2·0664	1·9737	0·0927

[1] Die hier mitgetheilten Intensitäten sind um circa 0·0040 zu klein, wie dies auch in den früheren Berichten hervorgehoben wurde.

[2] Diese Station ist aus Versehen im vorigen Berichte ausgeblieben und wird deshalb hier nachgetragen.

IV. Inclination.

Nr.	Station	J (1890)	J_1 (1850)	J_1-J
1	Wr. Neustadt	62° 51'0	—	—
2	Schottwien	62 46·8	63° 55'	1° 8'
3	Bruck a. M.	62 34·3	63 51	1 17
4	Aflenz	62 46·3	63 54	1 8
5	Liezen	62 54·6	64 9	1 15
6	Admont	62 54·3	64 0	1 6
7	Eisenerz	62 49·1	63 55	1 6
8	Graz	62 16·9	63 30	1 13
9	Gleichenberg	62 22·7	63 28	1 5
10	Marburg	61 57·1	63 13	1 16
11	St. Paul	62 7·8	63 21	1 13
12	Gmünd	62 21·6	63 43	1 21
13	Klagenfurt	62 8·8	63 27	1 18
14	St. Lambrecht	62 38·7	63 49	1 10
15	Laibach	61 32·0	62 54	1 22
16	Rudolfswert	61 18·6	62 39	1 20
17	Cilli	61 41·3	62 53	1 12
18	Adelsberg	61 23·4	62 44	1 21
19	Görz	61 34·7	62 57	1 22
20	Triest	61 18·2	62 44	1 26
21	Pola	60 38·6	62 14	1 35
22	Znaim[1]	63 50	64 48	0 58

[1] In meinem zweiten Berichte steht infolge eines Druckfehlers für J(1890) der Werth 64°50' statt des oben angeführten richtigen. Dass es nur ein Druckfehler ist, kann man aus der Differenz J_1-J ersehen.



Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

Im Nachfolgenden sollen einige stündliche und zweistündliche meteorologische Aufzeichnungen auf hohen Berggipfeln, die kürzlich zu meiner Kenntniss gelangt sind, einer Discussion unterzogen werden.

Die eine dieser Beobachtungsreihen bezieht sich auf den Gipfel des Ontake in Japan (3055 *m*). Die Ergebnisse derselben sind vom meteorologischen Central-Observatorium in Tokio publicirt worden unter dem Titel: »Meteorological Observations on the Summit of Ontake (Tokio 1893).« Der Text dieser Publication, circa 28 Seiten umfassend, ist leider nur in japanischer Sprache gedruckt,[1] die Zahlentabellen, 40 Seiten (Kleinfolio), haben Aufschriften in englischer und japanischer Sprache.

Die Beobachtungen auf dem Gipfel des Ontake sind zweistündlich gemacht vom 1. August bis 12. September 1891, also durch 43 Tage. Es werden sowohl die Mittel für den Monat August, als auch für die ganze Periode von 43 Tagen mitgetheilt. Die Beobachtungen erstrecken sich auf Luftdruck, Lufttemperatur, deren Maximum und Minimum, Maximum in der Sonne, Minimum unter dem Einfluss der Wärmeausstrahlung,

---

[1] Die Publication scheint desshalb nicht nach Europa versendet worden zu sein; ich erhielt selbe auf specielles Ansuchen durch die Güte des Directors des Met. Central-Observ. in Tokio, Herrn K. Kobayashi, dem ich hiefür auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche.

Bodentemperatur an der Erdoberfläche vierstündlich angestellt und in 0·3 *m* Tiefe um 10^h a. und 10^h p., Dampfdruck und relative Feuchtigkeit zweistündlich, Niederschlagsmenge vierstündlich, Windrichtung und Stärke (m. s.), Bewölkung nach Grad und Art, Witterungsverhältnisse gleichfalls zweistündlich.

Als Basisstation diente Kurosawa, das in 830 *m* Seehöhe und 22·5 *km* Entfernung östlich von Ontake liegt. Die Beobachtungen an dieser Station wurden correspondirend und genau nach dem gleichen Schema wie auf dem Gipfel des Ontake angestellt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass zu Kurosawa der Niederschlag in zweistündigen Intervallen gemessen wurde.

Da zudem der »Annual Report of the Central Met. Observatory of Japan for the year 1891, Part I« (Meteorological Observations in Japan) die Resultate stündlicher Aufzeichnungen an zehn Stationen in Japan zwischen 32°48′ und 43°20′ N. Br. und 130°42′ und 145°35′ E. von Greenwich enthält, so befindet man sich in der glücklichen Lage, auch von diesen die nächste Station zur Vergleichung herbeiziehen zu können. Die Wissenschaft schuldet der Leitung des meteorologischen Dienstes in Japan gewiss grossen Dank einerseits für die Unternehmung zweistündlicher Beobachtungen auf den Gipfeln der höchsten Berge des Landes[1] und der raschen und ausführlichen Publication der Ergebnisse derselben, anderseits für die Veröffentlichung stündlicher Beobachtungen aller Elemente an so zahlreichen und ziemlich gleichmässig vertheilten Punkten des Landes. Es gibt nur wenige meteorologische Beobachtungsnetze auf der Erde, die sich in ihren Leistungen mit jenen des japanischen Netzes gegenwärtig vergleichen können.

Als zweite und unterste Basisstation habe ich Nagoya gewählt, das südwestlich vom Ontaki in der Owari-Ebene, nahe der See an der Owari-Bai liegt. Die Lage dieser und der beiden anderen Stationen habe ich den Karten entnommen, welche sich im Ergänzungsheft 59 zu Peterm. Geogr. Mitth. (Gotha 1880:

---

[1] Die Ergebnisse der Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji, 3733 *m*, und des Gozaishogatake, 1201 *m*, habe ich discutirt in diesen Sitzungsberichten, Bd. C, Abth. II. a., December 1891.

»Der Nakasendô in Japan von E.-Knipping u. J. J. Rein«) befinden. Die Seehöhen der Station auf dem Ontake und jener zu Kurosawa habe ich aus den correspondirenden Luftdruck-, Temperatur- und Dampfdruck-Mitteln des August nach Rühlmann's hypsometrischen Tafeln berechnet. Als Basisstationen dienten dabei Kioto und Tokio, zwischen welchen die gedachten Orte liegen.

Ontake	35°54' N. Br.	137°30' E. von Gr.	3055 *m*
Kurosawa....	35 50	137 45	834
Nagoya......	35 10	136 55	15

Kurosawa liegt nach der Karte in einem, wie es scheint, ziemlich tiefen Thale am Flusse Kisogawa, Nagoya dagegen liegt am Rande einer ziemlich weiten Ebene an der See. Dies ist für die Beurtheilung der Unterschiede im täglichen Gange der meteorologischen Elemente an diesen beiden Orten von wesentlicher Bedeutung.

Die correspondirenden Mittelwerthe (August 1891) der meteorologischen Elemente dieser drei Stationen sind:

	Luft-druck	Temp.	Dampf-druck	Rel. Feucht.	Regen-menge	Mittlere Windg.[1]	Mittlere Bewölk.
Ontake......	531·80	8·6	6·6	78·5	600	11·7	6·6
Kurosawa ...	690·36	20·3	14·4	83·0	268	0·9	6·3
Nagoya	758·15	26·1	19·6	79·3	276	2·2	6·1

Die Mittel für die beiden ersten Stationen sind aus den zweistündlichen Beobachtungen, jene von Nagoya aus stündlichen Aufzeichnungen gebildet.

Berechnet man die Seehöhe der beiden ersteren Stationen nach den correspondirenden Mittelwerthen der letzten nach Rühlmann's hypsometrischen Tafeln, so erhält man:

Ontake 3058·5 *m*, Kurosawa 835·9 *m*.

Ich möchte das früher angegebene Resultat der Berechnung nach Kioto—Tokio vorziehen, weil den etwaigen ostwestlichen und nordsüdlichen Druckgradienten dabei mehr

[1] Meter pro Secunde.

Rechnung getragen ist. Gifu, das auch dem Ontake recht nahe liegt (35°27', 136°46', 15·0 *m*), gibt als Seehöhe desselben (respective des Barometers der temporären Station auf demselben) 3056·0 *m*.

Die Ergebnisse der Dampfdruckbeobachtungen auf dem Ontake stimmen genau mit meiner Formel[1] für die Abnahme des Wasserdampfgehaltes mit der Höhe überein, welche bekanntlich lautet:

$$\log e_h = \log e_0 - \frac{h}{6500};$$

e_0 ist in unserem Falle (Mittel Tokio 19·3, Kioto 19·2, Nagoya 19·6) 19·4 *mm*. Daraus erhält man:

Dampfdruck auf dem Ontake berechnet 6·63, beobachtet 6·62
» zu Kurosawa » 14·56, » 14·42

Der Dampfdruck auf dem Ontake, berechnet aus den 43-tägigen Beobachtungen zu Kurosawa allein ($e_0 = 14·60$), ergibt sich zu 6·65, beobachtet wurde 6·78.

Für den Fujigipfel (3733 *m*) habe ich nach derselben Formel erhalten 5·43 *mm* (August 1889 $e_0 = 20·3$ *mm* am Meeresniveau) die Beobachtungen aber haben ergeben 5·49 *mm*.

Man kann also obige Formel als den Ausdruck eines empirischen Gesetzes betrachten, nach welchem unter mittleren Verhältnissen der Dampfdruck mit der Höhe abnimmt.

Bevor wir auf den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Untersuchung, den täglichen Gang der meteorologischen Elemente, näher eingehen, lohnt es sich wohl, noch einige bemerkenswerthe Ergebnisse der correspondirenden Beobachtungen auf dem Gipfel des Ontake und zu Kurosawa hier übersichtlich nebeneinander zu stellen.

	Maximum		Minimum		Differenz
	Luftdruck				
Ontake ...	536·4	3. IX.	523·8	17. VIII.	12·6
Kurosawa .	694·7	3. IX.	683·5	17. VIII.	11·2

---

[1] Die Abnahme des Wasserdampfgehaltes in der Atmosphäre mit der Höhe. Zeitschrift für Met., Bd. IX, 1874, S. 193.

	Maximum		Minimum		Differenz
	Temperatur				
Ontake ...	19·2	1. IX.	1·3	19. VIII.	17·9
Kurosawa .	31·2	3. IX.	9·0	27. VIII.	22·2

	Mittlere tägl. Extreme		Differenz	Absolute Extreme		Differenz
Ontake ...	14·7	5·1	9·6	22·0	0·8	21·2
Kurosawa .	28·0	14·9	13·1	32·2	8·4	23·8

Tiefster Stand des der Wärmeausstrahlung ausgesetzten Thermometers:

Ontake .... 26. August —4°8

Kurosawa .... 27. August 5·3

Die mittlere Bodentemperatur an der Erdoberfläche war auf dem Ontake 10°1 (Luft 8°6), zu Kurosawa 24°2 (Luft 20°3), die Temperatur in 0·3 *m* Tiefe auf dem Ontake 8°9, der Lufttemperatur sehr nahe kommend. Den täglichen Gang der Temperatur an der Erdoberfläche habe ich auch für die correspondirenden Tage oben und unten (20 an der Zahl) berechnet (es fehlen nämlich oben wie unten einzelne Tage) und für die vierstündlichen Intervalle derart erhalten:

Täglicher Gang der Temperatur an der Erdoberfläche.

	Zeit[1]						Mittel
	2^h a.	6^h	10^h	2^h p.	6^h	10^h	
Ontake	4·9	4·8	15·4	17·8	10·3	5·2	9·7
Kurosawa ..	16·5	16·3	33·8	36·6	23·9	17·8	24·1

Die Extreme waren auf dem Ontake 27°4 und —1°1, zu Kurosawa 51°0 und 10°0.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Bodentemperatur an der Erdoberfläche aus allen Beobachtungen, die einen vollen Tag umfassen, abgeleitet, sind (Ortszeit, von Mitternacht an gezählt):

Ontake 33 Tage .... $10°40+6\cdot38 \sin(279°6+x)+2\cdot51 \sin(131°6+2x)$

Kurosawa 28 Tage ..... $24\cdot39+9\cdot51 \sin(282\cdot8+x)+3\cdot50 \sin(138\cdot8+2x)$

---

[1] Mittlere Japan Zeit, d. i. Zeit von 135° E. von Greenwich.

Die Beobachtungen auf dem Ontake sind in vierstündigen, jene zu Kurosawa in zweistündigen Intervallen angestellt; diese letzteren sind auch für Kurosawa zur Ableitung der obigen Formel benützt worden. Die Übereinstimmung des Ganges der Bodentemperatur an den beiden Stationen ist eine fast vollständige, nur die Amplitude ist an der unteren Station viel grösser.

Der Regenfall ist auf dem Ontake in vierstündigen Intervallen gemessen worden, zu Kurosawa aber in zweistündigen Zeiträumen. Der Vergleichbarkeit wegen habe ich in der folgenden übersichtlichen Zusammenstellung der Resultate dieser Messungen während 43 Tagen überall vierstündige Intervalle genommen.

Tägliche Periode des Regenfalles.

	Gemessen um						Summe
	2^h	6^h	10^h	2^h	6^h	10^h	
Ontake	142	147	**149**	146	102	82*	768
Kurosawa......	67	77	**79**	40	34	30*	327

Die grösste Regenmenge ist an beiden Orten von 6^h—10^h Morgens gefallen, die kleinste von 6^h—10^h Abends. Der Regenfall auf dem Ontake war 2·35mal grösser als unten zu Kurosawa. Die grösste Tagessumme auf dem Ontake war 142 *mm* am 9. September, zu Kurosawa 109·5 *mm* am 17. August.

In Bezug auf die Luftfeuchtigkeit zeigt der Gipfel des Ontake auffallenden Wechsel zwischen hoher relativer Feuchtigkeit bis zu 100% und grosser Trockenheit. Am 30. August war das Tagesmittel der relativen Feuchtigkeit 36·5%, in der Nacht vom 29./30. August wurden nur 2% und 4% beobachtet. Der dabei herrschende Wind war W und NW von geringer Stärke. Das Tagesmittel des 20. August war gar nur 31·7%, das Minimum ging aber nur auf 14% herab. Der Wind war schwach zwischen WSW, W und WNW.

Zu Kurosawa war das niedrigste Tagesmittel der relativen Feuchtigkeit 73% am 1. August, das absolute Minimum 41%.

Die vom 1. August bis 12. September auf dem Gipfel des Ontake vorherrschenden Winde waren WNW bis WSW. Die

heftigsten Winde waren SSW und S. Am 3. August war die mittlere Windgeschwindigkeit 22·1 *m* pro Secunde bei SSW, Maximum 37·3 *m*; am 16. August erreichte das Tagesmittel bei Südwind 24·0 *m*. Das Maximum pro Stunde war 33·5 *m*, zwischen 11^h10^m und 11^h30^m sogar 45·2 *m*. Die kleinste Windgeschwindigkeit hatte der 6. September mit 4·5 *m*; Calmen fehlten fast vollständig. Zu Kurosawa dagegen waren sie weitaus vorherrschend.

Zur Zeit der Terminbeobachtungen (43×12) gab es auf dem Ontake 128mal Regen, zu Kurosawa nur 117mal. Auf die Zeit von 6^h Abends bis 6^h Morgens (Nacht) kommen auf den Ontake 64, zu Kurosawa 49 Regenbeobachtungen, auf die Tageshälfte dagegen auf dem Ontake gleichfalls 64, dagegen zu Kurosawa 68. Auf dem Berggipfel war die Vertheilung der Regenstunden eine fast ganz gleichmässige über alle 24 Stunden, dagegen zeigte sich zu Kurosawa eine grössere Tendenz zu Nachmittagsregen.

Nach diesem kurzen Resumé der allgemeineren Beobachtungsergebnisse gehen wir nun über zu einer specielleren Untersuchung der täglichen Periode des Luftdruckes, der Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Bewölkung und Windgeschwindigkeit auf Grund der correspondirenden zweistündlichen Beobachtungen. Man findet die Ergebnisse derselben in den nachfolgenden kleinen Tabellen übersichtlich zusammengestellt. (Siehe S. 58.)

Der tägliche Gang des Luftdruckes zeigt die charakteristischen Eigenthümlichkeiten einer Gipfelstation (Ontake), einer Thalstation (Kurosawa) und einer Station in der Ebene (Nagoya) in vollem Umfange. Am deutlichsten lässt sich dies aus den Gleichungen des täglichen Ganges erkennen. (Ortszeit von Mitternacht an gezählt. Die Correction auf Localzeit beträgt für Ontake im Zeitmass —10′, für die Winkelconstanten —2°5 und —5°0; für Kurosawa in Zeit —11′, für die erste Winkelconstante —2°7, für die zweite —5·4; für Nagoya in Zeit —8′, für die beiden ersten Winkelconstanten —2° und —4°.)

Ontake .... $0·282 \sin(221°8+x)+0·232 \sin(142°5+2x)$

Kurosawa .... $0·679 \sin(35·2+x)+0·364 \sin(169·2+2x)$

Nagoya .... $0·563 \sin(6·3+x)+0·412 \sin(154·5+2x)$

Übersicht des täglichen Ganges der meteorologischen Elemente. August 1891.

	Ontake 3055	Kurosawa 834	Nagoya 15	Ontake 3055	Kurosawa 834	Nagoya 15
	Luftdruck Abweichungen vom Mittel			**Temperatur** Abweichungen vom Mittel		
Mitternacht	—·14	·48	·25	—1°75	—3°23	—2°09
2	—·39	·25	·05	—1·97	—3·83	—2·67
4	—·50	·32	·07	—2·21	—4·47	—3·06
6	—·26	·61	·48	—1·75	—4·38	—3·13
8	—·01	·53	·69	0·14	—0·93	—0·58
10	·27	·20	·57	2·41	3·18	1·70
Mittag	·33	—·42	·05	3·52	5·45	3·19
2	·24	—·86	—·58	3·36	5·64	3·76
4	·04	—·92	—·87	1·79	4·69	3·34
6	—·04	—·74	—·82	—0·49	1·70	1·40
8	·28	·10	—·16	—1·52	—1·33	—0·45
10	·21	·47	·22	—1·54	—2·46	—1·40
Mittel	531·80	690·36	758·15	8·61	20·26	26·05
	Relative Feuchtigkeit (%)			**Dampfdruck** (*mm*)		
Mitternacht	74	96	89	5·64	13·91	19·73
2	74	96	91	5·61	13·54	19·53
4	80	97	92	5·93	13·01	19·18
6	81	96	91	6·09	13·04	19·14
8	79	84	80	6·53	14·23	19·33
10	78	70	70	7·38	14·97	19·23
Mittag	76	62	64	7·82	15·02	19·17
2	80	62	63	8·13	15·00	19·33
4	83	67	65	7·71	15·31	19·42
6	82	80	75	6·63	15·55	20·42
8	78	92	85	6·00	14·99	20·67
10	77	95	87	5·92	14·47	20·06
Mittel	78·5	83·0	79·3	6·62	14·42	19·60

	Ontake	Kuro-sawa	Nagoya	Ontake	Kuro-sawa	Nagoya
	3055	834	15	3055	833	15
	Bewölkung (Scale 0—10)			**Windgeschwindigkeit** (Meter pro Secunde)		
Mitternacht	5·4	5·5	5·3	14·9	0·5	1·7
2	6·0	6·2	5·7	15·5	0·2	1·4
4	6·0	6·0	5·3	15·5	0·4	1·3
6	6·4	7·5	6·5	14·5	0·4	1·1
8	6·7	6·7	6·0	11·9	0·6	1·8
10	7·2	6·4	7·2	9·8	1·4	2·4
Mittag	8·1	7·1	7·3	8·1	1·9	2·9
2	8·5	7·2	6·8	7·6	2·1	3·6
4	8·2	6·7	6·3	7·8	2·0	3·4
6	6·5	6·7	6·3	10·0	1·0	3·1
8	4·4	5·1	4·7	11·7	0·3	2·0
10	5·4	5·1	5·4	13·1	0·3	1·9
Mittel	6·6	6·3	6·1	11·7	0·9	2·2

Die einmalige tägliche Barometerschwankung folgt auf dem Ontake in ihren Phasenzeiten, wie zu erwarten, nur mehr dem täglichen Wärmegange; die doppelte tägliche Oscillation bleibt in der Phasenzeit etwas zurück gegen jene in der benachbarten Niederung und hat zugleich eine etwas kleinere Amplitude (0·23 statt 0·28), als sie dem mittleren Barometerstande auf dem Ontake entsprechen würde. Die wahrscheinliche Ursache dieser allen Gipfelstationen gemeinsamen Eigenthümlichkeit habe ich an einer anderen Stelle eingehender erörtert.[1]

Beim täglichen Barometergange zu Kurosawa fällt die grosse Amplitude der einmaligen täglichen Luftdruckschwankung auf, die Phasenzeiten derselben sind etwas verfrüht (4^h a. statt 6^h), dagegen zu Nagoya normal. Dass zwischen den

[1] Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschriften der Wiener Akad., Bd. LIX, 1892.

Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation zu Kurosawa und Nagoya ein Unterschied von einer halben Stunde besteht, ist wohl nur ein zufälliges Resultat der bloss 31-tägigen Beobachtungsreihe. Sonst ist die Übereinstimmung in ähnlichen Fällen viel grösser.

Versucht man aus dem täglichen Gange des Luftdruckes auf dem Ontake und zu Kurosawa im Augustmittel den täglichen Gang der Lufttemperatur in der atmosphärischen Schichte von 2220 *m* Mächtigkeit zwischen den beiden Stationen zu berechnen, so erhält man

$$1^\circ 60 \sin (220^\circ 2 + x) + 0^\circ 25 \sin (50^\circ 0 + 2x).$$

Nach dem Gange des Luftdruckes auf dem Ontake wäre demnach nur auf eine tägliche Wärmeschwankung von 3°2 in der Luftschichte unterhalb desselben zu schliessen.

Täglicher Gang der Temperatur. Auf dem Gipfel des Ontake und zu Kurosawa tritt das Maximum der Temperatur im täglichen Gange näher dem Mittage ein, als in der Ebene, namentlich auf dem Ontake liegt das Wärmemaximum dem Mittage sehr nahe; zu Nagoya tritt das Temperaturmaximum erst gegen 3^h Nachmittags auf, wie dies im Sommer normal ist. Der frühe Eintritt des Wärmemaximums zu Kurosawa scheint eine für Thalstationen ziemlich charakteristische Erscheinung zu sein, wie wir später noch sehen werden. Die Gleichungen für den täglichen Wärmegang sind:

Ontake .... $2^\circ 77 \sin (253^\circ 7 + x) + 1 \cdot 01 \sin (88 \cdot 6 + 2x)$
Kurosawa .... $5 \cdot 13 \sin (236 \cdot 8 + x) + 1 \cdot 21 \sin (94 \cdot 1 + 2x)$
Nagoya .... $3 \cdot 41 \sin (232 \cdot 5 + x) + 0 \cdot 65 \sin (92 \cdot 6 + 2x)$.

Auf dem Ontake entfernt sich der tägliche Temperaturgang am meisten von einer einfachen täglichen Wärmewelle, das zweite Glied hat fast die halbe Amplitude des ersten, also einen sehr grossen Einfluss. Der Eintritt der Extreme ist verfrüht gegenüber den unteren Stationen. An der Thalstation ist die tägliche Amplitude sehr gross, viel grösser als in der Ebene, auch hat das zweite Glied noch einen erheblicheren Einfluss, die Phasenzeiten stimmen aber an beiden Orten (Kurosawa, Nagoya) fast vollkommen überein.

Der tägliche Gang der absoluten und der relativen Feuchtigkeit, sowie jener der Bewölkung tritt an den drei Stationen in sehr charakteristischer Form auf. Auf dem Berggipfel haben die Nachmittagsstunden die grösste relative Feuchtigkeit, wenn gleichzeitig in den Thälern und in der Ebene die Luftfeuchtigkeit noch dem Minimum der Sättigung nahe ist. Die trockenste Tageszeit auf dem Gipfel fällt auf Mitternacht bis 2^h, wenn unten in den Thälern die Luft am feuchtesten ist.

Der Wasserdampfgehalt der Luft erreicht in der täglichen Variation auf dem Berggipfel sein Maximum um 2^h Nachmittag, in der Thallage zu Kurosawa etwa um 5^h Nachmittag und zu Nagoya in der Ebene draussen erst um 7^h. Zu Nagoya zeigt sich auch die gewöhnliche Erscheinung eines ersten secundären Maximums des Dampfdruckes um 8^h—9^h Vormittag, dem rasch eine Abnahme folgt, die gewöhnlich und wohl mit Recht durch die tägliche Periode der Luftbewegung erklärt wird, dann folgt wieder eine Zunahme des Dampfdruckes bis zum Abende.

Der tägliche Gang der Bewölkung zeigt an allen drei Stationen eine grössere Übereinstimmung, als jener der Feuchtigkeit, was ja auch erklärlich ist, da die Himmelsansicht für alle Stationen nahe dieselbe ist, nur die localen Wolkenhauben der Berggipfel machen eine Ausnahme, die auch an der viel stärkeren Bewölkung auf dem Gipfel des Ontake in den ersten Nachmittagsstunden zum Ausdrucke kommt. Charakteristisch ist die rasche Abnahme der Bewölkung nach 6^h, so dass etwa um 8^h Abends das Minimum der Bewölkung eintritt.

Die Gleichungen des täglichen Ganges für die eben besprochenen meteorologischen Elemente folgen später.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Gipfel des Ontake steht in vollkommener Übereinstimmung mit den bisherigen Erfahrungen. Das Maximum der Windstärke tritt um 3^h Morgens ein, das Minimum um 3^h Nachmittags. Zu Nagoya in der Ebene trat das Minimum um 6^h Morgens ein, das Maximum von 3^h Nachmittags gleichzeitig mit dem Minimum der Windstärke auf dem Berggipfel. Die mittlere Windgeschwindigkeit war auf letzterem mehr als fünfmal grösser als in der Ebene, in der Thalstation war sie, wie zu erwarten, noch viel kleiner.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit sind folgende (Mitternacht $x = 0$,[1] Localzeit, Meter pro Secunde, Augustmittel 1891):

Ontake .... $4 \cdot 07 \sin(53 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 33 \sin(262 \cdot 4 + 2x)$
Kurosawa...... $0 \cdot 90 \sin(243 \cdot 9 + x) + 0 \cdot 38 \sin(47 \cdot 1 + 2x)$
Nagoya........ $0 \cdot 97 \sin(228 \cdot 9 + x) + 0 \cdot 26 \sin(25 \cdot 5 + 2x)$

Auffallend ist die grosse Amplitude in der täglichen Variation der Windstärke auf dem Gipfel des Ontake. Die Phasenzeiten des täglichen Ganges sind auf dem Ontake fast genau die entgegengesetzten von jenen zu Nagoya in der Niederung. Auch die mittlere Windgeschwindigkeit war auf dem Ontake ganz ungewöhnlich gross.

Ich will den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit für einige Gipfelstationen, für welche ich die entsprechenden Gleichungen berechnet habe, hier zusammenstellen nebst Angabe der Seehöhe in Meter (Windgeschwindigkeit in Meter pro Secunde, Localzeit, $x = 0$ für Mitternacht.)

Pikes Peak 4308..... $9 \cdot 26 + 1 \cdot 11 \sin(69 \cdot 2 + x) + 0\ 30 \sin(301°0 + 2x)$
Fuji Gipfel 3733..... $8 \cdot 79 + 2 \cdot 04 \sin(65 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 54 \sin(44 \cdot 3 + 2x)$
Ontake[2] 3055.... $11 \cdot 41 + 3 \cdot 84 \sin(53 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 53 \sin(247 \cdot 6 + 2x)$
Gozaishagatake 1205..... $7 \cdot 76 + 1 \cdot 50 \sin(84 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 59 \sin(281 \cdot 3 + 2x)$

Für die japanischen Stationen habe ich hier überall angenommen, dass die für Mitternacht angegebene Windgeschwindigkeit auch dieser Stunde entspricht, und nicht etwa dem Mittel des Intervalls 10^h—Mitternacht, also für 11^h p. gelte. An den japanischen Stationen wurde nur je einen (Sommer-) Monat oder wenig darüber beobachtet, für Pikes Peak dagegen bezieht sich die Formel auf ein mehrjähriges Mittel. Die Übereinstimmung im täglichen Gange der Windstärke aller Gipfelstationen ist eine sehr grosse.

In der nachfolgenden Tabelle habe ich die Mittelwerthe der zweistündigen Terminbeobachtungen für den ganzen Zeit-

---

[1] Ich nehme an, dass die unter Mitternacht stehende Windgeschwindigkeit dieser Stunde entspricht, nicht dem Mittel aus 10^h—Mitternacht.

[2] Hier ist der mittlere Gang für 43 Tage, d. i. die ganze Beobachtungsperiode eingestellt.

raum vom 1. August bis 12. September inclusive (also für 43 Tage) zusammengestellt und zwar in anderer Form, indem für jede Station alle meteorologischen Elemente beisammenstehen und so unter sich auf gegenseitige Beziehungen verglichen werden können.

Täglicher Gang der meteorologischen Elemente
1. August bis inclusive 12. September 1891 (43 Tage).

	Luftdruck	Temperatur	Feuchtigkeit absolut	Feuchtigkeit relativ	Bewölkung	Windstärke
			Ontake 3055 *m*			
Mitternacht	532·02	7·19	5·93	76	5·6	14·2
2	1·76	6·93	5·81	76	5·7	14·6
4	1·64	6·72	6·04	81	5·6	15·1
6	1·84	7·07	6·22	82	6·0	14·3
8	2·10	8·93	6·66	79	6·3	11·8
10	2·40	11·52	7·43	76	7·1	9·7
Mittag	2·42	12·60	8·02	76	8·4	7·8
2	2·33	12·38	8·17	78	8·7	7·3
4	2·17	10·72	7·82	82	8·3	7·9
6	2·11	8·47	6·86	83	6·5	9·7
8	2·43	7·41	6·26	80	4·3	11·7
10	2·32	7·43	6·19	79	5·3	12·8
Mittel	532·13	8·95	6·78	79·0	6·5	11·4
			Kurosawa 834 *m*			
Mitternacht	691·03	17·23	14·11	96	5·1	0·4
2	90·84	16·60	13·66	96	5·5	0·2
4	90·89	15·96	13·17	97	5·7	0·4
6	91·19	15·98	13·11	96	7·9	0·4
8	91·11	19·52	14·37	84	6·1	0·5
10	90·77	23·92	15·19	69	6·2	1·6
Mittag	90·13	26·20	15·13	61	6·6	2·1
2	89·69	26·35	15·29	61	6·6	2·2
4	89·61	25·37	15·49	66	6·2	2·2
6	89·81	22·00	15·80	81	6·1	0·9
8	90·71	19·13	15·23	92	4·5	0·3
10	91·02	18·03	14·71	95	5·0	0·3
Mittel	690·57	20·52	14·60	82·9	6·0	0·95

In derselben Anordnung sollen hier auch die Gleichungen für den täglichen Gang aller Elemente zusammengestellt werden. Die Zeit ist auch in diesen Gleichungen Localzeit, und $x = 0$ für Mitternacht.

Täglicher Gang der meteorologischen Elemente.

A. Auf dem Gipfel des Ontake 3055 *m.*

Luftdruck	0·275 sin (227°4+x)	+0·229	sin (143°2+2x)
Temperatur	2·83 sin (253·2+x)	+1·10	sin (74·0+2x)
Dampfdruck	1·12 sin (246·7+x)	+0·28	sin (43·6+2x)
Rel. Feuchtigkeit	0·88 sin (168·4+x)	+3·28	sin (272·5+2x)
Bewölkung	1·57 sin (257·3+x)	+0·89	sin (24·8+2x)
Windgeschw.	3·84 sin (53·6+x)	+0·53	sin (247·6+2x)

B. Zu Kurosawa 834 *m.*

Luftdruck	0·685 sin (35°7+x)	+0·373	sin (170°4+2x)
Temperatur	5·27 sin (237·4+x)	+1·57	sin (64·9+2x)
Dampfdruck	1·17 sin (208·3+x)	+0·33	sin (156·2+2x)
Rel. Feuchtigk.	19·17 sin (67·2+x)	+5·63	sin (233·6+2x)
Bewölkung	0·89 sin (299·0+x)	+0·45	sin (309·6+2x)
Windgeschw.	1·00 sin (245·6+x)	+0·43	sin (34·9+2x)

Temperatur, Dampfdruck und Bewölkung zeigen in ihrem täglichen Gange die meiste Übereinstimmung, auf dem Ontake noch mehr als unten im Thale. Die relative Feuchtigkeit hat auf dem Gipfel der Hauptsache nach nur eine doppelte tägliche Periode, unten im Thale dagegen nur eine einfache und zwar mit excessiver Amplitude. Die Windgeschwindigkeit schliesst sich unten in ihrem täglichen Gange ganz der Temperatur an, nur treten die Extreme früher ein bei der Windstärke als bei der Temperatur; auf dem Gipfel ist, wie schon bemerkt, der Gang der entgegengesetzte.

Aus den Gleichungen des täglichen Ganges der Temperatur unten und oben erhält man unmittelbar auch jene des täglichen Ganges der Wärmeabnahme mit der Höhe durch einfache Subtraction der nummerischen Coëfficienten und Division der Amplituden durch den Höhenunterschied der beiden Stationen. Die Rechnung stellt sich dann so:

	Coëfficienten				
	p	p_1	q_1	p_2	q_2
Kurosawa 834 *m* . .	20°52	—4°57	—2°63	+1·48	+0·53
Ontake 3055 . .	8·95	—2·74	—0·70	+1·08	+0·21
Differenz 2221 . .	11·57	—1·83	—1·93	+0·40	+0·32

Täglicher Gang der Temperatur-Differenz:

$$11\cdot57+2\cdot660 \sin(223\cdot5+x)+0\cdot512 \sin(51^\circ3+2x)$$

Täglicher Gang der Wärmeabnahme pro 100 *m*:

$$0\cdot520+0\cdot120 \sin(223\cdot5+x)+0\cdot023 \sin(51\cdot3+2x)$$

Täglicher Gang der Wärmeabnahme pro 100 *m* (August allein):

$$0\cdot524+0\cdot117 \sin(221\cdot7+x)+0\cdot010 \sin(127\cdot9+2x)$$

	Coëfficienten				
	p	p_1	q_1	p_2	q_2
Nagoya 15 *m* . .	26·05	—2·78	—1·98	+0·65	—0·075
Kurosawa 834 . .	20·26	—4·42	—2·60	+1·19	—0·200
Differenz 819 . .	5·79	+1·64	+0·62	—0·54	+0·125

Täglicher Gang der Temperatur-Differenz:

$$5\cdot79+1\cdot753 \sin(69^\circ3+x)+0\cdot554 \sin(283^\circ0+2x)$$

Täglicher Gang der Wärmeabnahme pro 100 *m*:

$$0\cdot709+0\cdot215 \sin(69^\circ3+x)+0\cdot068 \sin(283^\circ0+2x)$$

Derselbe zwischen Nagoya—Ontake:

$$0\cdot574+0\cdot044 \sin(183^\circ9+x)+0\cdot012 \sin(268^\circ3+2x)$$

Die mittlere Wärmeabnahme pro 100 *m* zwischen dem Gipfel des Ontake und Kurosawa ist 0°52, zwischen Kurosawa und Nagoya dagegen viel grösser, 0°71; Nagoya mit dem Ontake verglichen gibt 0°57 pro 100 *m*, d. i. eine verhältnissmässig geringe Wärmeabnahme für den Sommer. Freilich fällt die Beobachtungszeit in die Zeit des Regenmonsuns. Es kann aber auch die mittlere Temperatur auf dem Ontake ein wenig zu hoch gefunden worden sein, doch spricht die grosse mittlere Windgeschwindigkeit gegen die Annahme, dass die Wärmestrahlung des kahlen besonnten Gipfels die Angaben der Thermometer erheblich beeinflusst haben mag.

Der tägliche Gang der Wärmeabnahme zwischen der Thalstation und dem Gipfel des Ontake nimmt gerade den umgekehrten Verlauf wie jener zwischen Kurosawa und dem in der Niederung ausserhalb des Gebirges gelegenen Nagoya. Die nächtliche Abkühlung der Thalstation ist so gross, dass der Wärmeunterschied gegen Nagoya um diese Zeit grösser wird, als er am Nachmittag ist, wo umgekehrt die Thalstation einen Wärmeexcess zeigt. So entsteht das ganz abnorme Verhältniss einer raschen nächtlichen und langsamen nachmittägigen Wärmeabnahme mit der Höhe. Strenger genommen sollte man diesen letzteren Ausdruck im vorliegenden Falle gar nicht anwenden, denn sicherlich handelt es sich hier nur um locale Temperaturunterschiede, und nicht um jene in der zwischenliegenden Luftschichte selbst. Die Luftschichte oberhalb Nagoya in der Seehöhe von Kurosawa hat ganz unzweifelhaft nicht die extreme tägliche Wärmeschwankung, wie wir sie in diesem Niveau an der Erdoberfläche in dem wahrscheinlich ziemlich engen Gebirgsthale finden. Man sollte daher nur von dem täglichen Gange des Wärmeunterschiedes zwischen Nagoya und Kurosawa sprechen und nicht von einer Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen beiden. Da wir später einen ganz analogen Fall zu betrachten haben werden, der das Interesse an dieser Erscheinung sehr erhöht, da er derselben eine grössere Tragweite gibt, so wollen wir bloss als Rechnungsgrösse doch die Zahlen der Wärmeabnahme mit der Höhe zum Vergleiche beibehalten.

Wärmeabnahme pro 100 *m*

Mittn.	2	4	6	8	10	Mittag	2	4	6	8	10
Kurosawa—Ontake (43 Tage):											
·456	·426	·407*	·415	·465	·545	·620	**·655**	·639	·589	·533	·489
Nagoya—Kurosawa (August):											
·844	·891	**·921**	·851	·694	·527	·442*	·487	·589	·699	·764	·799
Nagoya—Ontake (August):											
·559	·544	·541*	·543	·544	·549	·565	·592	·619	**·629**	·616	·587

Wegen der übermässigen localen täglichen Temperaturvariation im Gebirgsthale von Kurosawa haben wohl die Zahlen

für den täglichen Gang der Wärmeänderung mit der Höhe zwischen Nagoya und Ontake eine allgemeinere Bedeutung, als jene für Kurosawa—Ontake, trotz der geringen horizontalen Entfernung dieser letztgenannten Stationen.

In der Wärmeabnahme zwischen der Station in der Ebene am Meeresufer und jener auf dem Gipfel des Ontake ist die tägliche Variation eine sehr geringe; die Amplitude der letzteren ist dagegen sehr gross zwischen der Ebene und dem Gebirgsthale.

II.

Eine zweite Beobachtungsreihe stündlicher Werthe der meteorologischen Elemente auf einem hohen Berggipfel verdanken wir Herrn J. Vallot, der kürzlich zweimonatliche Beobachtungsergebnisse auf dem Gipfel des Montblanc, bei den Grands Mulets und zu Chamonix veröffentlicht hat.[1] Dieselben sollen hier einer kurzen Discussion unterzogen werden, namentlich auch im Vergleiche mit den eben vorher besprochenen correspondirenden Beobachtungen auf dem Ontake und an dessen Fuss zu Kurosawa.

Herr Vallot hat in seiner Publication den täglichen Gang der meteorologischen Elemente an den oben genannten Stationen, der mit Hilfe von öfter controlirten Registrirapparaten von Richard erhalten worden ist, bloss in Form von Curven mitgetheilt; die Zahlenwerthe selbst sollen im Jahrgang 1892 des »Annales du bureau central Mét. de France« zur Veröffentlichung gelangen, der eben erst zum Drucke kommt. Ich habe einstweilen den von Herrn Vallot veröffentlichten Diagrammen des täglichen Ganges die nummerischen Werthe der meteorologischen Elemente entnommen, was, wie Controlversuche ergeben haben, mit hinlänglicher Genauigkeit geschehen konnte. Herr J. Vallot hat den Aufzeichnungen der Richard'schen Autographen die nummerischen Werthe nur für dreistündige Intervalle entnommen, wahrscheinlich desshalb, weil er die Zeitscala sehr klein nehmen musste, um an den oberen, schwer zugänglichen Punkten die Autographen längere Zeit sich selbst

[1] Annales de l'Observ. Mét. du Montblanc, Paris, G. Steinheil, 1893.

überlassen zu können. Dagegen verdoppelte sein Barograph die Änderungen des Luftdruckes gegenüber den Angaben eines Quecksilberbarometers.

Es braucht hier nur bemerkt zu werden, dass die nachstehend mitgetheilten Beobachtungsergebnisse das vollste Vertrauen verdienen, was mir auch Herr Angot, der sich speciell mit diesen Registrirungen und ihrer Reduction beschäftigte, bestätigt hat. In Bezug auf nähere Information darüber, wie die Registrirungen erhalten worden sind, und in welcher Weise für die Richtigkeit der Aufzeichnungen gesorgt wurde, und die nöthigen Reductionen ermöglicht worden sind, müssen wir auf die leicht zugängliche Publication des Herrn J. Vallot verweisen, dem die Wissenschaft für seine mit grossen Kosten und ausserordentlichen Strapazen verbundenen Bemühungen zu grossem Danke verpflichtet ist.

Die Registrirungen des Luftdruckes auf dem Montblanc-Gipfel, circa 3 *m* unterhalb desselben in 4807 *m* Seehöhe umfassen 54 Tage, vom 17. Juli bis 9. September 1877, jene der Temperatur nur 28 Tage, vom 18. Juli bis 14. August. An die Reduction der Barographenzeichnungen (Richard, grosses Modell) wurden die Temperaturcorrectionen angebracht.

Bei den Grands Mulets (3010 *m*) zeichnete der Barograph 55 Tage, der Thermograph 47 und der Hygrograph 53 Tage (beginnend mit dem 16. Juli 1887, mit Unterbrechungen, die ergänzt werden konnten). Da an die Angaben des Barographen keine Temperaturcorrection angebracht worden ist, wurden dieselben hier nicht verwendet.

Zu Chamonix (1035 *m*) registrirten Barograph, Thermograph und Hygrograph ununterbrochen vom 11. Juli bis 11. September. Thermograph und Hygrograph befanden sich in einer Jalousiehütte im Garten des Hôtel Montblanc, die Hütte wurde noch besonders durch Schirme aus Segeltuch gegen die Sonnenstrahlung geschützt. Dieselbe Vorsicht wurde auch nach Möglichkeit bei den Thermometeraufstellungen auf dem Montblanc-Gipfel und bei den Grands Mulets beobachtet.

Ausserdem werden von Herrn Vallot die Ergebnisse der correspondirenden Aufzeichnungen und Registrirungen der

meteorologischen Elemente zu Genf, Observatorium (Seehöhe 407 *m*) und auf dem grossen St. Bernhard (Seehöhe 2476 *m*) ebenfalls in Form von Diagrammen zum Vergleiche mitgetheilt.

Wie weit die von Herrn Vallot in Form von Diagrammen mitgetheilten Beobachtungsergebnisse wirklich correspondirend sind, ist aus der Publication nicht zu ersehen. Einen Einfluss auf die nachstehenden Erörterungen dürften etwaige Abweichungen von einer absoluten Gleichzeitigkeit der verglichenen täglichen Perioden der meteorologischen Elemente nicht haben.

In den nachfolgenden zwei Tabellen (siehe S. 70 und 71) habe ich die höchst interessanten Ergebnisse der durch Herrn Vallot's Bemühungen zu Stande gekommenen correspondirenden Beobachtungsreihen in einem verticalen Höhenintervall von fast $4\frac{1}{2}$ *km*, übersichtlich zusammengestellt. Die Ergebnisse ähnlicher Aufzeichnungen in den folgenden Jahren 1890, 1891 und 1892 beim Observatorium Vallot 4365 *m*, bei den Grands Mulets und zu Chamonix sind noch nicht veröffentlicht worden.

Ich will zuerst den täglichen Gang der Luftfeuchtigkeit besprechen, weil am wenigsten darüber zu bemerken ist. Die relative Feuchtigkeit hat bei den Grands Mulets (3010 *m*) ihr Minimum um 10^h Vormittag und ihr Maximum um 6^h Abends. Der Gang ist also ein anderer wie auf dem Ontake in gleicher Seehöhe, wahrscheinlich weil wir es hier nicht mit einer Gipfelstation zu thun haben, sondern mit einem vergletscherten Bergabhang. Der Gegensatz zwischen der Trockenheit der ersten Morgenstunden bei den Grands Mulets und der gleichzeitigen fast völligen Sättigung der Luft mit Wasserdampf im Thale unten tritt auch hier auffallend genug zu Tage. Die tägliche Variation der relativen Feuchtigkeit ist zu Chamonix viel grösser als bei den Grands Mulets.

Der Gang der absoluten Feuchtigkeit bei den Grands Mulets ist jenem auf dem Ontake (in gleicher Seehöhe und gleicher Jahreszeit) sehr ähnlich, aber der Eintritt der Extreme erfolgt um einige Stunden später bei den Grands Mulets.

Täglicher Gang des Luftdruckes und der Temperatur (1887).

	Luftdruck 2 Monate		Temperatur 1 Monat Juli/August				
	Genf 407 *m*	Mont-blanc 4807 *m*	Genf 407 *m*	Cha-monix 1035 *m*	St. Bern-hard 2470 *m*	Grands Mulets 3010 *m*	Mont-blanc 4807 *m*
	Mittel:						
	727·34	423·85	21·0	16·8	8·6	5·8	—6·5
	Abweichungen vom Mittel						
Mitternacht	·22	·00	—3·1	—4·6	—1·3	—1·2	—1·1
1	·17	—·15	—3·8	—5·1	—1·4	—1·4	—1·2
2	·13	—·25	—4·4	—5·6	—1·5	—1·6	—1·3
3	·06	—·35	—5·1	—5·9	—1·6	—1·7	—1·4
4	·01	—·44	—5·4	—6·2	—1·8	—1·9	—1·5
5	·08	—·49	—5·2	—6·8	—1·7	—1·8	—1·3
6	·26	—·53	—4·1	—5·0	—1·5	—1 5	—1·1
7	·36	—·52	—2·5	—3·0	—1·0	—0·9	—0·7
8	·46	—·39	—1·0	—0·6	—0·3	—0·1	—0·2
9	·54	—·24	0·8	2·4	0·7	0·7	0·4
10	·56	—·06	2·2	5·1	1·6	1·4	1·0
11	·43	09	3·3	6·3	2·1	2·2	1·5
Mittag	·06	·22	4·2	7·2	2·5	2·8	1·8
1	—·26	·33	4·7	7·4*	2·6*	3·0*	2·0*
2	—·46	·38	5 0	7·1	2·4	2·8	2·0*
3	—·60	·39	5·2*	6·4	2·1	2·2	1·8
4	—·65	·38	4·9	5·2	1·5	1 5	1·5
5	—·64	·33	4·0	3·9	0·9	0·9	1·1
6	—·55	·26	2·9	2·0	0 1	0·2	0·5
7	—·43	·20	1·8	0·2	—0·3	—0·5	0·0
8	—·24	·19	0·2	—1·2	—0·8	—0·8	—0·5
9	—·03	·22	—0·8	—2·6	—1·0	—1·0	—0·8
10	·18	·23	—1·6	—3·6	—1·1	—1·1	—1·0
11	·24	·15	—2·3	—4·0	—1·2	—1·1	—1·0
Mittel	·317	·283	3·27	4·44	1·29	1·43	1·11

Täglicher Gang der Temperatur und Feuchtigkeit 2 Monate (1887).

	Temperatur			Dampfdruck *mm*			Relative Feuchtigkeit %		
	Genf 407 *m*	Chamonix 1035 *m*	Grands Mulets 3010 *m*	Genf 407 *m*	Chamonix 1035 *m*	Grands Mulets 3010 *m*	Genf 407 *m*	Chamonix 1035 *m*	Grands Mulets 3010 *m*
Mittn.	16·0	11·3	3·3	11 2	9·6	4·1	84	92	71
1	15·5	10·9	3·2						
2	15·0	10·4	3·1	10·9	9·3	4·0	87	93	70
3	14·3	10·0	3·0						
4	14·1	9·8	3·0	10·6	8·8	3·9	88	96	68
5	14·4	9·9	3·1						
6	15·0	10·2	3·2	11·0	9·3	3·8	86	93	65
7	16·0	11·5	3·4						
8	17·9	14·0	4·0	11·8	9·9	3·7	78	83	60
9	19·3	16·7	4·9						
10	20·8	19·3	5·6	12·5	10·5	4·0	70	64	59
11	22·0	21·0	6·3						
Mittag	23·0	22·0	6·9	12·8	10·7	4·6	63	56	61
1	23·4	22·2	7·2						
2	23·7	22·1	7·3	12·6	10 4	5·0	58	54	66
3	23·7	21·7	7·1						
4	23·3	20·6	6 7	12·3	9·8	5·4	58	57	73
5	22·3	18·9	6·0						
6	21·1	17·0	5·1	12·3	10·5	5·1	65	71	77
7	20·0	15·7	4·3						
8	19·0	14·3	4·0	12·2	10·6	4·6	74	85	76
9	18·0	13·0	3·7						
10	17·2	12·4	3·4	11·7	10·0	4·1	80	93	74
11	16·6	11·8	3·3						
Mittel	18·8	15·3	4·6	11 8	9·9	4·4	74	78	68

Die Gleichungen des täglichen Ganges der Luftfeuchtigkeit bei den Grand Mulets und zu Chamonix sind:

Relative Feuchtigkeit

Grands Mulets... $7 \cdot 98 \sin (138 \cdot 2+x)+2 \cdot 60 \sin (296 \cdot 5+2x)$

Chamonix........ $21 \cdot 60 \sin (\ 62 \cdot 9+x)+5 \cdot 45 \sin (228 \cdot 4+2x)$

Dampfdruck

Grands Mulets... $0 \cdot 71 \sin (201 \cdot 5+x)+0 \cdot 29 \sin (344 \cdot 1+2x)$

Chamonix....... $0 \cdot 66 \sin (221 \cdot 6+x)+0 \cdot 43 \sin (153 \cdot 2+2x)$

Der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit zu Chamonix stimmt in den Amplituden und Phasenzeiten völlig überein mit jenem zu Kurosawa, ist also charakteristisch für Thalstationen und den Sommer. Desgleichen ist auch der Gang des Dampfdruckes fast völlig übereinstimmend, weist aber eine kleinere Amplitude auf.

Die Abnahme des absoluten Wasserdampfgehaltes der Luft erfolgt nach der früher erwähnten Formel, wie folgende mittelst derselben erhaltene Rechnungsergebnisse zeigen:

Dampfdruck bei den Grands Mulets berechnet nach jenem zu Genf 4·7, nach jenem zu Chamonix 4·8, beobachtet 4·4 *mm*.

Für den Montblanc-Gipfel erhält man als Dampfdruck (Mitte Juli bis 10. September) aus den Beobachtungen zu Genf 2·5, zu Chamonix 2·6, bei dem Grands Mulets 2·3, Mittel 2·5 *mm*.

Der tägliche Gang der Lufttemperatur zeigt zwischen Chamonix und Genf genau dieselben Unterschiede, wie wir sie zwischen Kurosawa und Nagoya vorhin gefunden haben. In dem engen Gebirgsthale von Chamonix ist die tägliche Amplitude der Temperaturvariation viel grösser als zu Genf, und das Maximum liegt viel näher dem Mittage, ganz wie zu Kurosawa. In ähnlicher Weise hat die Station Kolm Saigurn das Temperaturmaximum dem Mittage sehr nahe, und das gleiche zeigen die Stationen in den Hochthälern der Rocky Mountains, von denen ich seinerzeit stündliche Temperatur- und Luftdruck-

aufzeichnungen discutirt habe.[1] Folgende kleine Tabelle zeigt diese Übereinstimmung des Temperaturganges in den Thälern und deren Verschiedenheit von jenem ausserhalb des Gebirges.

Täglicher Wärmegang. Abweichungen vom Mittel.

Ort	Höhe in *hm*	Zeit: 9h	10h	11h	Mittag	1h	2h	3h	4h
Kurosawa	8·3	1·1	3·2	4·3	5·5	5·7*	5·6	5·1	4·7
Chamonix	10·3	2·4	5·1	6·3	7·2	7·4*	7·1	6·4	5·2
Kolm Saigurn	16·0	1·5	2·1	2·6	2·9	3·1*	3·0	2·6	2·2
Rocky Mountains	20·2	3·7	6·3	7·4	8·0	8·0*	7·8	7·3	6·4
Nagoya	0·1	0·7	1·7	2·5	3·1	3·6	3·7*	3·6	3·3
Genf	4·0	0·8	2·2	3·3	4·2	4·7	5·0	5·2*	4·9

An den letzteren Stationen ist um 4h Nachmittag die Temperatur noch nahe dem Maximum und höher als um Mittag; an den ersteren Stationen in tieferen Gebirgsthälern ist die Mittagstemperatur höher als jene um 4h Nachmittag.

Ich möchte hier nur auf diese bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit des täglichen Ganges hinweisen, wie sie die hier verglichenen Stationen zeigen, um dadurch vielleicht Anregung zu speciellerer Prüfung über die Tragweite derselben zu geben. Zeigt sich, dass die Verfrühung im Eintritt des Temperaturmaximums in Gebirgsthälern eine allgemeine Erscheinung ist, dann erst wird es an der Zeit sein, über die Ursachen derselben (ob es in der absoluten Höhenlage oder Beschränkung des Horizontes, Eingeschlossenheit, begründet) nachzuforschen. Nichts ist für den Fortschritt der Wissenschaft bedenklicher, als für jede neue auffallende Naturerscheinung auch gleich mit einer supponirten Erklärung bei der Hand zu sein.

Die Constanten der Sinusreihen für den täglichen Wärmegang sind:

---

[1] Über den täglichen Gang des Luftdruckes, der Temperatur, der Feuchtigkeit, Bewölkung und Windstärke in den Rocky Mountains. Diese Sitzungsberichte, Bd. LXXXIII, Märzheft 1881.

Täglicher Wärmegang.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
	Erster Monat							
Genf.......	—3·88	—3·31	+0 57	+0·01	229 5	89·5	5·10	0·57
Chamonix ..	—6·09	—3·03	+1·40	+0·15	243·6	83·9	6·80	1·41
St. Bernhard.	—1·90	—0·78	+0·63	+0·18	247·7	74·1	2·05	0·65
Gr. Mulets ..	—2·00	—0·82	+0·72	+0·21	247·7	73·7	2·16	0·75
Montblanc .	—1·52	—0·76	+0 32	+0·20	243·4	58·0	1·70	0·38
	Zwei Monate							
Genf.......	—3·21	—2·93	+0·71	+0·22	227·6	72·8	4·35	0·74
Chamonix ..	—5·03	—3·13	+1·45	+0·46	238·1	72·4	5·92	1·52
Gr. Mulets ..	—1·92	—1·02	+0·46	+0·44	242·0	46·3	2·17	0·64

Die hochgelegenen Stationen Grands Mulets, St. Bernhard und Montblanc-Gipfel zeigen sämmtlich die Eigenthümlichkeit, dass das Wärmemaximum dem Mittage recht nahe liegt.

Da meine Daten erst wieder aus den Diagrammen des Herrn J. Vallot zurück abgeleitet worden sind, und möglicher Weise dadurch kleine Abweichungen gegenüber den unmittelbar beobachteten Temperaturen entstanden sein könnten, so schadet es nicht, diesbezüglich einen Vergleich anzustellen. Durch die Güte des Herrn A. Angot, der mir die unmittelbar den Thermographenzeichnungen auf dem Montblanc-Gipfel entnommenen Temperaturmittel für die 28 Tage, vom 18. Juli bis 14. August (1887), mitgetheilt hat, bin ich in der Lage, diesen Vergleich wenigstens für eine Station vornehmen zu können.

Temperatur auf dem Montblanc-Gipfel.

	1^h	4^h	7^h	10^h a.	1^h	4^h	7^h	10^h p.	Mittel
Beobachtung .	—7·7	—8·1	—7·2	—5·5	—4·3	—4·8	—6·3	—7·5	—6·44
Diagramm[1] ..	—7·7	—8·0	—7·2	—5·5	—4·5	—5·0	—6·5	—7·5	—6·48

[1] Aus dem Diagramm des Herrn J. Vallot entnommene Temperaturen.

Man sieht, die Unterschiede sind ganz unbedeutend. Noch weniger einflussreich werden sie aber bei den tieferen Stationen mit grösseren Temperaturamplituden sein.

Die Gleichung des täglichen Wärmeganges nach den dreistündigen, den Registrirungen entnommenen Temperaturen ist:

$$-6\cdot44+1\cdot83 \sin(241\cdot1+x)+0\cdot40 \sin(57^\circ1+2x)$$

Aus diesen Gleichungen des täglichen Wärmeganges erhalten wir auch unmittelbar jene für den täglichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe. Der grösste directe Höhenunterschied, für welche dieselbe je berechnet werden konnte, ist nun der zwischen Genf und dem Montblanc-Gipfel, fast 4½ *km*. Die Rechnung steht so:[1]

	p	p_1	q_1	p_2	q_2
Genf 407 *m*.......	21·04	—3·88	—3·31	+0·57	+0·005
Montblanc 4807 *m*..—	6·44	—1·78	—0·44	+0·40	+0·02
Differenz 4400 *m*...	27·48	—2·10	—2·87	+0·17	—0·015

Daraus folgt als täglicher Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe pro 100 *m* zwischen Genf und dem Montblanc-Gipfel (für Ende Juli):

$$0^\circ624+0^\circ081 \sin(216^\circ2+x)+0^\circ004 \sin(95^\circ1+2x).$$

Diese tägliche Periode hat also eine ziemlich kleine Amplitude. Die nach dieser Formel für zweistündliche Intervalle berechneten Werthe finden sich später mit anderen ähnlichen zusammengestellt.

Für die Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen Chamonix und Montblanc findet man auf gleiche Weise folgende Gleichung:

Chamonix 1035 *m* — Montblanc 4807 *m*

$$0^\circ616+0^\circ133 \sin(239^\circ0+x)+0^\circ027 \sin(82^\circ6+2x).$$

Hier hat der tägliche Gang schon eine viel grössere Amplitude in Folge der grossen täglichen Wärmeschwankung im Thale von Chamonix.

---

[1] Die Bedeutung der Constanten p, p_1, q_1, p_2, q_2 ergibt sich aus der bekannten Form der harmonischen Reihe

$$p+p_1 \cos x+q_1 \sin x+p_2 \cos 2x+q_2 \sin 2x.$$

Ich habe mittelst der auf S. 74 mitgetheilten Constanten des täglichen Wärmeganges noch folgende Gleichungen für den täglichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe abgeleitet:

Grands Mulets (3010)—Montblanc (4807)

$$0\cdot684+0\cdot027 \sin(262\cdot9+x)+0\cdot022 \sin(88\cdot6+2x)$$

St. Bernhard (2476)—Montblanc (4807)

$$0\cdot647+0\cdot016 \sin(267\cdot0+x)+0\cdot013 \sin(113\cdot7+2x)$$

Chamonix (1035)—Grands Mulets (3010)

$$0\cdot554+0\cdot235 \sin(241\cdot6+x)+0\cdot036 \sin(94\cdot8+2x)$$

Genf (407)—Chamonix (1035)

$$0\cdot564+0\cdot292 \sin(83\cdot7+x)+0\cdot124 \sin(252\cdot0+2x)$$

Die letztere Gleichung ist aus den correspondirenden Aufzeichnungen von zwei Monaten (11. Juli bis 11. September) abgeleitet, alle übrigen aus Aufzeichnungen von einem Monate.

Die tägliche Variation der Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen hochgelegenen Punkten (mit Ausschluss von Thalstationen) hat eine sehr geringe Amplitude, wie die ersteren beiden Gleichungen zeigen. Die Wärmeabnahme zwischen Genf und Chamonix hat genau den gleichen Charakter wie jene zwischen Nagoya und Kurosawa, das Maximum tritt in der Nacht ein, das Minimum am Nachmittage.

Ich habe schon oben bemerkt, dass ich diesem Resultate keine reelle Bedeutung zugestehen mag, weil dasselbe keineswegs sich wirklich auf die Luftschichte zwischen Genf und Chamonix bezieht. Die excessive Erwärmung am Nachmittage und Erkaltung bei Nacht bleibt sicherlich auf die der Thalsohle von Chamonix aufliegenden Luftschichten beschränkt. Mit der üblichen abgekürzten Bezeichnung können wir sagen, dass diese Zahlen die »klimatische« Wärmeabnahme zwischen Genf und Chamonix ausdrücken. Die Übereinstimmung mit den für Nagoya—Kurosawa erhaltenen Zahlen zeigt aber, dass wir es hier mit einer Erscheinung von allgemeinerer Bedeutung zu thun haben:

Täglicher Gang der Wärmeabnahme.

	a_0	a_1	A_1	a_2	A_2
Nagoya—Kurosawa	0·709	0·215	69·3	0·068	283·0
Genf—Chamonix	0·564	0·292	83·7	0·124	252·0

Aus den vorhergehenden Gleichungen habe ich die folgenden Zahlenwerthe berechnet:

Täglicher Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe (pro 100 *m*).

	Genf — Montblanc 4400 *m*	Chamonix — Montblanc 3772 *m*	Grands Mulets — Montblanc 1800 *m*	St. Bernhard — Montblanc 2330 *m*	Chamonix — Grands Mulets 1975 *m*	Genf — Chamonix 628 *m*
	1 Monat					2 Monate
Mittern.	·580	·528	·679	·644	·383	·736
2	·551	·499	·671	·638	·335	·739
4	·542*	·489*	·657*	·631*	·333*	·763
6	·555	·521	·659	·633	·406	·714
8	·590	·577	·682	·647	·604	·539
10	·635	·691	·716	·668	·698	·303
Mittag	·676	·756	**·733**	**·677**	·797	·156*
2	·699	**·765**	.721	·667	**·805**	·205
4	**·702**	·723	·689	·649	·733	·417
6	·685	·659	·665	·635	·630	·650
8	·656	·623	·662	·634	·472	·773
10	·617	·561	·674	·641	·452	**·778**
Mittel	·624	·616	·684	·647	·554	·564

Die aus den Temperaturregistrirungen des Herrn Vallot auf dem Gipfel des Montblanc folgende tägliche Wärmeschwankung dürfte jedenfalls etwas zu gross sein in Folge der Unmöglichkeit, das registrirende Thermometer genügend gegen die Insolation und die Wärmereflexion des Schnees zu schützen. Das geht wohl schon aus einer Vergleichung mit dem täglichen Wärmegange auf dem Obirgipfel und Sonnblickgipfel in viel geringerer Seehöhe hervor.

Täglicher Wärmegang im Sommer.

Obirgipfel 2140 *m* ...... $1\cdot65\sin(238\cdot1+x)+0\cdot25\sin(24\cdot3+2x)$
Sonnblickgipfel 3100 *m*.. $1\cdot04\sin(224\cdot0+x)+0\cdot12\sin(16\cdot9+2x)$
Montblanc-Gipfel 4807 *m*. $1\cdot70\sin(243\cdot4+x)+0\cdot38\sin(58\cdot0+2x)$

Man darf wohl annehmen, dass die wahre Amplitude der täglichen Temperaturvariation auf dem Montblanc-Gipfel nur halb so gross (oder noch kleiner) ist, als man sie hier angegeben findet.

Herr Nilson Ekholm hat während seines Aufenthaltes auf Spitzbergen bei Cap Thordsen 1882/1883 sehr interessante und instructive Untersuchungen gemacht über den Einfluss der directen Insolation und der Wärmereflexion des Schnees auf die Thermometer in einer dieselben möglichst gegen Wärmestrahlung schützenden Hütte mit doppelten Jalousiewänden. In den Monaten April und Mai zeigten dieselben trotzdem öfter eine bis zu 4° höhere Temperatur als ein Schleuderthermometer.

Stündliche Vergleichsbeobachtungen vom 5.—25. Mai ergaben, dass nach dem Schleuderthermometer das Maximum der Lufttemperatur erst gegen $1\frac{1}{2}^{h}$ p. eintrat, in der Hütte dagegen schon vor Mittag. Die tägliche Temperaturamplitude in der Hütte war 3°4, das Schleuderthermometer ergab dieselbe für die Luft ausserhalb bloss zu 2°9. Und auch diese Amplitude ist wohl noch etwas zu gross. Die mittlere Temperatur in der Hütte war um etwas mehr als einen halben Grad zu hoch.

Für die Zeit vom 18. Juli bis 14. August 1887 ergaben die Beobachtungen auf dem Sonnblickgipfel eine mittlere Temperatur von +3·0, d. i. eine Abweichung vom (30-jährigen) Mittel

von +1·5. Darf man annehmen, dass dieselbe auch für den Montblanc Giltigkeit hatte, so erhält man als normale Temperatur desselben für diese Periode —8°0. Die Beobachtungen auf dem Theodulpass (3330 *m*) stimmen damit sehr gut überein.

Als wahrscheinliches Jahresmittel der Wärme auf dem Montblanc-Gipfel möchte ich die auf verschiedenen Wegen ziemlich übereinstimmend gefundene Temperatur von —14°0 annehmen (für den Jänner —20° rund). Die von Herrn Vallot im Innern des Eistunnels auf dem Gipfel gefundene Mitteltemperatur von —16°5 ist wohl, wofür er ja selbst triftige Gründe angibt, erheblich niedriger als die äussere Lufttemperatur auf dem Gipfel.

Die Luftdruckbeobachtungen des Herrn Vallot auf dem Montblanc-Gipfel haben wohl den grössten Werth, weil die grösste Tragweite. Durch Berechnung der Seehöhe des Montblanc-Gipfels auf Grund derselben hat Herr A. Angot schon gezeigt, dass sie dieselbe zu 4810·5 *m* ergeben (Mittel nach Säntis und Puy de Dôme) in bester Übereinstimmung mit der trigonometrischen Messung.[1] Am interessantesten ist aber die Constatirung des täglichen Ganges des Luftdruckes auf einem Gipfel von nahe 5 *km* Seehöhe. Nach den Ergebnissen der Registrirungen auf dem Sonnblickgipfel hätte man geneigt sein können, anzunehmen, dass in einer 1700 *m* grösseren Seehöhe der tägliche Gang des Barometers nur mehr ein Minimum am frühen Morgen und ein Maximum am Abend haben möchte. Die früheren vorläufigen Mittheilungen über die Ergebnisse der Beobachtungen des Herrn Vallot lauteten auch in der That so. Herr Rotch, der mit Herrn Vallot auf dem Montblanc war und in die Ergebnisse der Registrirungen auf demselben Einsicht hatte, sagte noch kürzlich, dass auf dem Gipfel des Montblanc der Luftdruck bloss ein Maximum um 1^h p. und ein einziges Minimum um 4^h Morgens habe mit einer blossen Tendenz zu einem zweiten Minimum am späten Nachmittag.[2]

---

[1] Comptes rendus, tome CXVII, p. 786, 4. dec. 1893.

[2] The highest Met. Station in the world. American Met. Journal, October 1893.

Die jetzt veröffentlichten Ergebnisse der Aneroïdregistrirungen auf dem Montblanc-Gipfel zeigen aber in der That noch ein ganz ausgesprochenes zweites Minimum am späten Nachmittage. Ich lasse zunächst die mir von Herrn A. Angot freundlichst mitgetheilten Ergebnisse der Reductionen der Aufzeichnungen vom 18. Juli bis 14. August hier folgen.

Luftdruckmittel Montblanc 4807 *m*.

1^h a.	4^h	7^h	10^h	1^h p.	4^h	7^h	10^h p.	Mittel
426·42	26·22	26·12	26·59	27·02	27·07	26 73	26·78	426·62

Diesen Luftdruckmitteln entspricht die Gleichung:

$$426\cdot62+0\cdot429 \sin(203^\circ5+x)+0\cdot151 \sin(67\cdot6+2x)$$

Nach dem von Herrn J. Vallot nach den Mitteln für die Zeit vom 18. Juli bis 9. September gezeichneten Diagramme des täglichen Ganges verspätete sich das »Vormittagsmaximum« des Luftdruckes auf dem Montblanc bis 3^h Nachmittags, das Nachmittagsminimum tritt um $7^1/_2{}^h$ Abends ein (das Barometer sinkt doch noch um 0·19 *mm*), das Abendmaximum fällt ganz normal auf $9^1/_2{}^h$ Abends (+0·23), das Hauptminimum am Morgen tritt um 6^h früh ein (—0·53). Die folgende Zusammenstellung des täglichen Barometerganges auf dem Schafberg, Obir, Säntis, Sonnblick und Montblanc zeigt recht deutlich die continuirliche Verspätung des »Vormittagsmaximums« mit zunehmender Seehöhe, womit die Verspätung des Nachmittagsminimums gleichen Schritt hält. Auch die zunehmende Vertiefung des Morgenminimums tritt sehr charakteristisch hervor.

Täglicher Gang des Barometers im Sommer auf hohen Alpengipfeln.

Zeit	Schafberg 1780 *m*	Obir 2040 *m*	Säntis 2500 *m*	Sonnblick 3100 *m*	Montblanc 4810 *m*
Mitternacht	·17	·20	·16	·18	·00
1	·03	·07	—·03	·00	—·15
2	—·13	—·09	—·18	—·15	—·25
3	—·28	—·25	—·30	—·32	—·35
4	—·35*	—·36	—·41	—·45	—·44
5	—·33	—·38*	—·44*	—·50*	—·49
6	—·29	—·33	—·39	—·45	—·53*
7	—·13	—·23	—·30	—·37	—·52
8	—·03	—·11	—·20	—·27	—·39
9	·06	·02	—·11	—·17	—·24
10	·14	·13	·00	—·04	—·06
11	**·19**	·22	·11	·08	·09
Mittag	·17	**·24**	·15	·16	·22
1	·13	·21	**·17**	·19	·33
2	·07	·13	·15	**·21**	·38
3	·03	·06	·14	**·22**	**·39**
4	—·04	—·02	·11	·19	·38
5	—·09*	—·08	·07*	·14	·33
6	—·08	—·12*	·08	·12*	·26
7	—·02	—·09	·13	·14	·20
8	·08	·04	·21	·19	·19*
9	·21	·21	·30	·30	·22
10	**·24**	**·28**	**·30**	**·33**	**·23**
11	·24	·27	·25	·29	·15

Die folgende kleine Tabelle enthält in übersichtlicher Zusammenstellung die Gleichungen des täglichen Ganges des Barometers für verschiedene Seehöhen. Diese letzteren sind relativ genommen, indem die mittlere Seehöhe der Basisstationen Genf und Salzburg (407*m* und 430*m*) von den absoluten Höhen abgezogen worden ist. Namentlich für das erste Glied, die einmalige tägliche Barometerschwankung, ist ja fast nur die relative Seehöhe massgebend. Die Zeit ist stets von Mitternacht an gezählt.

Ort	Relative Höhe *hm*	Täglicher Gang des Barometers im Sommer
Genf[1]	0	$0 \cdot 417 \sin(6 \cdot 9 + x) + 0 \cdot 326 \sin(148 \cdot 8 + 2x)$
Salzburg	0	$0 \cdot 388 \sin(26 \cdot 5 + x) + 0 \cdot 276 \sin(137 \cdot 5 + 2x)$
Wendelstein	13·1	$0 \cdot 076 \sin(187 \cdot 8 + x) + 0 \cdot 187 \sin(130 \cdot 8 + 2x)$
Schafberg	13·6	$0 \cdot 123 \sin(195 \cdot 0 + x) + 0 \cdot 214 \sin(127 \cdot 1 + 2x)$
Obir	16·2	$0 \cdot 141 \sin(194 \cdot 3 + x) + 0 \cdot 246 \sin(115 \cdot 2 + 2x)$
Säntis	20·8	$0 \cdot 266 \sin(183 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 178 \sin(122 \cdot 4 + 2x)$
Sonnblick	26·8	$0 \cdot 318 \sin(181 \cdot 7 + x) + 0 \cdot 179 \sin(110 \cdot 3 + 2x)$
Montblanc	43·9	$0 \cdot 425 \sin(194 \cdot 3 + x) + 0 \cdot 130 \sin(82 \cdot 9 + 2x)$

Von der absoluten Seehöhe der Gipfelstationen in Hectometern ist gleichmässig 4·2 abgezogen worden, um die »beiläufige« relative Höhe einigermassen anzudeuten. Man sieht aus dieser Zusammenstellung die anfängliche Abnahme der Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung und die dann wieder folgende Zunahme derselben mit entg egen gesetzten Phasenzeiten. Die Ursache dieser Erscheinung habe ich in meiner Abhandlung: »Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers« eingehender nachgewiesen.[2]

---

[1] Mitte Juli bis Anfang September 1877 correspondirend mit Montblanc; die übrigen Mittel mehrjährig.

[2] Denkschriften der Wiener Akademie, LIX. Band, Wien 1892. Tempsky.

Die Phasenzeiten der einmaligen täglichen Oscillation auf den hohen Alpengipfeln scheinen von der Seehöhe fast unabhängig zu sein. Der mittlere Werth der Winkelconstante ist 191°. Das Maximum fällt demnach auf $6^3/_4{}^h$ Abends, das Minimum auf $6^3/_4{}^h$ Morgens. Das Maximum des Luftdruckes tritt demnach viel später ein, als das der Temperatur. Für diese liegt die Winkelconstante bei 240°, das Maximum wie das Minimum tritt demnach mindestens drei Stunden früher ein.

Die Amplitude der doppelten täglichen Oscillation nimmt ziemlich regelmässig im Verhältniss mit dem Luftdrucke mit der Höhe ab, aber auch die Winkelconstante wird mit der Höhe kleiner, was eine Verspätung der Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation mit der Höhe bedeutet, auf deren Ursache ich in meiner citirten Abhandlung gleichfalls hingewiesen habe.

Den allmäligen Übergang der Amplituden und der Phasenzeiten der einmaligen täglichen Barometerschwankung von der Erdoberfläche bis zu jener relativen Höhe, in welcher die Phasenzeit in die entgegengesetzte umschlägt, vermag man aus den oben und ebenso aus den von mir früher mitgetheilten Beobachtungen nicht ersehen, weil die Zwischenstationen bisher fehlten. Es ist das Verdienst der königlich baierischen meteorologischen Centralstation in München, solche Zwischenstationen mit registrirenden Barometern versehen zu haben.

In dem Jahrgang 1892 der »Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Baiern« finden sich mit Juni beginnend die Ergebnisse zweistündlicher Reductionen dieser Aufzeichnungen bereits mitgetheilt.[1] Ich habe Mittel für die drei Sommermonate Juni, Juli, August gebildet und die correspondirenden Mittel für Obir, Säntis und Sonnblick zum Vergleiche beigegeben. So erhält man ein höchst lehrreiches Bild der allmäligen Modification des täglichen Barometerganges mit zunehmender Seehöhe, wie man ein solches bisher noch nie besessen hat. Die Station Hirschberg ist wohl keine eigentliche Gipfelstation, sondern nimmt eine Mittelstellung ein zwischen

[1] F. Erk, Die Resultate der Barometerregistrirung in München und Wendelstein, sowie in Hirschberg und Hohenpeissenberg im Jahre 1892. S. 147 und 148.

einer Gehängstation und einer Gipfelstation. Der etwas auffallende tägliche Gang des Barometers an derselben stimmt vollständig überein mit jenem zu Kolm Saigurn, einer Thalstation (mehr Gehängstation) in 1600 *m* absoluter Seehöhe; die relative Seehöhe aber stimmt wohl sehr nahe mit jener der Station Hirschberg überein. Diese beiden Stationen repräsentiren einen ganz aparten Typus des täglichen Barometerganges.

Täglicher Barometergang im Sommer 1892.

	München	Hohen-Peissen-berg	Hirsch-berg[1]	Wendel-stein	Obir	Säntis	Sonn-blick
Breite	48° 9′	47° 48′	47° 40′	47° 42′	46° 30′	47° 15′	47° 3′
Höhe	526·4	993·9	1512·0	1727·22	2044·0	2500·0	3106·5
Luftdruck	716·8	678·4	638·2	622·1	598·4	566·5	525·1
Temperatur	16·7	14·9	11·4	9·7	8·3	4·9	0·6
Mitternacht	·30	·26	·24	·18	—·15	·17	·12
2	·11	·04	—·05	—·10	—·10	—·17	—·17
4	·01	—·16	—·26	—·31	—·29	—·45	—·40
6	·20	—·07	—·15	—·21	—·27	—·38	—·36
8	·36	·12	·01	·00	—·06	—·17	—·20
10	·33	·22	·07	·10	·11	—·01	·05
Mittag	·08	·08	·01	·10	·18	·14	·15
2	—·32	—·17	—·12	—·02	·11	·16	·24
4	—·62	—·31	—·20	—·12	·03	·11	·14
6	—·55	—·31	—·12	—·10	—·08	·08	·04
8	—·13	—·02	·19	·15	·00	·20	·14
10	·19	·28	·37	·30	·20	·31	·24

[1] Täglicher Gang des Barometers zu Kolm Saigurn, 1600 *m*:

Mittn.	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mittg.	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
·27	—·13	—·32	—·24	—·05	·07	·03	—·07	—·11	—·05	·23	·41

Diesen Zahlenwerthen entsprechen folgende Gleichungen:

München ......0·346 sin (15·1 + x) + 0·289 sin (141·8 + 2x)
Peissenberg ....0·117 sin (36·7 + x) + 0·251 sin (133·6 + 2x)
Hirschberg.....0·118 sin (120·1 + x) + 0·225 sin (144·4 + 2x)
Wendelstein....0·095 sin (163·5 + x) + 0·214 sin (138·0 + 2x)
Obir ....0·124 sin (202·1 + x) + 0·179 sin (114·7 + 2x)
Säntis ....0·267 sin (182·6 + x) + 0·181 sin (122·8 + 2x)
Sonnblick ......0·249 sin (192·3 + x) + 0·167 sin (111·5 + 2x)

Die vorstehende Tabelle und die darauf gegründeten Gleichungen des täglichen Ganges zeigen in sehr instructiver Weise den Übergang der Phasenzeiten der einmaligen täglichen Oscillation des Barometers von einem Maximum am Morgen bis zu einem Maximum am Nachmittage auf den hohen Gipfelstationen. Die Winkelconstante geht allmälig aus dem ersten Quadranten in den dritten über. Zugleich nimmt die Amplitude zuerst ab und dann wieder zu (dass Peissenberg eine so kleine Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung hat, ist wohl nur eine Zufälligkeit des Mittels von bloss drei Monaten). Für diese Verhältnisse ist der Natur der Sache nach nur die relative Seehöhe massgebend, d. i. die Mächtigkeit der unterhalb der Station befindlichen Luftschichte. Man darf nach den Ergebnissen der baierischen Stationen wohl annehmen, dass in einer relativen Seehöhe von 1300—1400 *m* die Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung im Sommer nahezu verschwunden ist und die Phasenzeiten darüber hinaus in die entgegengesetzten von jenen am Erdboden übergehen. Das hängt aber natürlich nicht bloss von der Mächtigkeit der unterlagernden Luftschichte, sondern auch von der Grösse der täglichen Temperaturschwankung in derselben ab. Wenn die normale einmalige Barometerschwankung am Erdboden nicht genau die entgegengesetzten Phasenzeiten hat von jenen des Temperaturganges in der überlagernden Luftschichte, so wird die Combination derselben mit der rein »thermischen« Barometerschwankung in 1300—1400 *m* Seehöhe keineswegs die Barometerschwankung daselbst ganz aufheben, sondern es wird eine solche von geringer Amplitude mit zwischenliegenden Phasenzeiten übrigbleiben. Auf solche Verhältnisse scheint die

tägliche Barometerschwankung auf dem Wendelstein hinzudeuten.

Es ist interessant zu bemerken, wie in einer relativen Seehöhe von etwa 1000 *m* das Vormittagsmaximum des Barometers zwar zur normalen Zeit eintritt, aber ausserordentlich abgeschwächt erscheint.

Die vorstehenden Erörterungen gelten selbstverständlich nur für den Sommer oder für die Zeit, wo die »thermische« Druckschwankung in der Höhe am grössten ist. Im Winter reicht die normale einmalige tägliche Barometerschwankung bis zu viel grösseren Höhen hinauf.

Das Nachmittagsminimum und Abendmaximum auf sehr hohen Berggipfeln. Es hat einiges Interesse, sich specieller Rechenschaft darüber zu geben, wie es kommt, dass selbst auf dem Montblanc-Gipfel in nahe 5 *km* Seehöhe das zweite Minimum im täglichen Gange des Barometers noch nicht verschwunden ist, und wesshalb das Abendmaximum des Barometers mit der Höhe zunimmt.

Renou hat die Ansicht ausgesprochen, dass in sehr grosser Höhe der Atmosphäre der tägliche Gang des Barometers bloss ein Maximum um 4^h Nachmittags und ein Minimum um 4^h Morgens haben dürfte.[1] Nach den neueren Ergebnissen der Luftdruckregistrirungen auf den hohen Alpengipfeln scheint es mir zweifelhaft geworden zu sein, ob dies für die Tropengegenden mit ihrer grossen doppelten täglichen Barometerschwankung in der That noch angenommen werden darf. Jedenfalls werden aber diese Extreme nach den neueren Erfahrungen näher bei der Stunde 6^h als 4^h zu finden sein.

Um diesem Problem etwas näher zu treten, habe ich mir zunächst die Frage vorgelegt: wie müsste der Temperaturgang in der 1700 *m* mächtigen Luftschichte zwischen Montblanc- und Sonnblickgipfel beschaffen sein, damit auf ersterem der tägliche Gang des Barometers nur mehr ein Maximum und ein Minimum haben würde?

Zu diesem Zwecke wurde der Gang des Luftdruckes auf dem Sonnblickgipfel (Mittel Juli—August von 4 Jahren) auf die

---

[1] De l'oscillation diurne du baromètre par E. Renou. Comptes rendus de l'Acad. d. Sc. 1878, I. Sem., tome 86.

Höhe des Montblanc-Gipfels reducirt (d. h. die Amplituden im Verhältniss von 426:525 *mm* Luftdruck verkleinert). Man erhält derart

$$0\cdot 241 \sin(182^\circ + x) + 0\cdot 145 \sin(111^\circ + 2x);$$

das wäre die Gleichung des täglichen Ganges des Luftdruckes auf dem Montblanc-Gipfel, wenn es in der Luftschichte zwischen 3100 *m* und 4800 *m* gar keine tägliche Temperaturvariation geben würde. Aus dieser Gleichung ergeben sich folgende Luftdruckabweichungen für zweistündige Intervalle:

	0^h	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
			Vormittag			
Einfache Welle	—·008	—·128	—·213	—·241	—·205	—·113
Doppelte Welle	·136	·022	—·113	—·136	—·022	·113
Summe ..	·128	—·106	—·326	—·377	—·227	·000
			Nachmittag			
Einfache Welle	·008	·128	·213	·241	·205	·113
Doppelte Welle	·136	·022	—·113	—·136	—·022	·113
Summe ..	·144	·150	·100	·105	·183	·226

Man sieht zunächst aus dieser kleinen Tabelle, wie das hohe Maximum der Hochstationen am Abende zustande kommt, d. i. durch die Auflagerung des Maximums der doppelten täglichen Oscillation auf einen Theil des Wellenberges der einmaligen täglichen Schwankung. Da die Amplitude der letzteren mit der Höhe zunimmt, die Phasenzeit sich aber dabei fast gleich bleibt, so wächst die Summe beider Wellen für die Stunde 10^h etwas schneller, als sie beide vermöge der Druckabnahme mit der Höhe kleiner werden; freilich nur bis zu einer gewissen, aber schon sehr grossen Höhe.

Die erste Welle erreicht ihren Scheitelpunkt etwas vor 6^h Abends, gleichzeitig tritt aber bei der doppelten täglichen Oscillation das Wellenthal ein. Die Superposition der entgegengesetzten Phasen der beiden Wellen erzeugt das späte Nachmittagsminimum auf den hohen Berggipfeln.

Sollte dieses Minimum ausbleiben, so müsste mindestens folgende Ungleichheit bestehen, wenn wir mit x die gesuchte Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung bezeichnen, welche diesen Effect zu erzielen im Stande wäre:

$$x - 0\cdot136 > 0\cdot113 + x \sin 30°, \text{ d. i. } > 113 + \frac{x}{2},$$

$$x > 272 + 226, \text{ d. i. } > 498.$$

Wenn also die Amplitude der einmaligen täglichen Schwankung auf dem Montblanc-Gipfel 0·50 *mm* wäre, so würde der Gang des Barometers auf demselben nur mehr ein Maximum und ein Minimum zeigen. Der tägliche Gang des Barometers in 4810 *m* würde dann sein:

Mittn.	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mittag	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
·06	—·24	—·55	—·64	—·45	—·12	·21	·29	·33	·36	·40	·35

Das Abendmaximum würde dann auf 8^h fallen. Wie man leicht findet, würde eine tägliche Wärmeschwankung von 0°76 in der Luftschichte zwischen 3100 *m* und 4800 *m* genügen, um die Amplitude der einmaligen thermischen Druckschwankung auf 0·5 *mm* zu erhöhen und so den obigen Effect hervorzubringen.

Aus dem correspondirenden täglichen Gange des Barometers auf dem Sonnblick- und Montblanc-Gipfel (16. Juli bis 10. September 1887) findet man für den täglichen Wärmegang in der zwischenliegenden Luftschichte von 1700 *m* die Gleichung

$$0°49 \sin(189° + x) + 0°23 \sin(354 + 2x).$$

Die einfache tägliche Wärmewelle hat also nur eine Amplitude von $^1/_2$° statt $^3/_4$° C., wie sie zur Unterdrückung des secundären Abendminimums nöthig wäre.

Wenn man den früher berechneten täglichen Gang des Barometers auf dem Sonnblickgipfel reducirt auf Montblanchöhe graphisch darstellt und dann durch eine Curve aus freier Hand das Abendminimum unterdrückt und der Curve nur ein Abendmaximum gibt, was sich in der That nur auf eine Weise ungezwungen erzielen lässt, so erhält man auf einem anderen Wege die Ordinaten der einmaligen thermischen Welle, welche den täglichen Barometergang auf dem Montblanc-Gipfel zu einer einfachen Welle gestalten würde. Die Amplitude fällt dann etwas grösser aus und das Abendmaximum verlagert

sich auf $5^1/_2{}^h$ p. Die Gleichung dieses Barometerganges wäre:

$$0\cdot599 \sin(191^\circ+x)+0\cdot145^\circ \sin(111^\circ+2x).$$

Die Amplitude der täglichen Wärmeschwankung in der Luftschichte zwischen Montblanc und Sonnblick müsste dann 1°05 sein, d. i. mehr als zweimal so gross als sie aus dem beobachteten Barometergang in 4800 *m* zu erschliessen ist, aber immer noch viel kleiner als die Registrirungen der Lufttemperatur auf dem Montblanc-Gipfel ergeben haben.

Unterdrückt man in der von Herrn Vallot mitgetheilten Curve des täglichen Barometerganges auf dem Montblanc das kleine secundäre Abendminimum durch freie Ergänzung der Curve, die sich auch ganz ungezwungen ergibt, so erhält man ein Maximum um 6^h p. etwa mit der Ordinate $+ 0\cdot50$ und ein Minimum um $6^1/_2{}^h$ Morgens mit $- 0\cdot60$. Diese Curve stellt aber keinen reellen Barometergang mehr vor, weil die doppelte tägliche Oscillation fast völlig aufgehoben erscheint, was ganz unnatürlich wäre.[1] Der vorhin eingeschlagene Weg zur Kenntniss der Bedingungen zu gelangen, unter denen auf dem Montblanc-Gipfel der tägliche Barometergang nur ein Maximum und ein Minimum haben würde, ist desshalb der richtigere.

Die Luftdruckregistrirungen auf dem Montblanc-Gipfel durch Herrn Vallot beweisen abermals, dass die tägliche Temperaturschwankung in den freien höheren Schichten der Atmosphäre viel kleiner ist, als man sie auf Grund der directen Beobachtungen annehmen müsste. Es scheint mir, dass die Luftdruckregistrirungen auf Berggipfeln gerade dadurch ein besonderes Interesse erlangen, dass sie uns gestatten, Schlüsse auf die tägliche Temperaturvariation in den freien atmosphärischen Luftschichten zu ziehen, die auf einem anderen Wege kaum zu erzielen wären. Um die Anwendbarkeit meiner Methode der Berechnung des täglichen Wärmeganges in der freien Atmosphäre aus dem täglichen Gange des Barometers auf Berggipfel zu zeigen, habe ich für einige Höhenschichten

---

[1] Die Gleichung dieser Curve ist:

$$0\cdot543 \sin(205^\circ+x)+0\cdot048 \sin(128°2+2x).$$

den täglichen Wärmegang aus dem Barometergang passend gewählter Gipfelstationen berechnet, wozu mir namentlich als Mittelglieder die bairischen Stationen besonders dienlich waren. Dieselben gestatten die Abnahme der Amplituden der täglichen Temperaturvariation mit der Höhe in der freien Atmosphäre aufs Deutlichste vor Augen zu führen. Ich halte die nachfolgenden Rechnungsergebnisse mehr nur als Proben für die Anwendbarkeit der Methode als für irgend definitive oder absolute Werthe. Um solche zu erhalten, müssten erstlich gleichzeitige Registrirungen verwendet werden, und dann müssten noch manche Fehlerquellen eliminirt werden, die den jetzigen Luftdruckregistrirungen auf Berggipfeln und deren Reductionen noch anhaften und die sich störend erweisen, wo, wie im vorliegenden Falle, äusserste Genauigkeit erforderlich erscheint.[1]

Die Berechnung des Temperaturganges in der verticalen Luftschichte zwischen zwei Stationen verschiedener Seehöhe aus dem bekannten täglichen Gange des Barometers an denselben wurde in folgender Weise geführt.

Z. B. München. Luftdruck 716·8, Temperatur 16·7, Seehöhe 526·4. Hohenpeissenberg. Luftdruck 678·4, Temperatur 14·9, Seehöhe 993·9. $\Delta h = 467·5$; $678·4 : 716·8 = 0·946$; Factor zur Reduction der Druckschwankungen auf Temperaturschwankung in der zwischenliegenden Luftschichte, d. i. der Quotient. $R\,T^2 : b\,\Delta h = 7·44$ (wobei T_0, um der Luftfeuchtigkeit Rechnung zu tragen $= 263°$ oder $\alpha = 0·0038$ und R dementsprechend $= 30·37$ gesetzt wurde; bei Temperaturen unter Null wurde $T = 273$ und $R = 29·3$ gesetzt).

Bezeichnet man ferner, wie schon früher, die Coëfficienten der harmonischen Reihen mit $p_1\, q_1$; $p_2\, q_2$, so steht die Rechnung wie folgt:

---

[1] Wenn Herr Richard seinen registrirenden Aneroiden (grosses Modell) eine Temperaturregistrirung (auf demselben Papierblatte) beigeben würde, was leicht ausführbar wäre und den Preis der Instrumente nur wenig erhöhen dürfte, so würde der tägliche Gang des Luftdruckes mittelst derselben mit viel grösserer Sicherheit abgeleitet werden können.

Täglicher Gang des Barometers (Sommer 1892).

	p_1	q_1	q_2	p_2
A München.......	+0·090	+0·334	+0·179	—0·227
Ar red. auf Peissenb.	+0·085	+0·316	+0·169	—0·215
B Peissenb. (beob.).	+0·070	+0·094	+0·182	—0·173
B—*Ar* (thermische Druckschwankung)	—0·015	—0·222	+0·013	+0·042

Gleichung der thermischen Druckschwankung somit:

$$0\cdot222 \sin (183\cdot9+x)+0\cdot044 \sin (17^\circ2+x).$$

Daraus folgt durch Multiplication der Coëfficienten mit 7·44 als Gleichung der täglichen Temperaturvariation in der Luftschichte zwischen München und Hohenpeissenberg:

$$1\cdot66 \sin (183\cdot9+x) + 0\cdot33 \sin (17\cdot2+2x).$$

In analoger Weise wurden auch die nachfolgenden Gleichungen des täglichen Wärmeganges erhalten. Jene für das Höheninterval Paris—Eiffelthurm ist aus den Beobachtungen im Sommer 1890 abgeleitet worden. Als beiläufige mittlere Seehöhe der Luftschichte, für welche die angegebene tägliche Temperaturvariation gilt, ist die mittlere relative Höhe (über dem Erdboden) derselben eingestellt. Z. B. Peissenberg hat circa 470 *m* relative Höhe, Wendelstein 1200 *m*; die Luftschichte zwischen den Stationen hat demnach circa 840 *m* relative Höhe; München—Peissenberg 240 *m* etc.

Stationspaare	Relative Höhe der Luftschichte	Gleichung des täglichen Wärmeganges in derselben im Sommer
Paris—Eiffelthurm	140 *m*	$2\cdot16 \sin (207^\circ+x)+0\cdot45 \sin (54+2x)$
München—Peissenberg ..	240	$1\cdot66 \sin (184+x)+0\cdot33 \sin (17+2x)$
München—Wendelstein[1] .	630	$1\cdot10 \sin (197+x)+0\cdot18 \sin (13+2x)$
Peissenberg—Hirschberg.	730	$1\cdot06 \sin (166+x)+0\cdot31 \sin (243+2x)$
Peissenberg—Wendelst. .	840	$0\cdot87 \sin (192+x)+0\ 01 \sin (270+2x)$
Schafberg[2]—Sonnblick ..	2000	$0\cdot72 \sin (174+x)+0\cdot12 \sin (18+2x)$
Säntis—Montblanc......	3200	$0\cdot52 \sin (204+x)+0\cdot19 \sin (5+2x)$

[1] München, Salzburg, als untere Station genommen und verglichen mit Wendelstein Schafberg.

[2] Mittel aus Schafberg und Obir.

Ich habe auch versucht, die mittlere Temperaturvariation in der ganzen Luftschichte zwischen dem Montblanc-Gipfel und der Erdoberfläche zu berechnen. Als untere Stationen nahm ich Genf einerseits, Mailand und Turin anderseits.[1] Auf diese Weise erhielt ich folgenden täglichen Temperaturgang in der circa 4400 *m* mächtigen Luftschichte:

$$0°98 \sin(203° + x) + 0·17 \sin(15° + 2x).$$

Das Resultat stimmt sehr gut mit dem partiell berechneten täglichen Wärmegang in den einzelnen Höhenstufen.[2]

Die Amplitude der aus dem täglichen Barometergange auf den Gipfelstationen von verschiedener Seehöhe berechneten täglichen Temperaturvariation nimmt demnach mit der Höhe ziemlich regelmässig ab, wie es sein muss, wenn dem Rechnungsergebnisse eine reelle Bedeutung zugesprochen werden soll.

Die Winkelconstante des ersten massgebenden Gliedes ist im Mittel der ersten drei Stationen 196°, im Mittel der drei letzten 190°, also so gut wie übereinstimmend für alle See-

---

[1] Der tägliche Barometergang im Mittel dieser Stationen ist:

$$0·45 \sin(357° + x) + 0·33 \sin(144°4 + 2x)$$

[2] Das seitliche Ausweichen der Luft bei der thermischen Ausdehnung der Luft in den Thälern kann bewirken, dass auf den umgebenden Berghöhen die Drucksteigerung am Nachmittage nicht mit dem vollen Betrage, d. i. der Temperaturamplitude entsprechend, zur Geltung kommt. Der mögliche Maximaleffect dieser Abstumpfung der täglichen thermischen Druckvariation auf den Berggipfeln lässt sich aber leicht beurtheilen aus der abnormen Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung in den Thälern unten. Nehmen wir z. B. an, dieselbe betrüge zu Chamonix und Courmayeur 1·0 *mm* statt 0·45 *mm* wie draussen im Vorlande der Alpen. Die Differenz 0·55 *mm* kommt auf Rechnung des seitlichen Abfliessens der Luft gegen die geneigten Bergabhänge. Für den Montblanc-Gipfel könnte dies eine Verringerung der thermischen Druckschwankung um 0·32 bewirken und die Amplitude derselben könnte deshalb, wenn der Montblanc auf einer freien Ebene liegen würde, 0·75 statt wie jetzt 0·43 betragen. Hätten wir oben Chamonix und Courmayeur als untere Stationen gewählt, so würden wir die Temperaturamplitude 1·73 statt 0·98 gefunden haben, unter der gegebenen Voraussetzung. Auf die Berechnung der Temperaturamplituden in den Luftschichten zwischen Gipfelstationen hat diese Bemerkung keine Geltung.

höhen.[1] Nehmen wir 195° rund im Mittel, so würde in den freien Luftschichten der Hauptsache nach (im Sommer) das Temperatur-Minimum um 5^h Morgens und das Maximum um 5^h Abends eintreten, was durchaus nicht unwahrscheinlich ist. Die Winkelconstante des zweiten Gliedes liegt, wie bei dem Temperaturgang an der Erdoberfläche, im ersten Quadranten. Man erhält also aus den Unterschieden des täglichen Barometerganges an den Gipfelstationen verschiedener Seehöhe einen täglichen Temperaturgang, welcher grosse Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Theoretisch besteht kein Zweifel darüber, dass so lange man die barometrische Höhenformel anwenden darf, man auch aus den Druckunterschieden in den verschiedenen Niveaux die Temperatur der zwischen liegenden Luftschichte berechnen kann. Da zur Ableitung der Temperaturvariationen in denselben die Kenntniss der Barometercorrectionen und die genaue Seehöhe der Stationen nicht erforderlich ist, so kann selbe mit grosser Genauigkeit erfolgen, wenn die Registrirbarometer die Druckvariationen genau liefern. Da auf den täglichen Gang des Wasserdampfgehaltes der Luft nur angenähert Rücksicht genommen werden konnte, so kann derselbe noch einigen Einfluss auf die obigen Rechnungsresultate haben, der aber gewiss sehr geringfügig sein dürfte.

Wenn wir auch durch mancherlei Erfahrungen darauf vorbereitet sein müssen, dass die Amplituden der täglichen Temperaturvariation in der freien Atmosphäre viel kleiner sein werden, als sie sich aus den Beobachtungen an festen Stationen an der Erdoberfläche und auf Berggipfeln direct ergeben, so sind doch die überraschend kleinen täglichen Temperaturschwankungen, wie sie sich aus den Luftdruckschwankungen berechnen lassen, geeignet, stutzig zu machen und Bedenken gegen deren Richtigkeit einzuflössen.

Solche Bedenken hat jüngst Herr A. Angot geäussert in einer kurzen Discussion jener Registrirungen des Luft-

[1] Peissenberg—Hirschberg bleibt am besten unberücksichtigt, da Hirschberg Eigenthümlichkeiten zeigt, wie sie vielleicht nur den Stationen an Bergabhängen zukommen.

druckes auf dem Montblanc-Gipfel, die wir vorhin auch benutzt haben.[1]

Aus den dreistündigen Temperaturbeobachtungen auf dem Montblanc, zu Bern, Genf und Lyon leitet er für die tägliche Temperaturvariation in der zwischenliegenden Luftschichte die Gleichung ab:

$$\Delta T = 3\overset{\circ}{.}11 \sin(230^\circ + x) + 0\cdot 32 \sin(69^\circ + 2x).$$

Daraus ergibt sich, wie er bemerkt, als Luftdruckvariation auf dem Montblanc-Gipfel:

$$2\cdot 55 \sin(230^\circ + x) + 0\cdot 26 \sin(69^\circ + 2x).$$

Die wirklich beobachtete Druckvariation bleibt nun, wie wir bereits wissen, weit hinter dieser berechneten Variation zurück, was wir eben dadurch erklären, dass die beobachteten täglichen Temperaturvariationen viel zu gross sind.[2] Herr Angot glaubt das nicht gelten lassen zu dürfen, indem er das arithmetische Mittel der unten und oben beobachteten Temperaturvariation für die zwischenliegende Luftschicht als giltig annehmen zu müssen vermeint.

---

[1] Sur la variation diurne de la pression au sommet du mont Blanc. Comptes rendus. 11. déc. 1893. Tome CXVII, p. 847.

[2] Ein, soweit man den directen Beobachtungen folgen darf, genauerer Ausdruck für die tägliche Temperaturvariation zwischen Montblanc-Gipfel und dem Niveau von Genf wäre folgender:

Täglicher Temperaturgang:

	p_1	q_1	p_2	q_2
Genf 407 *m*	—3·88	—3·31	+0·57	+0·01
Chamonix—Grands Mulets 2020 *m*	—4·05	—1·93	+1·06	+0·18
Montblanc 4807 *m*	—1·78	—0·44	+0·40	+0·02
Mittel	—3·24	—1·89	+0·68	+0·07

Daraus folgt als Gleichung des täglichen Wärmeganges in der Luftschichte von 4400 *m* Mächtigkeit

$$\Delta T = 3\cdot 75 \sin(239\cdot 8 + x) + 0\cdot 68 \sin(84\cdot 1 + 2x),$$

welche natürlich eine noch grössere Druckvariation auf dem Montblanc ergeben würde.

Um aber dem Widerspruch mit den daraus folgenden grossen Druckvariationen auf den Berggipfeln zu begegnen, glaubt Herr Angot annehmen zu können, dass in Folge der Erwärmung Luft seitlich abfliesst, wodurch dann die Druckvariationen auf den Bergen kleiner werden. Er sagt »Eine andere Erklärung der Widersprüche« (als die meine) »zwischen Rechnung und Beobachtung scheint einfacher. Man hat für die Rechnung angenommen, dass die Luft wie in einem verticalen Cylinder sich ausdehnt, ohne seitliche Bewegung. Aber in dem Masse, als die Luft sich in einer Gegend ausdehnt, fliesst sie wahrscheinlich seitlich nach minder erwärmten Gegenden ab, so dass nicht die ganze Luftmasse emporsteigt, die in Rechnung gestellt wird; der wirkliche Effect wird daher auch nur ein Bruchtheil des berechneten Effectes sein.«

Auf den ersten Eindruck hin könnte Manchem diese Erklärung zureichend scheinen, darum ist es wohl nöthig, darauf aufmerksam zu machen, dass sie physikalisch nicht haltbar ist und auf einem Übersehen oder auf einem Missverständniss beruht. Ob Luft horizontal zufliesst oder abfliesst hat auf die Giltigkeit meiner Berechnungen der Temperaturvariationen aus den Druckvariationen keinen Einfluss. Wenn durch ein Abfliessen der Luft der Druck unten (Barometerstand B) um ΔB sinkt, so sinkt er auch oben (Barometerstand b) um $\Delta B \times (b:B)$ und die Druckdifferenz beider Stationen bleibt wie früher nur eine Function der Temperatur (und des Wasserdampfgehaltes) der zwischenliegenden Luftschichte. Durch ein Abfliessen der erwärmten Luft kann man demnach die aus der Rechnung sich ergebenden kleinen Temperaturamplituden nicht erklären.

Übrigens ist ein solches tägliches periodisches Abfliessen und Zufliessen der Luft in dem Masse, dass dadurch tägliche Druckschwankungen von 4 *mm* in 4800 *m* Seehöhe entstehen, respective unterdrückt werden, im höchsten Grade unwahrscheinlich und widerspricht allen Beobachtungen. Man müsste ja doch an den Orten, wohin die Luft abfliesst, eine entsprechend grosse Druckzunahme am Nachmittage (bis zu $3^1/_2$ *mm*) beobachten können in Form einer totalen Umkehrung des täglichen Barometerganges. Davon ist aber nirgend wo etwas zu bemerken.

Man kann leicht berechnen, welchen Effect das von Herrn Angot angenommene tägliche Abfliessen der Luft (am Nachmittage und Wiederzuströmen bei Nacht) in der Umgebung des Montblanc auf den täglichen Barometergang zu Genf haben müsste.

Die von Herrn Angot aufgestellte tägliche Barometervariation auf dem Montblanc-Gipfel ergibt:

	p_1	q_1	p_2	q_2
Thermische Druckschwankung auf dem Montblanc	−1·954	−1·639	+0·243	+0·093
Beobachtete Druckschwankung	−0·267	−0·336	+0·150	−0·020
Differenz	−1·687	−1·303	+0·093	+0·113
Reducirt auf Genf (728 : 426)	−2·879	−2·224	+0·159	+0·193

Der Ausdruck für die periodische tägliche Abnahme und Zunahme des Druckes, welche nöthig wäre, um die durch die beobachteten täglichen Temperaturamplituden hervorgerufenen Druckschwankungen auf dem Montblanc-Gipfel bis zu der beobachteten Grösse herabzumindern, wäre demnach:

Tägliche Druckschwankung in Genf in Folge des vorausgesetzten periodischen Abfliessens und Zuströmens der Luft

$$3\cdot 64 \sin (232\cdot 3+x) + 0\cdot 25 \sin (39\cdot 5+2x).$$

Es würde also in Genf eine tägliche Druckvariation von mindestens 7 *mm* nöthig sein, um die Druckschwankungen auf dem Montblanc-Gipfel auf die beobachtete Amplitude herabzudrücken, wenn die tägliche Variation der Lufttemperatur in der That dem arithmetischen Mittel der unten und oben beobachteten Temperaturvariation gleich wäre.

Durch die Annahme eines periodischen Abströmens und Zufliessens der Luft kann man desshalb die beobachteten geringen thermischen Druckschwankungen auf den Berggipfeln nicht verträglich machen mit den beobachteten Temperaturschwankungen, wenn man selbe für die freie Atmosphäre gelten lassen will. Dass die von mir für letztere berechneten Temperaturvariationen nicht völlig richtig sein werden, gebe ich gerne zu und habe auch schon auf eine der Ursachen hin-

gewiesen,[1] welche die täglichen Druckvariationen auf Berggipfeln von jenen der freien Atmosphäre etwas abweichend gestalten mögen.

Nur Stationen wie jene auf dem Eiffelthurm sind von jedem derartigen Einwurfe frei, denn die von Herrn Teisserenc de Bort angenommenen dynamischen Druckschwankungen scheinen mir, wenigstens in dem angenommenen Betrage, vorläufig noch höchst unwahrscheinlich zu sein. Sollte die tägliche Windperiode in Folge der saugenden Wirkung des Windes auf den täglichen Barometergang einen merklichen Einfluss haben, so würde derselbe, da ja das Maximum der Windstärke in der Höhe auf die Nachtstunden fällt, dem Sinne nach mit der thermischen Druckschwankung übereinstimmen, sich zu selber addiren und die aus dem Luftdrucke berechneten Temperaturamplituden noch vergrössern, statt sie zu verkleinern. Und doch weist selbst auf dem Eiffelthurm die tägliche Barometerschwankung auf eine tägliche Temperaturamplitude der unterhalb liegenden Luftschichte von kaum 2°2 hin, während selbe nach den Thermometerständen unten und oben 3°3 sein würde.[2]

Die Ergebnisse der Luftdruckregistrirungen auf dem Montblanc-Gipfel stehen also in vollkommener Übereinstimmung mit jenen auf anderen Gipfelstationen und auch jenen auf dem Eiffelthurm, indem sie dafür sprechen, dass in den höheren Schichten der freien Atmosphäre die tägliche Wärmeschwankung viel kleiner ist, als die directen Temperaturmessungen sie zu ergeben scheinen.

---

[1] Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschriften Bd. LIX.

[2] Täglicher Temperaturgang zwischen Eiffelthurm und Paris (Δh 279 *m*):

Beobachtet .... $3\cdot34 \sin(229°+x)+0\cdot37 \sin(66°+2x)$
Aus der Druckschwankung berechnet $2\cdot16 \sin(207 \ +x)+0\cdot45 \sin(54 \ +2x)$

Über eine Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes und dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen

von

Franz Streintz.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

Die beiden Salzlösungen im Daniell-Elemente beeinflussen dasselbe bekanntlich in einer Weise, dass die Vergrösserung der Concentration des $ZnSO_4$ mit einer Abnahme, die des $CuSO_4$ hingegen mit einer Zunahme der elektromotorischen Kraft verbunden ist. In den einschlägigen Arbeiten von Kittler[1] und G. Meyer[2] sind die Concentrationen der Lösungen aus ihren specifischen Gewichten oder nach Gewichtsprocenten bestimmt worden.

Mit Rücksicht auf den Entwicklungsgang der Elektrochemie erscheint es von Bedeutung, die Lösungen so herzustellen, dass sie in molecular einfachen Verhältnissen stehen. Derartige Versuche an Elementen, welche aus zwei Metallen in den entsprechenden Salzlösungen bestanden, sind von A. Wright und C. Thompson[3] angestellt worden; das Daniell-Element war mit äquimolecularen Lösungen von Zink- und Kupfersulfat nach dem Schema $m MSO_4 . 100 H_2O$ beschickt worden;

---

[1] Kittler, Wied. Ann., 17. S. 894, 1882.

[2] G. Meyer, Wied. Ann., 33, S. 277, 1888.

[3] A. Wright und C. Thompson, Phil. Mag., V, S. 19, p. 17 und 209, 1885.

dabei wurde *m* innerhalb der Grenzen von 0·1 bis 2·25 verändert. Es ergab sich eine von *m* unabhängige elektromotorische Kraft von 1·114 Volt. Löst man also je ein Gramm-Molekül der beiden wasserfreien Salze in gleichen Mengen Wasser auf, so bleibt die elektromotorische Kraft constant, wenn die Verdünnung von 0·8 *l* bis 18 *l* fortschreitet.

Zweck der vorliegenden Mittheilung ist der Nachweis, dass dieser Satz in weitem Umfange besteht und nicht nur für äquimoleculare Lösungen gilt, sondern auch dann, wenn das Verhältniss des Salzgehaltes derselben einen beliebigen constanten Werth besitzt.

Das Element bestand aus einem kleinen Becherglase, welches einen Kupferstreifen und eine Thonzelle enthielt; in die letztere wurde ein Stäbchen von amalgamirtem Zink gesenkt. Durch Auflösen eines Gramm-Moleküls $ZnSO_4$, beziehungsweise $CuSO_4$ in je einem Liter Wasser, die Krystallwasser eingerechnet, wurden zweifach normale Lösungen hergestellt, welche beliebigen Verdünnungen unterworfen werden konnten. Die Salze waren als chemisch rein bezogen.

Zu den Messungen diente ein tadellos functionirendes Quadrantenelektrometer. Es wurden regelmässig die ersten Ausschläge nach beiden Seiten der Ruhelage beobachtet. Ein Normal-Clark-Element rief einen solchen von 160 *mm* an einer über 300 *cm* vom Spiegel des Instrumentes entfernt aufgestellten Scala hervor. Zehntel eines Millimeters konnten noch mit Sicherheit geschätzt werden.

Selbstverständlich wurde auf das Reinigen der verwendeten Gefässe und der Metalle besondere Aufmerksamkeit gerichtet; zudem gebrauchte man die Vorsicht, das Element mit den neuen Lösungen gefüllt durch einige Minuten zunächst sich selbst zu überlassen, dann jene abzuhebern und durch gleichartige zu ersetzen. Dann erst wurden die Bestimmungen vorgenommen.

Bezeichnet man die Combination durch

$$Zn \,|\, ZnSO_4 + m \text{ aqua} \,|\, CuSO_4 + n \text{ aqua} \,|\, Cu,$$

wobei *m* und *n* in Litern ausgedrückt werden, so ergeben sich nachstehende Resultate:

1. $\frac{m}{n} = 1$. (Äquimoleculare Lösungen.)

m	E_1	m	E_1
1	1·114 V.	16	1·114 V.
2	1·114	32	1·114
4	1·113	64	1·112
8	1·114	128	1·107
		256	1·099

Die Zahlen stehen in vollständiger Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Wright und Thompson. Innerhalb des Intervalles von $m = 1$ bis 64 ist E. K. vollkommen constant und ergibt einen Mittelwerth $E_1 = 1·1136$ V. Über diese Verdünnungsgrenze hinaus nimmt E_1 ab.

2. $\frac{m}{n} = 2$.

n	E_2	n	E_2
8	1·107 V.	64	1·108 V.
16	1·106	128	1·105
32	1·105	256	1·105
	1·107		

Eine Veränderung der elektromotorischen Kraft ist hier auch bei grossen Verdünnungen nicht aufgetreten. Der Mittelwerth E_2 beträgt 1·1061 V.

3. $\frac{m}{n} = 8$.

n	E_8	n	E_8
8	1·099 V.	64	1·098 V.
16	1·098	128	1·099
32	1·097	256	1·101

Für $n = 8$ bis 128 ist im Mittel $E_8 = 1·0982$ V.

4. $\frac{m}{n} = 32$.

n	E_{32}	n	E_{32}
32	1·092 V.	256	1·093
64	1·091	512	1·095
128	1·091		

Mittel für $n = 32$ bis 256, $E_{32} = 1\cdot0917$ V.

Es sei hervorgehoben, dass die Werthe für E bei grossen Verdünnungen des Kupfervitriols sich einem Grenzwerthe nähern, welcher bei 1·100 V. gelegen ist.

Bei den unter 2., 3. und 4. mitgetheilten Beobachtungen stand einer concentrirteren Zinklösung eine verdünntere Kupferlösung gegenüber. Verfährt man in entgegengesetzter Weise, so ergibt sich:

5. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

m	$E_{1/2}$	m	$E_{1/2}$
2	1·119 V.	32	1·120 V.
4	1·119	64	1·118
8	1·120	128	1·100
16	1·120		

Mittel $E_{1/2} = 1\cdot1193$ von $m = 2$ bis 64.

6. $\frac{m}{n} = \frac{1}{8}$.

m	$E_{1/8}$	m	$E_{1/8}$
8	1·129 V.	64	1·125 V.
16	1·128	128	1·124
32	1·124	256	1·115

Mittel $E_{1/8} = 1\cdot1260$ V. für $m = 8$ bis $m = 128$.

7. $\frac{m}{n} = \frac{1}{32}$.

m	$E_{1/32}$	m	$E_{1/32}$
32	1·143 V.	128	1·136 V.
64	1·141	256	1·130

Mittel $E_{1/32} = 1\cdot1425$ V. für $m = 32$ und $m = 64$.

Aus den mitgetheilten Zahlen folgt:

Die elektromotorische Kraft des Daniell-Elementes hängt nur von dem Verhältnisse des Salzgehaltes seiner Lösungen ab; sie ist mithin unabhängig von der Stärke der Einzelconcentrationen.

Nach F. Kohlrausch[1] besitzt das moleculare Leitungsvermögen der beiden Salzlösungen in der gleichen beliebigen Verdünnung fast denselben Werth. Der von Arrhenius[2] eingeführte Activitätscoëfficient ist somit für beide Sulfate von gleicher Grösse, und weiters haben die Zink- und Kupferjonen dieselbe Wanderungszahl. Für die elektromotorische Kraft eines Elementes, dessen Metalle zweiwerthig sind und dessen Lösungen die bezeichneten Bedingungen erfüllen, hat Nernst[3] die Gleichung abgeleitet:

$$E = \frac{p_0}{2}\left(\operatorname{logn}\frac{P_1 p_2}{P_2 p_1} + \frac{u-v}{u+v}\operatorname{logn}\frac{p_1}{p_2}\right) + A.$$

Darin bedeuten P_1 und P_2 die elektrolytischen Lösungstensionen der Metalle Zn und Cu, p_1 und p_2 die Diffusionstensionen (osmotischen Drucke) der entsprechenden Salzlösungen; ferner stellt u die gemeinsame Beweglichkeit der Cu- und Zn-Jonen und v diejenige des gemeinsamen Jons SO_4 der beiden Lösungen dar. Endlich bezeichnet p_0 die elektrolytische Gasconstante multiplicirt mit der absoluten Temperatur, bei welcher E beobachtet wurde, und A eine etwaige bei Berührung der Elektroden hervorgerufene Potentialdifferenz.

Das Verhältniss der Diffusionsdrucke $\frac{p_1}{p_2}$ entspricht der Zahl $\frac{m}{n}$ in den vorliegenden Beobachtungen; die Unabhängigkeit der elektromotorischen Kraft des Daniell-Elementes von der Stärke der Einzelconcentrationen seiner Lösungen ergibt sich daher als eine erste Consequenz der Nernst'schen Theorie.

Die für die verschiedenen $\frac{m}{n}$ gefundenen Werthe von E lassen sich jedoch auch unter einander in Beziehung bringen durch eine Gleichung

$$E = A - B\log\left(\frac{m}{n}\right).$$

[1] F. Kohlrausch, Wied. Ann., 26, S. 196, 1885.

[2] Arrhenius, Ostw. Zeitschr., 1, S. 633, 1887.

[3] Nernst, Ostw. Zeitschr., 4, S. 179, 1889.

Die Rechnung ergibt für den Coëfficienten A den Werth 1·1139 V., für $B = 0·0177$ V. Der Grad der Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen wird aus nachstehender Tabelle ersichtlich:

	E beob.	E ber.	Δ
$\frac{m}{n} = 1$	1·1136 V.	1·1139 V.	—0·0003
2	1·1061	1·1086	—0·0025
8	1·0982	1·0979	+0·0003
32	1·0917	1·0873	+0·0044
$\frac{1}{2}$	1·1193	1·1192	+0·0001
$\frac{1}{8}$	1·1260	1·1299	—0·0039
$\frac{1}{32}$	1·1425	1·1405	+0·0020

Für zwei Einzelbestimmungen, bei welchen $\frac{m}{n}$ die Werthe 4, beziehungsweise $\frac{1}{4}$ besass, ergaben sich:

m	E beob.	E ber.	Δ
4	1·1050 V.	1·1032 V.	+0·0018
$\frac{1}{4}$	1·1257	1·1246	+0·0011

Man überzeugt sich nun leicht, dass den beiden Coëfficienten A und B nach Nernst folgende Bedeutung zukommen muss:

$$A = \frac{p_0}{2} \cdot \operatorname{logn} \frac{P_1}{P_2} + \Lambda, \quad B = p_0 \frac{u}{u+v} \cdot \frac{1}{\log e}.$$

Für p_0 ist $0·860 \,.\, T \,.\, 10^{-4}$ einzusetzen; da die Beobachtungen von E bei 18° C. erfolgten, ergibt sich p_0 zu 0·0250. Die gemeinsame Wanderungszahl für die Zn- und Cu-Jonen, $\frac{u}{u+v}$, wurde von Hittorf zu 0·360 bestimmt. Daraus folgt

$$B = 0·0207 \text{ V.}$$

Mit Rücksicht auf die mannigfachen Schwierigkeiten, welche sich aus der Natur der Theorie[1] ergeben, weiters mit Rücksicht auf die Thatsache, dass der Grad der Dissociation bei den angewendeten Lösungen ein mässiger ist, wird man die Übereinstimmung mit dem durch den Versuch gefundenen Werth $B = 0 \cdot 0177$ als genügend bezeichnen können.

---

[1] Vergl. Nernst, a. a. O., 144, 145.

III. SITZUNG VOM 18. JÄNNER 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII (October 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte vor.

Das k. k. Ackerbau-Ministerium übermittelt ein Exemplar des von demselben veröffentlichten Werkes: »Geologisch-bergmännische Karten mit Profilen von Idria nebst Bildern von den Quecksilber-Lagerstätten in Idria.«

Herr Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine im botanischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag ausgeführte Arbeit von Dr. Friedrich Czapek, betitelt: »Zur Kenntniss des Milchsaftsystems der Convolvulaceen«.

Herr Dr. Stanislaus Klemensiewicz, Professor am k. k. Gymnasium in Rzeszow, übersendet eine Abhandlung: »Beiträge zur geographischen Verbreitung der Schmetterlinge in Galizien.«

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht eine Abhandlung des Herrn Carl Grafen Attems in Wien, betitelt: »Die Copulationsfüsse der Polydesmiden.«

Ferner überreicht Herr Hofrath Claus eine Arbeit des Herrn A. König in Wien, unter dem Titel: »*Hemispeiropsis comatulae*, eine neue Gattung der Urceolariden.«

Das c. M. Herr Oberst A. v. Obermayer überreicht den Bericht über die im vorigen Jahre in Gemeinschaft mit Herrn Hauptmann A. Schindler im Auftrage der kaiserl. Akademie ausgeführte »Trigonometrische Höhenbestimmung des hohen Sonnblick, in der Goldberggruppe der hohen Tauern«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Mittheilung des Herrn Prof. Dr. E. Kobald in Leoben über eine »Verallgemeinerung eines Appel'schen Satzes aus der Theorie der Wärmeleitung«.

Das c. M. Herr Prof. K. Grobben in Wien überreicht eine Abhandlung: »Zur Kenntniss der Morphologie, der Verwandtschaftsverhältnisse und des Systems der Mollusken.«

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über ein isomeres Jodmethyl-Brucin.«

Herr Dr. Gustav Jäger in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne«.

Die trigonometrische Höhenbestimmung des Hohen Sonnblicks in der Goldberggruppe der Hohen Tauern

von

Oberst **A. v. Obermayer,**
c. M. k. Akad.

und

Hauptmann **Anton Schindler.**

Da der Sonnblickgipfel kein Hauptpunkt des Triangulirungsnetzes ist, so liegt auch keine hinreichend genaue Bestimmung seiner Höhe auf trigonometrischem Wege vor.

Die Höhenangaben differiren sehr erheblich. In der vom k. und k. Militärgeographischen Institute herausgegebenen Original-Aufnahmssection im Massstabe 1:25.000 vom Jahre 1871 findet sich für den Sonnblick die Höhencôte 3090 *m*; in der Specialkarte im Massstabe 1:750.000 die Höhencôte 3103 *m* angegeben.

Bei der Unsicherheit, welche den umliegenden von der trigonometrischen Triangulirung des Katasters aus den Dreissiger Jahren dieses Jahrhunderts herrührenden Punkten anhaftet, sind solche abweichende Angaben nicht zu verwundern.

Durch den Bestand des Observatoriums auf dem Sonnblick wurde es Herrn Hofrath Hann möglich (1891),[1] aus correspondirenden, corrigirten Luftdruckmitteln nach der barohypsometrischen Formel, aus den Beobachtungen der vier Jahrgänge 1887—1890 die Höhe des Sonnblickgipfels zu berechnen.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. C, April 1891, S. 451.

Es wurden so aus den unten angeführten Vergleichsstationen, von denen Ischl—Lienz an das Präcisionsnivellement angeschlossen sind, gefunden:

Vergleichsstation	Seehöhe	Höhendifferenz	Sonnblick-gipfel
Schafberggipfel	1776·1	1327·0	3103·1
Obir	2044	1064·7	3108·7
Säntis	2464	645·5	3109·9
Ischl—Lienz	573·2	2531·2	3104·4

Wird aus den so berechneten Höhen des Sonnblickgipfels das Mittel genommen, so ergibt sich für diese Höhe:

$$3106·5 \pm 1·6\, m$$

bis zum Gefäss des in der Gelehrtenstube aufgehangenen Fortin'schen Barometers. Dasselbe dürfte sich nach ungefährer Schätzung 60 *cm* über dem äusseren Boden befinden.

Bei der Bedeutung, welche der genauen Kenntniss der Höhe des Sonnblicks zukommt, hat die kaiserliche Akademie der Wissenschaften Einen von uns aufgefordert, eine trigonometrische Höhenbestimmung auszuführen.

Überdies wurden vom Sonnblick-Verein die Kosten des Transportes der Instrumente, der Führer etc. mit einem Betrage von circa 60 fl. bestritten.

Zu dem Zwecke der soliden Aufstellung der Instrumente wurde Peter Lechner der Auftrag ertheilt, zwei Pfeiler in Stein in einer Höhe von etwa 1·1 *m* mit möglichst ebenen oberen Platten aufzumauern. Peter Lechner hat die Aufstellungsorte der Pfeiler so gut gewählt, dass dieselben nicht nur gegenseitig sichtbar sind, sondern auch jeder für sich die grösstmöglichste Rundsicht gewähren. Allerdings hat dies eine Regulirung der Ostseite des Gipfels nöthig gemacht.

Die Kosten der Bauführung, die sich aus dem letzteren Grunde auf etwa 47 fl. stellten, hat auch der Sonnblick-Verein getragen und dadurch einem, bei wissenschaftlichen Specialuntersuchungen sehr fühlbaren Bedürfnisse Rechnung getragen.

Die Pfeiler, nach ihrer Lage Ost- und Westpfeiler genannt, sind auf ihren Platten, die gerade nicht sehr eben ausfielen,

mit eingemeisselten Kreuzen versehen und dadurch der Aufstellungsort der Instrumente bezeichnet worden.

Die Distanz zwischen den so festgelegten Mitten der Pfeiler wurde mittelst Latten gemessen und gleich 36·81±0·02 *m* gefunden.

Der Höhenunterschied der Platten wurde allerdings nicht mit genügender Sicherheit gemessen. Die Platte des Westpfeilers dürfte nahe 0·19 *m* höher sein, als jene des Ostpfeilers. Die Höhe der Platte des Westpfeilers über dem Erdboden ist 1·14 *m*, jene der Platte des Ostpfeilers 1·12 *m*.

Eine Beobachtungsreihe wurde anfangs Juli von uns beiden angestellt. Dieselbe umfasst die eben angeführten Messungen, die Bestimmung der Horizontalwinkel zwischen einer Reihe von Punkten und die Bestimmung der Höhenwinkel dieser Punkte. Das Wetter war um diese Zeit ziemlich veränderlich. Die ersten Tage waren zum Theil trüb und vergingen mit der Rectification des Instrumentes. Am 4. Juli Vormittag konnte gemessen werden. Am 5. Juli war es vollständig rein, am 6. Juli war Nebel, am 7. war es rein, am 8. theilweise rein, am 9. vollkommen rein, am 10. war Nebel, am 11. war es zum Theil rein, dann folgte ein Wetterumschlag.

Eine zweite Beobachtungsreihe wurde von Einem von uns, Hauptmann A. Schindler, in der Zeit vom 14. bis 17. September ausgeführt und dabei ausschliesslich Höhenwinkel gemessen. Das Wetter war um diese Zeit beständig.

Von den sichtbaren und bezeichneten Punkten haben wir in die Messung einbezogen: den Grossglockner mit Pyramide, 3798·4 *m*; den Unholden mit grossem Steinmandl auf dem einen Gipfel, 2870 *m*; das Böse Weibl mit Steinmandl, 3110 *m*; den Sandkopf mit Steinmandl und Stange, 3084 *m*; die Stanziwurten mit Steinmandl und Stange, 2704 *m*; den Ziethenkopf mit schöner und hoher Pyramide, 2484·8 *m*; den Stellkopf mit Steinmandl, 2846 *m*; das Alteck mit charakteristischem Gipfel, 2939 *m*; den Ankogel mit charakteristischer Gipfelform, 3262·7 *m*; den Silberpfennig mit Steinmandl und vertikaler und schiefer, ausspreizender, weisser Latte, 2597 *m*; den Hochnarr mit Steinmandl und Stange, 3258 *m*. Von allen diesen Punkten konnten wir aber bloss die vom k. u. k. Militär-

geographischen Institute bestimmten Punkte Grossglockner, Ziethenkopf und Ankogel der Rechnung zu Grunde legen. Die Coordinaten der übrigen, von der schon erwähnten Katastralvermessung herrührenden Punkte erwiesen sich so wenig in Übereinstimmung, dass wir die zahlreichen darauf bezüglichen Messungen unbenützt lassen mussten.

Zu den Messungen hatte uns das k. u. k. Militärgeographische Institut einen Theodolithen zur Landesvermessung von Starke & Kammerer (Nr. 250) zur Verfügung gestellt, welcher am Horizontalkreise und am Höhenkreise mittelst Mikroskopen mit Ocularmikrometern 2 Sekunden abzulesen gestattet. Beide Theilkreise sind mit Reibung drehbar, um verschiedene Stellen der Kreise zur Ablesung benützen zu können.

Die Bestimmung der Lage des Sonnblicks nach dem Pothenot'schen Verfahren.

Hiezu wurde, wie schon erwähnt, die aus den Triangulirungsarbeiten des Militärgeographischen Institutes folgenden Coordinaten von Grossglockner, Ankogl und Ziethenkopf benützt. Der Coordinatenanfangspunkt ist in der Nähe des Hochnarrs angenommen worden, die x-Axe läuft von W gegen E und die y-Axe von N nach S.

Diese Coordinaten sind:

	x	y
A Ankogl	+23710·8	+ 3153·3
B Ziethenkopf......	+ 176·7	+30180·9
C Grossglockner.....	—18371·7	+ 0·4

Denselben entsprechen die Dreieckseiten:

$$c = 35837\cdot77\,m, \quad a = 35424\cdot65\,m, \quad b = 42200\cdot50\,m$$

und die Winkel:

$$C = 54^\circ\ 8'\ 28\cdot0'', \quad A = 53^\circ\ 14'\ 13\cdot7'', \quad B = 72^\circ\ 37'\ 18\cdot3''.$$

Wird der Ostpfeiler mit E, der Westpfeiler mit W bezeichnet, so ergab die Messung folgende Mittelwerthe der Winkel bei einer Anzahl n Messungen:

$\sphericalangle CWB = 94^\circ\ 25'\ 16\cdot9'' \pm 0\cdot73''$ $n = 8$
$\sphericalangle AWB = 91\ \ 20\ \ 44\cdot9 \pm 1\cdot90$ $n = 6$

$\sphericalangle CEB = 94^\circ\ 20'\ 34\cdot0'' \pm 2\cdot34''$ $n = 6$
$\sphericalangle AEB = 91\ \ 25\ \ 37\cdot9 \pm 2\cdot17$ $n = 8$

Damit wurden folgende Abstände der Pfeiler von den Punkten berechnet:

Entfernung von	*E*	*W*
C Grossglockner.....	20140·8 *m*	20104·6 *m*
B Ziethenkopf.......	22113·1	22149·2
A Ankogl...........	27656·7	27658·2

Hieraus folgen die Coordinaten der beiden Pfeiler:

	x	*y*
E........	1605·6 *m*	2561·1 *m*
W.......	1569·6	2557·7

Aus den Coordinaten ist es möglich, den Abstand der Pfeilermitten zu ermitteln. Dieser wird so gefunden: 36·1 *m*, was gegen die directe Messung um 0·7 *m* differirt und eine nützliche Controle der Messungen bietet.

Ein Fehler der gemessenen Winkel *CWB* und *AWB* z. B., um je 2 Secunden bringt eine Änderung in der Länge *WC*, *WB* und *WA* hervor, welche bloss in den Centimetern liegt, daher kaum in Betracht kommt.

Die trigonometrische Höhenmessung.

Von den drei gewählten Fixpunkten ist insbesondere der Grossglockner durch den Herrn Oberstlieutenant H. Hartl des k. u. k. Militärgeographischen Institutes, mit Hilfe von Zwischenpunkten in kleinen Distanzen, an das Präcisionsnivellement im Pusterthale angeschlossen. Ebenso sind der Ziethenkopf und der Ankogl sorgfältig bestimmt worden. Die Höhen sind auf den Erdboden des Gipfels bezogen.

Grossglockner	3798·4 *m*
Ankogl.............	3262·7
Ziethenkopf	2484·8

Zur Höhenberechnung wurde die von Oberstlieutenant H. Hartl benützte Formel[1] verwendet, welche der Krümmung der Erde und dem Einflusse der Refraction Rechnung trägt. Dieselbe lautet:

$$U = S \cot z + S^2 q, \qquad q = \frac{1-K}{2\rho}.$$

Darin sind: U die gesuchte Höhendifferenz in Metern zwischen dem Vergleichsgipfel und dem Mittelpunkte des Höhenkreises, S die Entfernung vom Vergleichsgipfel, z der Zenithwinkel, ρ der Erdhalbmesser.

Für K ist zu setzen:

$$K = 0 \cdot 1470 - 0 \cdot 00080\, h,$$

worin h die beiläufige Höhendifferenz in Hectometern bedeutet. Ferner wurde genommen:

$$\log \frac{1}{2} \rho = 2 \cdot 8942233 - 10.$$

Die Instrumentenhöhe beträgt beim Ostpfeiler 1·38 *m*, beim Westpfeiler 1·40 *m*. Der Mittelpunkt des Höhenkreises steht nahe 0·26 *m* über der Aufstellungsebene.

Wegen der Veränderlichkeit der Refraction wurden die Messungen der Höhenwinkel hauptsächlich um die Mittagszeit ausgeführt. Um aber doch den Einfluss der Refraction kennen zu lernen, haben wir auch in den Vormittagsstunden und am späten Nachmittage Messungen ausgeführt. Insbesondere die letzteren gaben auffallend abweichende Werthe.

In der folgenden Tabelle sind die gemessenen Höhenwinkel unter z angesetzt und dazu angeführt: das Datum, die Versuchszeit, die Anzahl n der Messungen, die Pfeilerbezeichnung und die Höhe H in Metern.

---

[1] Mittheilungen des k. und k. Militärgeographischen Institutes, Bd. IV, S. 173.

Ankogl.

			Z	n	H
7. Juli	1h 25— 2h 10	....	E 89° 40′ 49·0″ ±0·67″	10	3105·37±0·10
7. »	2 12— 2 25	....	E 89 40 50·1 ±1·47	8	3105·49±0·16
8. »	10 40—11 0	....	W 89 41 14·0 ±0·89	6	3107·53±0·10
8. »	12 50— 1 10	....	W 89 40 59·4 ±2·22	7	3105·96±0·24
15. Sept.	10 50—11 30	....	W 89 40 51·6 ±2·12	5	3105·14±0·24
16. »	11 40— 1 10	....	W 89 40 58·8 ±2·44	7	3105·93±0·25

Aus diesen 43 Beobachtungen ergibt sich:

$$H = 3106 \cdot 09 \pm 0 \cdot 21\, m.$$

Ziethenkopf.

			Z	n	H
8. Juli	10h 15—12h 0	....	W 91° 24′ 13·0″ ±5·4 ″	16	3110·24±0·73
8. »	12 20—12 40	...	W 91 24 52·1 ±0·83	5	3107·43±0·10
14. Sept.	9 30— 3 30	....	W 91 24 13·2 ±0·13	10	3110·27±0·18
15. »	11 50—12 0	...	W 91 24 20·1 ±5·18	2	3111·21±0·77
16. »	10 0—12 31	....	W 91 24 9·5 ±7·20	5	3109·78±0·96
7. Juli	12 40— 1 10	....	E 91 24 10·2 ±1·11	15	3110 05±0·16
15. Sept.	2 5— 2 35	....	E 91 24 3·5 ±2·47	3	3107·15±0·32

Aus diesen 56 Beobachtungen ergibt sich:

$$H = 3108 \cdot 84 \pm 0 \cdot 62\, m.$$

Grossglockner.

			Z	n	H
5. Juli	10h 30—11h 15	....	W 88° 6′ 30·3″ ±3·44″	7	3105·84±0·38
5. »	11 15—11 50	....	W 88 6 34·8 ±2·81	6	3106·28±0·31
8. »	11 0—11 30	....	W 88 6 31·1 ±1·16	9	3105·90±0·13
8. »	12 30—12 50	....	W 88 6 43·5 ±1·52	8	3107·12±0·17
8. »	1 10— 1 30	....	W 88 6 54·6 ±1·66	7	3108·22±0·18
9. »	1 45— 2 15	....	W 88 7 5·1 ±2·05	10	3109·23±0·20
14. Sept.	9 50—10 0	....	W 88 6 31·3 ±1·04	4	3108·73±0·11
15. »	9 40—10 30	....	W 88 6 32·4 ±1·58	5	3106·04±0·17
16. »	11 30—12 0	....	W 88 6 41·7 ±1·68	6	3106·95±0·18
15. »	2 45— 3 0	....	E 88 6 49·8 ±0·94	5	3106·63±0·10

Aus diesen 67 Beobachtungen folgt unter Berücksichtigung der Genauigkeit und der Anzahl der Messungen, aus denen die Werthe abgeleitet sind:

$$H = 3106 \cdot 47 \pm 0 \cdot 12\, m.$$

Alle Beobachtungen sind auf den Erdboden beim Westpfeiler bezogen.

Die Genauigkeit der Beobachtungen des Ziethenkopfes ist geringer wie jene der anderen Beobachtungen, da dieser Gipfel fast genau in der Mittagslinie liegt und dadurch das Visiren um die Mittagszeit sehr erschwert ist.

Unter Berücksichtigung der Genauigkeit der Mittelwerthe und der Anzahl der Beobachtungen, aus denen sie abgeleitet sind, ergibt sich:

$$H = 3106 \cdot 47 \pm 0 \cdot 10\, m.$$

Weiter ist unter Berücksichtigung der früher angegebenen Höhenmessungen der Pfeiler etc.:

Platte des Westpfeilers ....3107·61 *m*
Platte des Ostpfeilers...................3107·42
Beiläufige Höhe des Barometergefässes....3106·9
Durch Hann aus Barometermitteln ....3106·5 $\pm 1 \cdot 6 m$,

wonach unsere Bestimmung der Höhe des Barometergefässes innerhalb der Fehlergrenze des Mittels aus den Hann'schen Werthen liegt.

Über die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist die Mittheilung einiger neuer Sätze über die Anzahl aller, sowie der eigentlichen Darstellungen einer ganzen Zahl durch bestimmte Formen. Zu dem Behufe soll zunächst im ersten Paragraphe eine auf den grössten gemeinschaftlichen Theiler eines Systems von ganzen Zahlen bezügliche Formel ermittelt und gelegentlich auf mehrere specielle Fälle angewendet werden, während im zweiten die mit Hilfe einiger der gefundenen Beziehungen und von bekannten Theoremen Jacobi's, Eisenstein's und Liouville's leicht zu beweisenden Theoreme aufgestellt werden.

I. In der Summe

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} F([n, x_1, x_2, \ldots, x_s])$$

tritt das Glied $F(d)$, wo d irgend ein Theiler von n ist, so oft auf, als es Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_s$ gibt, welche den Beziehungen

$$x_1 = dy_1,\ x_2 = dy_2, \ldots,\ x_s = dy_s \qquad (y_\lambda = \text{ganze Zahl})$$

$$\left[\frac{n}{d}, y_1, y_2, \ldots, y_s\right] = 1$$

genügen, d. i. also so vielmal, als dem Intervalle $1 \ldots \frac{n}{d}$ angehörige Systeme von s ganzen Zahlen existiren, deren grösster

gemeinsamer Theiler zu n theilerfremd ist, und demnach hat man die Relation

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} F([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]) = \sum_d F(d)\, \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right),$$

in welcher die Summation nach d über alle Theiler von n zu erstrecken ist.

Berücksichtigt man, dass

$$\varphi_s(n) = \sum_d d^s \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

ist, so kann man derselben sofort eine der zwei folgenden Gestalten geben:

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} F([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]) = \sum_d d^s f\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} F([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]) = \sum_d \chi(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

wo

$$\sum_d f(d) = F(n)$$

$$\sum_d F\left(\frac{n}{d}\right) d^s = \chi(n)$$

ist.

Setzt man in diesen Gleichungen

$$f(x) = \mu \sqrt[r]{x}, \quad \lambda_r(x), \quad \alpha(x),$$

so erhält man für die Anzahl $\varphi_{r,s}(n)$ derjenigen Systeme von s beliebigen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keine r^{te} Potenz (ausser 1) gemein hat, die Ausdrücke

$$\varphi_{r,s}(n) = \sum_{d_r} d_r^s \mu\left(\sqrt[r]{\frac{n}{d_r}}\right)$$
$$= \sum_d \mu_r(d)\varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$
$$= \sum_d \bar{\psi}_{r,s}(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

für die Anzahl $\bar{\chi}_{r,s}(n)$ derjenigen Systeme von s dem Intervalle $1 \ldots n$ beliebig entnommenen ganzen Zahlen, welche mit n ein $(s+1)$-gliedriges Zahlensystem bilden, dessen grösster gemeinsamer Theiler eine r^{te} Potenz ist, die Werthe

$$\bar{\chi}_{r,s}(n) = \sum_{d_r} \varphi_s(d_r)$$
$$= \sum_d \lambda_r(d)\varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$
$$= \sum_d \rho_{s,r}(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

und für die Summe $A_s(n)$ derjenigen Werthe, welche die Function $f_1(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene grössten gemeinsamen Theiler von s beliebig herauszugreifenden ganzen Zahlen des Bereiches $1 \ldots n$ durchläuft, welche Primfactoren von n sind, die Werthe

$$A_s(n) = \sum_d \alpha\left(\frac{n}{d}\right) d^s$$
$$= \sum_p f_1(p)\varphi_s\left(\frac{n}{p}\right)$$

und speciell für die $A_s^{(0)}(n)$ Anzahl der zuletzt genannten s-gliedrigen Zahlensysteme

$$A_s^{(0)}(n) = \sum_d \alpha_0\left(\frac{n}{d}\right) d^s$$
$$= \sum_p \varphi_s\left(\frac{n}{p}\right)$$
$$= \sum_d \mu\left(\frac{n}{d}\right) p_s(d),$$

wo die Summationen nach d über alle, jene nach d_r aber nur über diejenigen Theiler von n zu erstrecken sind, deren complementärer Divisor eine r^{te} Potenz ist, die Summationen nach p sich auf alle Primtheiler von n beziehen, mit $\overline{\psi}_{r,s}(x)$ die Summe der s^{ten} Potenzen derjenigen Theiler von x bezeichnet wird, deren complementärer Divisor durch keine r^{te} Potenz theilbar ist, und $p_s(x)$ die Summe der s^{ten} Potenzen jener Theiler von x vorstellt, deren complementärer Divisor eine Primzahl ist.

Es mag bei dieser Gelegenheit nur erwähnt werden, dass aus den obigen Erörterungen die Beziehungen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi_{r,s}(n)}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta(\sigma-s)}{\zeta(r\sigma)}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\overline{\chi}_{r,s}(n)}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta(r\sigma)\,\zeta(\sigma-s)}{\zeta(\sigma)}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\overline{\psi}_{r,s}(n)}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta(\sigma)\,\zeta(\sigma-s)}{\zeta(r\sigma)}$$

folgen.

Die Substitutionen

$$f(x) = x^{t}, \quad \left(\frac{\Delta}{x}\right) \ (\Delta = \text{Fundamentaldiscriminante}),$$

$$\varphi_t(x), \quad f_{\beta-1}(x), \quad \frac{f_{\beta-2}(x)\,\psi(x^2\pi^{\beta-3}(x))}{(\beta-2)^{\omega(x)}}$$

liefern die Relationen

$$\begin{aligned}\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} \psi_t([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]) &= \sum_d \psi_t(d)\,\varphi_s\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_d \psi_s(d)\,\varphi_t\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= n^t \psi_{s-t}(n)\end{aligned}$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} \varphi([n, x_1, x_2, \ldots, x_s], \Delta) = \tau n^s \sum_d \left(\frac{\Delta}{d}\right) \frac{1}{d^s}$$ (τ = Anzahl der Transformationen einer Form der Discriminante Δ in sich selbst)

$$= \sum_d \varphi(d, \Delta) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]^t = \sum_d d^t \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_d d^s \varphi_t\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} f_\beta([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]) = \sum_d f_\beta(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_d f_{\beta-1}\left(\frac{n}{d}\right) d^s$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} \frac{f_{\beta-1}([n, x_1, x_2, \ldots, x_s])\, \psi([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]^2 \pi^{\beta-2}([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]))}{(\beta-1)^{\bar{\omega}([n, x_1, x_2, \ldots, x_s])}} = \sum_d \frac{f_{\beta-2}\left(\frac{n}{d}\right) \psi\left(\frac{n^2}{d^2} \pi^{\beta-3}\left(\frac{n}{d}\right)\right) d^s}{(\beta-2)^{\bar{\omega}\left(\frac{n}{d}\right)}}$$

$$= \sum_d \frac{f_{\beta-1}(d)\, \psi(d^2 \pi^{\beta-2}(d))}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}} \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$

und speciell

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} \omega([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]) = \sum_d \omega(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$
$$= \sum_d \mu_2\left(\frac{n}{d}\right) d^s$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} \psi^2([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]) = \sum_d \psi^2(d) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$
$$= \sum_d \omega\left(\frac{n}{d}\right) d^s$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} \psi([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]^2) = \sum_d \psi(d^2) \varphi_s\left(\frac{n}{d}\right)$$
$$= \sum_d \psi^2\left(\frac{n}{d}\right) d^s,$$

aus denen u. A. die folgenden Formeln sich ergeben:

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} \psi_t([n, x_1, x_2, \ldots, x_s]) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_t = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_t = n} \psi_s([n, x_1, x_2, \ldots, x_t])$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} [n, x_1, x_2, \ldots, x_s] = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_t = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_t = n} [n, x_1, x_2, \ldots, x_t]^s.$$

§. 2. Auf Grund der im vorigen Paragraphe aufgestellten Formeln kann man nun für die Anzahl aller, sowie der eigentlichen Darstellungen einer ganzen Zahl durch gewisse Formen eine Reihe von Sätzen aufstellen, deren grösster Theil einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen dieser Anzahl und einer für jede Form besonderen Function der grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit den einzelnen demjenigen Bereiche, dessen Grenzen 1 und die dargestellte Zahl sind, beliebig entnehmbaren Zahlensystemen von einer Elementenanzahl, die von der darstellenden Form abhängt,

aufdeckt. Von diesen Theoremen mögen hier die folgenden angeführt werden:

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Anzahl der Theiler, welche die einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dieselbe nicht überschreitenden ganzen Zahlen besitzen.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors der dargestellten Zahl mit der Anzahl der den complementären Divisor nicht überschreitenden, zu demselben theilerfremden ganzen Zahlen multiplicirt.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Anzahl der Zerlegungen der einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dieselbe nicht überschreitenden ganzen Zahlen in zwei theilerfremde Factoren.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von vier Quadraten ist gleich der achtfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zerlegungen jedes Theilers der dargestellten Zahl in zwei theilerfremde Factoren mit der Anzahl der den complementären Divisor nicht überschreitenden zu demselben theilerfremden ganzen Zahlen multiplicirt.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Anzahl der Theiler, welche die einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dreigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen werden, besitzen.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors der dargestellten Zahl mit der Anzahl derjenigen dreigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren

Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und ein zu demselben theilerfremdes System bilden.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Anzahl der Zerlegungen der einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen dreigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen werden, in zwei theilerfremde Factoren.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zerlegungen jedes Theilers der dargestellten Zahl in zwei theilerfremde Factoren mit der Anzahl derjenigen dreigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu diesem theilerfremden grössten gemeinsamen Divisor besitzen.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von acht Quadraten ist gleich der sechzehnfachen über alle Theiler der dargestellten Zahl ausgedehnte Summe der Anzahlen derjenigen einem Intervalle, dessen Grenzen 1 und der bezügliche Divisor sind, beliebig entnommenen dreigliedrigen Zahlensysteme, deren grösster gemeinsamer Theiler mit diesem Divisor kein Quadrat (ausser 1) gemein hat.

Die Anzahl aller Darstellungen einer einfachgeraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Anzahl der Theiler, welche die einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen fünfgliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen sind, besitzen.

Die Anzahl aller Darstellungen einer einfach geraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Theiler jedes Divisors der dargestellten Zahl mit der Anzahl derjenigen fünfgliedrigen

Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu diesem theilerfremden grössten gemeinschaftlichen Theiler besitzen.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer einfach geraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Anzahl der Zerlegungen der einzelnen grössten gemeinschaftlichen Theiler der dargestellten Zahl mit allen fünfgliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen werden, in zwei theilerfremde Factoren.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer einfachgeraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl der Zerlegungen jedes Theilers der dargestellten Zahl in zwei theilerfremde Factoren mit der Anzahl derjenigen fünfgliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu diesem theilerfremden grössten gemeinsamen Divisor besitzen.

Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer einfachgeraden Zahl durch eine Summe von zwölf Quadraten ist gleich der zweihundertvierundsechzigfachen über alle Theiler der dargestellten Zahl ausgedehnten Summe der Anzahlen derjenigen einem Intervalle, dessen Grenzen 1 und der betreffende Divisor sind, beliebig entnommenen fünfgliedrigen Zahlensysteme, deren grösster gemeinsamer Theiler mit diesem Divisor keinen quadratischen Factor (ausser 1) gemein hat.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von sechs Quadraten ist gleich der zwölffachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen der grössten gemeinschaftlichen Divisoren der dargestellten Zahl mit allen zweigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnommen sind, durch eine Summe von zwei Quadraten.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl durch eine Summe von sechs

Quadraten ist gleich der zwölffachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen jedes Divisors der erwähnten Zahl durch eine Summe von zwei Quadraten mit der Anzahl derjenigen zweigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu demselben theilerfremden grössten gemeinsamen Theiler besitzen.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer Zahl von der Form $4s+3$ durch eine Summe von zehn Quadraten ist gleich der zwölffachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen der grössten gemeinschaftlichen Divisoren der dargestellten Zahl mit allen viergliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Gebiete beliebig entnommen werden, durch eine Summe von zwei Quadraten.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer Zahl von der Form $4s+3$ durch eine Summe von zehn Quadraten ist gleich der zwölffachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen jedes Theilers der erwähnten Zahl durch eine Summe von zwei Quadraten mit der Anzahl derjenigen viergliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, deren Elemente den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu demselben theilerfremden grössten gemeinsamen Theiler besitzen.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von drei einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der $2\left\{4-\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$-fachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen, den Bedingungen $y \geqq 0$, $2x > 3y$ genügenden Darstellungen der einzelnen grössten gemeinsamen Theiler der dargestellten Zahl und aller dieselbe nicht übertreffenden ganzen Zahlen durch die binäre quadratische Form $(1, 0, -2)$.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von drei einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der

$2\left\{4-\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$-fachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen, die Bedingungen $y \geqq 0$, $2x > 3y$ erfüllenden Darstellungen jedes Divisors der dargestellten Zahl durch die binäre quadratische Form (1, 0, —2) mit der Anzahl der den complementären Divisor nicht übertreffenden, zu demselben theilerfremden ganzen Zahlen multiplicirt.

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von fünf einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der $\frac{1}{6}\left\{4-\left(\frac{-2}{n}\right)\right\}$-fachen Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen der einzelnen grössten gemeinsamen Theiler der dargestellten Zahl mit allen zweigliedrigen Zahlensystemen, deren Elemente dem durch 1 und die dargestellte Zahl begrenzten Bereiche beliebig entnehmbar sind, durch die binäre quadratische Form (1, 0, 2).

Die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden Zahl n durch eine Summe von fünf einfachen und einem doppelten Quadrate ist gleich der $\frac{1}{6}\left\{4-\left(\frac{-2}{n}\right)\right\}$-fachen Summe der Producte, welche man erhält, wenn man die Anzahl aller, beziehungsweise der eigentlichen Darstellungen jedes Divisors der dargestellten Zahl durch die binäre quadratische Form (1, 0, 2) mit der Anzahl derjenigen zweigliedrigen Zahlensysteme multiplicirt, welche den complementären Divisor nicht überschreiten und einen zu demselben theilerfremden grössten gemeinsamen Divisor besitzen.

Ich will bei dieser Gelegenheit als Berichtigung eines sinnstörenden Druckfehlers meiner im Decemberhefte 1893 dieser Sitzungsberichte enthaltenen Mittheilung »Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung« bemerken, dass der Coëfficient des auf der rechten Seite der vorletzten Gleichung auf S. 13 stehenden Integrales zu lauten hat $\frac{\operatorname{arc}\cos\frac{b}{2\sqrt{ac}}}{\sqrt{4ac-b^2}}$.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



IV. SITZUNG VOM 1. FEBRUAR 1894.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 25. Jänner l. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrath Prof. Dr. Emil Weyr erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien aus dieser Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Wien übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Die Stauungspapille und ihre Bedeutung als eines Zeichens von gesteigertem Druck in der Höhle des Schädels«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium in Wien (IV. Bezirk), übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (9. Fortsetzung).

Der Secretär legt folgende behufs Wahrung der Priorität eingesendete versiegelte Schreiben vor, und zwar:

Von Herrn Dr. Alexander Marmorek in Wien

1. »Neues Heilverfahren gegen die septischen Krankheiten«,
2. »Über den Ersatz der chirurgischen Drainage«;

ferner von Herrn Friedrich Strohmer, Vorstand der chemisch-technischen Versuchsstation des Centralvereines für

Rübenzucker-Industrie in der österreichisch-ungarischen Monarchie in Wien

3. »Beitrag zur Prophylaxis parasitärer Krankheiten der landwirthschaftlichen Culturpflanzen«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht zwei im pharmacognostischen Institute der Universität Lemberg ausgeführte Arbeiten:

1. »Über die α-Epichlorhydrin-Verbindungen« von Prof. L. Niemiłowicz.
2. »Über eine neue pyknometrische Dichtebestimmungsmethode der weichen Fette« von Z. Zawalkiewicz.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Obermayer, A. v., Zur Erinnerung an Josef Stefan, k. k. Hofrath und Professor der Physik an der Universität in Wien. Wien und Leipzig, 1893; 8°.

V. SITZUNG VOM 8. FEBRUAR 1894.

In Verhinderung des Herrn Vicepräsidenten führt Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer den Vorsitz.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 6. Februar l. J. in Abbazia erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrath Prof. Dr. Theodor Billroth erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Wiesner übersendet die dritte pflanzenphysiologische Mittheilung aus Buitenzorg unter dem Titel: »Über den vorherrschend ombrophilen Charakter des Laubes der Tropengewächse«.

Von dem k. u. k. Oberlieutenant Herrn Victor Dziubiński in Peterwardein wird ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität eingesendet, welches die Aufschrift führt: »Gaskraft-Motor«.

Das w. M. Herr Hofrath A. Kerner v. Marilaun bespricht eine Abhandlung von Dr. E. v. Halácsy, welche den Titel führt: »Beiträge zur Flora von Epirus«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Wilhelm Webers Werke, herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. IV. Bd. Galvanismus und Elektrodynamik. II. Theil. Besorgt durch Heinrich Weber. (Mit 4 Tafeln und Abbildungen im Texte.) Berlin, 1894; 8°. — VI. Bd. Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Besorgt durch Friedrich Merkel und Otto Fischer. (Mit 17 Tafeln und Abbildungen im Texte.) Berlin, 1894; 8°.

VI. SITZUNG VOM 15. FEBRUAR 1894.

Das Executiv-Comité des unter dem Allerhöchsten Protectorate Sr. k. und k. apost. Majestät stehenden VIII. Internationalen Congresses für Hygiene und Demographie ladet die kaiserliche Akademie zur Theilnahme an diesem Congresse, welcher vom 1. bis 9. September d. J. in Budapest tagen wird, ein und übermittelt ein hierauf bezügliches vorläufiges Programm.

Das w. M. Herr Hofrath Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung von Dr. Ad. Jolles in Wien, betitelt: »Das Margarin, seine Verdaulichkeit und sein Nährwerth im Vergleich zu reiner Naturbutter«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Dr. J. Herzig ausgeführte Arbeit: »Über Brasilin und Hämatoxylin«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Abhandlung von Dr. K. Zsigmondy in Wien: »Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Functionen n-ten Grades von x, welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Denkschriften der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. (3. Bd. II. Theil). Vergleichend-anatomische und entwickelungsgeschichtliche Untersuchungen

an Walthieren, von W. Kükenthal. (Mit 12 Tafeln und 115 Abbildungen im Text.) Jena, 1893; 4°.

Mitscherlich Alexander, Erinnerung an Eilhard Mitscherlich 1794—1863. Berlin, 1894; 8°.

The collected Papers of Sir W. Bowman. (Vol. I and II.) Edited for the Committee of the »Bowman Testimonial Fund« by J. Burdon-Sanderson and J. W. Hulke. Presented by Harriet Lady Bowman. London, 1892; 4°.

Über die Anzahl derjenigen ganzen ganzzahligen Functionen n^{ten} Grades von x, welche in Bezug auf einen gegebenen Primzahlmodul eine vorgeschriebene Anzahl von Wurzeln besitzen

von

K. Zsigmondy in Wien.

1.

Im Folgenden werden wie gewöhnlich zwei Polynome von x mit ganzzahligen Coëfficienten nur dann als nach dem Primzahlmodul p wesentlich von einander verschieden angesehen, wenn wenigstens ein Coëfficient in dem einen modulo p nicht congruent ist dem entsprechenden Coëfficienten derselben Potenz von x in dem anderen Polynom.

Ferner wird der Coëfficient der höchsten Potenz von x in jeder Congruenz gleich der Einheit angenommen, was stets durch Multiplication mit einem geeigneten Factor erreicht werden kann.

In einer Congruenz ν^{ten} Grades bleiben mithin ν Coëfficienten willkürlich; da jeder ein vollständiges Restsystem modulo p durchlaufen kann, erkennt man, dass es nur p^ν verschiedene Congruenzen ν^{ten} Grades gibt.

2.

Um die Anzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades zu finden, welche die $\varkappa$ vorgegebenen verschiedenen Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa \tag{I}$$

als Wurzeln nach dem Modul p nicht besitzen, hat man aus der Gesammtheit S der p^n verschiedenen Congruenzen

$$f_n(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod } p)$$

diejenigen auszuscheiden, welche durch einen der linearen Factoren $x-a_j$ $(j = 1, 2, \ldots \varkappa)$ theilbar sind.

Es kann dies nach einem Verfahren, das ich bereits bei einer anderen Gelegenheit verwendet habe, leicht durchgeführt werden.[1]

Bekanntlich lässt sich die linke Seite jeder Congruenz

$$f_n(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod } p),$$

welche die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$ besitzt, nur auf eine Weise modulo p in die Form

$$f_n(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_i)f_{n-i}(x) \qquad \text{(II)}$$

bringen, wo $f_{n-i}(x)$ ein Polynom $n-i^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, in welchem der Coëfficient der höchsten Potenz von x wieder gleich der Einheit ist. Nimmt man für $f_{n-i}(x)$ alle p^{n-i} modulo p verschiedenen Functionen $n-i^{\text{ten}}$ Grades, so liefern die zugehörigen $f_n(x)$ ein bestimmtes in S enthaltenes System von Congruenzen $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$.

Fügt man zu dem Systeme S alle diejenigen Systeme $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$ hinzu, bei welchen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ irgend eine Combination aus einer geraden Anzahl der Elemente der Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ bedeutet und scheidet man hierauf alle diejenigen Systeme aus, bei denen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ eine Combination aus einer ungeraden Anzahl von den genannten Elementen darstellt, so bleibt in dem schliesslich sich ergebenden Systeme die Gesammtheit derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades übrig, welche die $\varkappa$ Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ als Wurzeln nicht besitzen.

Es lässt sich nämlich, wie schon erwähnt, jede Congruenz $f_n(x) \equiv 0$, welche die verschiedenen, der Reihe (I) angehörigen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ zulässt und für keinen weiteren

---

[1] Zur Verallgemeinerung der Function $\varphi(m)$ in der Zahlentheorie. Journ. für r. und ang. Math., Bd. 111.

Werth der Reihe (I) verschwindet, eindeutig modulo p in die Form (II) bringen, wo dann $f_{n-i}(x)$ durch keinen von $x-\alpha_j$ $(j=1,2,\ldots i)$ verschiedenen linearen Factor $x-a_\rho$ $(\rho=1,2,\ldots\varkappa)$ theilbar ist. Die Congruenz $f_n(x)\equiv 0$ wurde somit

$$\binom{i}{2}+\binom{i}{4}+\ldots\text{mal}$$

hinzugefügt und

$$\binom{i}{1}+\binom{i}{3}+\ldots\text{mal}$$

ausgeschieden, kommt daher im Ganzen

$$1-\binom{i}{1}+\binom{i}{2}-\binom{i}{3}+\ldots=(1-1)^i\text{mal},$$

d. h. überhaupt nicht vor.

Da den p^n Congruenzen $f_n(x)\equiv 0 \pmod p$ im Ganzen

$$\binom{\varkappa}{2}p^{n-2}+\binom{\varkappa}{4}p^{n-4}+\ldots$$

Congruenzen hinzugefügt, und hingegen

$$\binom{\varkappa}{1}p^{n-1}+\binom{\varkappa}{3}p^{n-3}+\ldots$$

Congruenzen weggenommen wurden, erhält man das folgende Theorem:

Die Anzahl $\psi(n,\varkappa)$ derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades nach einem Primzahlmodul p, welche $\varkappa$ vorgegebene verschiedene Zahlen als Wurzeln nicht besitzen, wird bestimmt durch den Ausdruck

$$\psi(n,\varkappa)=p^n-\binom{\varkappa}{1}p^{n-1}+\binom{\varkappa}{2}p^{n-2}-\ldots+(-1)^n\binom{\varkappa}{n}. \quad \text{(III)}$$

3.

Der eben für $\psi(n,\varkappa)$ gefundene Ausdruck nimmt im Falle $n\geqq\varkappa$ die besonders einfache Gestalt

$$\psi(n, x) = p^{n-x}(p-1)^x \tag{IV}$$

an, während für jeden möglichen Werth von n die Recursionsformel

$$\psi(n, x) = p\psi(n-1, x) + (-1)^n \binom{x}{n}$$

besteht.

Ferner folgt unmittelbar aus der Gleichung (III) die Relation

$$\psi(n, x+1) = \psi(n, x) - \psi(n-1, x), \tag{V}$$

welche ihrerseits wieder im Zusammenhalte mit dem Anfangswerthe $\psi(n, 0) = p^n$ die Function $\psi(n, x)$ charakterisirt. Man erhält nämlich durch wiederholte Anwendung von (V) die Gleichung

$$\psi(n, x+i) = \psi(n, x) - \binom{i}{1}\psi(n-1, x) + \binom{i}{2}\psi(n-2, x) - \ldots, \tag{VI}$$

welche in der That für $x = 0$ in den Ausdruck (III) übergeht.

Endlich lässt sich auf Grund der Beziehung (V) die Relation

$$p^n = \psi(n, x) + \binom{x}{1}\psi(n-1, x-1) + \binom{x}{2}\psi(n-2, x-2) + \ldots$$

mittelst des Schlusses von x auf $x+1$ bewahrheiten.

4.

Von besonderem Interesse ist der Fall $x = p$. Man erhält alsdann für die Anzahl $\psi(n)$ derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades nach einem Primzahlmodul p, die überhaupt keine Wurzeln besitzen, gemäss der Gleichung (III) den Ausdruck

$$\psi(n) = p^n - \binom{p}{1}p^{n-1} + \binom{p}{2}p^{n-2} - \ldots$$

Einen Zusammenhang zwischen den Functionen $\psi(n)$ und $\psi(n, x)$ vermittelt die Relation (VI). Wird in derselben $i = p - x$ gesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$\psi(n) = \psi(n, x) - \binom{p-x}{1}\psi(n-1, x) + \binom{p-x}{2}\psi(n-2, x) - \ldots,$$

welche, wie eine einfache auf die Bedeutung von $\psi(n, x)$ gegründete Überlegung lehrt, in folgender Art umgekehrt werden kann:

$$\psi(n, x) = \psi(n) + \binom{\overline{p-x+1}-1}{1}\psi(n-1) +$$

$$+ \binom{\overline{p-x+2}-1}{2}\psi(n-2) + \ldots \quad \text{(VII)}$$

Die folgenden Sätze fliessen unmittelbar aus der Bedeutung der Function $\psi(n)$:

1. Die Anzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades modulo p, welche überhaupt Wurzeln zulassen, wird durch die Differenz

$$p^n - \psi(n)$$

bestimmt.

2. Die Anzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades, die genau i verschiedene Wurzeln besitzen, wird durch das Product

$$\binom{p}{i}\psi(n-i)$$

bestimmt.

3. Die Anzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades, die i verschiedene und gleiche Wurzeln haben, wird durch das Product

$$\binom{p+i-1}{i}\psi(n-i)$$

bestimmt.

Nach dem Satze 2 (beziehungsweise 3) erhält man als die Gesammtzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades, die bloss verschiedene, beziehungsweise verschiedene und gleiche Wurzeln besitzen, die Summe

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{p}{i}\psi(n-i),$$

beziehungsweise

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{p+i-1}{i} \psi(n-i).$$

Das letztere Resultat liefert im Zusammenhalte mit dem Satze 1 die Recursionsformel

$$\psi(n) = p^n - \sum_{i=1}^{n} \binom{p+i-1}{i} \psi(n-i),$$

welche sich auch aus der Gleichung (VII) für den speciellen Werth $\varkappa = 0$ ergibt. Übrigens kann die zuletzt gefundene Formel auch in der folgenden Art verallgemeinert werden:

$$\psi(n, \varkappa) = p^n - \sum_{i=1}^{n} \binom{\varkappa+i-1}{i} \psi(n-i, \varkappa).$$

5.

Wird im Falle $\varkappa = p$ noch ausserdem $n \geqq p$ vorausgesetzt, so besteht gemäss der Relation (IV) die Gleichung

$$\psi(n) = p^{n-p}(p-1)^p.$$

Versteht man unter dem Quotienten $\frac{\psi(n)}{p^n}$ die mittlere Dichte derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades, die keine Wurzeln besitzen, so kann man das folgende Theorem aussprechen:

Die mittlere Dichte derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades modulo p, welche keine Wurzeln zulassen, besitzt für $n \geqq p$ den von n unabhängigen Werth $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^p$ und nähert sich mit wachsendem Modul der Grenze e^{-1}.

Dieser Satz gewährt einen Einblick in die Wahrscheinlichkeit, dass eine willkürlich angenommene Congruenz n^{ten} Grades Wurzeln besitzt, im Falle, als $n \geqq p$ ist und p einen grossen Werth hat; sie ist etwas kleiner als $\frac{2}{3}$.

6.

Die vorstehenden Betrachtungen gestatten auch eine Anwendung auf den von Kronecker eingeführten Begriff des Ranges eines Systems von Grössen, worauf mein hochverehrter Lehrer Herr Prof. Gegenbauer mich aufmerksam zu machen die Güte hatte.

Nach einem Satze von Herrn Julius König, den Herr Gustav Rados bewiesen hat,[1] besitzt die Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p} \qquad \text{(VIII)}$$

unter der Voraussetzung, dass a_{p-2} nicht durch die ungerade Primzahl p theilbar ist, dann und nur dann genau $p-1-i$ verschiedene Wurzeln, wenn alle Subdeterminanten $(i+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinante

$$|a_{j+\varkappa}| \qquad \begin{pmatrix} j, \varkappa = 0, 1, \ldots p-2 \\ a_{j+p-1} = a_j \end{pmatrix},$$

aber nicht alle Subdeterminanten i^{ter} Ordnung modulo p verschwinden, wenn also nach der Definition Kronecker's[2] das System der $(p-1)^2$ Grössen

$$a_{j+\varkappa}$$

den Rang i bezüglich des Moduls p besitzt.

Bezeichnet nun a_{r-1} die erste durch p nicht theilbare Zahl der Reihe

$$a_0, a_1, \ldots a_{p-2},$$

so soll gesagt werden, das Grössensystem

$$a_{j+\varkappa} \qquad \begin{pmatrix} j, \varkappa = 0, 1, \ldots p-2 \\ a_{j+p-1} = a_j \end{pmatrix}$$

habe die Ordnung r modulo p.

---

[1] Rados, Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades. Journ. . r. und ang. Math., Bd. 99, S. 258—260.

[2] Vergl. z. B. Kronecker, Periodensyst. von Functionen reeller Var., Berliner Sitzungsber., 1884, XLVI.

In diesem Falle besitzt die Congruenz (VIII) den Grad $p-1-r$ und der Coëfficient a_{r-1} kann nach Multiplication der Congruenz mit einer geeigneten Zahl gleich der Einheit angenommen werden. Die Grössen $a_{j+\varkappa}$ erleiden hiedurch nur insoferne eine Veränderung, als alle mit einem und demselben durch p nicht theilbaren Factor multiplicirt erscheinen. Zwei Grössensysteme aber, welche sich bloss in der angegebenen Art unterscheiden, haben augenscheinlich denselben Rang und sollen als nicht wesentlich von einander verschieden betrachtet werden.

Nach einem dem Satze 2 in Nr. 4 analogen Satz ist die Anzahl derjenigen Congruenzen vom Grade $p-1-r$, welche genau $p-1-i$ verschiedene Wurzeln (den Werth 0 ausgeschlossen) besitzen, gleich dem Producte

$$\binom{p-1}{p-1-i}\psi(\overline{p-1-r}-\overline{p-1-i}).$$

Man ist mithin zu dem folgenden Theorem gelangt:

Es gibt $\binom{p-1}{i}\psi(i-r)$ wesentlich von einander verschiedene Systeme $a_{j+\varkappa}$ vom Range i und der Ordnung r modulo p.

$$\left(\begin{matrix} j, \varkappa = 0, 1, \ldots p-2, \\ a_{j+\overline{p-1}} = a_j, \quad a_{p-2} \not\equiv 0 \pmod p \end{matrix}\right).$$ [1]

7.

Zum Schlusse mögen noch folgende Bemerkungen Platz finden.

Zu der Gleichung (III) hätte man auch noch auf einem anderen Wege successive gelangen können.

Scheidet man nämlich zunächst aus der Gesammtheit der p^n Congruenzen $f_n(x) \equiv 0 \pmod p$ alle p^{n-1} Congruenzen,

[1] Man vergleiche hiezu den Ausdruck für die Anzahl aller möglichen modulo p verschiedenen Systeme vom Range i mit bestimmter Zeilen- und Colonenzahl, welchen Herr Georg Landsberg im Journ. f. r. und ang. Math. Bd. 111, S. 87 angibt.

welche den Factor $x-a_1$ besitzen, aus, so bleiben $\psi(n, 1) = p^n - p^{n-1}$ Congruenzen übrig. Von diesen hat man wieder diejenigen, welche den Factor $x-a_2$, also die Form $(x-a_2) . f_{n-1}(x) \equiv 0$ haben, zu entfernen, wo jedoch das im Übrigen beliebige Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f_{n-1}(x)$ nicht durch $x-a_1$ theilbar ist. Die Anzahl der zulässigen Functionen $f_{n-1}(x)$ wurde aber eben ermittelt; sie wird ausgedrückt durch $\psi(n-1, 1)$. Es bleiben mithin $\psi(n, 2) = \psi(n, 1) - \psi(n-1, 1)$ Congruenzen stehen, welche weder durch $x-a_1$, noch durch $x-a_2$ theilbar sind. Von diesen hat man wieder diejenigen wegzunehmen, welche den Factor $x-a_3$, also die Form $(x-a_3) f_{n-1}(x) \equiv 0$ besitzen, deren Anzahl eben als $\psi(n-1, 2)$ ermittelt wurde u. s. f.

Man gelangt auf diese Art allgemein zu der Relation (V), deren wahre Bedeutung hier in Evidenz tritt und beweist auf Grund derselben mittelst vollständiger Induction die Gleichung (III).

Schliesslich sei ausdrücklich hervorgehoben, dass das in Nr. 2 auseinandergesetzte Verfahren wesentlich auf der Eindeutigkeit der Form (II) modulo p beruht, und dass dasselbe auch in anderen Fällen, wo ebenfalls eine eindeutige Zerlegung stattfindet, angewendet werden kann.

Beispielsweise ist bekanntlich die Zerlegung von $f(x)$ überhaupt in irreductible Factoren modulo p nur auf eine Weise möglich. Bezeichnet man demnach mit $\chi(i)$ die Anzahl der irreductiblen Functionen i^{ten} Grades modulo p, so wird die Anzahl derjenigen Congruenzen n^{ten} Grades, die keinen irreductiblen Factor i^{ten} Grades zulassen, auf Grund des angegebenen Verfahrens durch den Ausdruck

$$\Psi(n, \chi(i)) = p^n - \binom{\chi^{(i)}}{1} p^{n-i} + \binom{\chi^{(i)}}{2} p^{n-2i} - \ldots + \ldots$$

bestimmt werden.

Es leuchtet ein, dass $\Psi(n, \chi(i))$ analogen Formeln, wie sie in Nr. 3 für $\psi(n, \varkappa)$ entwickelt wurden, genügen wird. Hier sei bloss das eine Resultat hervorgehoben:

Die mittlere Dichte derjenigen Functionen n^{ten} Grades, die modulo p durch keinen irreductiblen Factor i^{ten} Grades theilbar sind, nähert sich mit wachsendem Modul der Grenze $e^{-\frac{1}{i}}$ $(n > i . \chi(i))$

Man gelangt zu diesem Satze auf dem nämlichen Wege, der in Nr. 4 eingeschlagen wurde, unter Benutzung des in der Literatur[1] vorfindlichen Ausdrucks für

$$\chi(i) = \frac{\sum_d p^d \mu\left(\frac{i}{d}\right)}{i},$$

wo die Summe sich auf alle Theiler von i zu erstrecken hat und $\mu(x)$ die bekannte zahlentheoretische Function bedeutet.

[1] Serret, Algebra II, deutsche Ausgabe, 1868, S. 111.

Über die Beziehung zwischen Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne

von

Dr. **Gustav Jäger.**

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1894.)

In seiner Abhandlung »Zählung der nördlichen Sterne im Bonner Verzeichnisse nach Grössen«[1] zeigt K. v. Littrow, dass die Folgerungen aus der Annahme, die Sterne haben im Allgemeinen dieselbe Entfernung von einander und dieselbe Helligkeit, zu keinem Widerspruche mit den thatsächlichen Verhältnissen führen, wenn man sich auf die Sterne erster bis zwölfter Grösse beschränkt. Dabei verfährt er folgendermassen. Bezeichnen wir mit z_m die Zahl der Sterne bis inclusive einer gewissen Grössenclasse, und nennen wir analog r_{m+1} den Radius der betreffenden Kugel, so ist, wenn k eine Constante bedeutet,

$$z_m = kr^3_{m+1} \tag{1}$$

oder

$$r_{m+1} = \sqrt[3]{\frac{z_m}{k}}. \tag{2}$$

Alle Sterne der m-Grösse befinden sich in der Hohlkugel zwischen den Radien r_m und r_{m+1}. Die Helligkeit der Sterne an der inneren Grenze einer solchen Hohlkugel kann durch $\frac{c}{r^2_m}$, wo c wieder eine Constante, an der äusseren durch $\frac{c}{r^2_{m+1}}$ ausgedrückt werden, somit die mittlere Helligkeit H_m der Sterne dieser Hohlkugel durch

[1] Wiener Ber., LIX, S. 569 ff, 1869.

$$H_m = \frac{1}{r_{m+1} - r_m} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{cdr}{r^2} = \frac{c}{r_m r_{m+1}}. \tag{3}$$

Nach dem Sinne, in welchem man die Schätzung von Sterngrössen gewöhnlich auffasst, ist ferner

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{r_m}{r_{m+2}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_{m+1}}} = \delta, \tag{4}$$

eine Constante. Indem man nun für z_{m-1} und z_{m+1} die bekannten Zahlen von z_6 und z_8 einsetzt, ferner $H_1 = 1$ und $r_2 = 1$ macht, lassen sich aus den vorhandenen Gleichungen die Werthe für k, c und δ finden. Da nun weiter

$$\frac{r_m}{r_{m+1}} = \frac{r_{m+1}}{r_{m+2}},$$

so folgt nach Gleichung (4)

$$\frac{r_m}{r_{m+1}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_m}} = \sqrt{\delta},$$

folglich

$$z_{m-1} = z_m \sqrt{\delta^3}. \tag{5}$$

Die Zahl der Sterne m^{ter} Grösse allein ist gegeben durch

$$Z_m = z_m - z_{m-1} = z_m (1 - \sqrt{\delta^3}). \tag{6}$$

Berechnet man nach dieser Formel die Zahl der Sterne der verschiedenen Grössenclassen, so ist die Übereinstimmung mit der directen Zählung eine sehr befriedigende.

Wie man annehmen kann, die Helligkeit der Fixsterne sei durch deren Entfernung bedingt, so liegt es auch nahe, die wahren Eigenbewegungen der Sterne als durchschnittlich gleich und die scheinbare Verschiedenheit bloss als Folge der verschiedenen Entfernung zu betrachten. Auf Grund dieser Annahme findet Struve[1] folgende Tabelle.

---

[1] Siehe Klein, Fixsternhimmel, S. 123.

1. und 2. Classe;	Entfernung	1·00
3. »	»	1·32
4. »	»	1·62
5. »	»	2·00
6. »	»	2·45
7. »	»	2·56

Nimmt man hingegen die wahre Helligkeit als gleich gross an, so erhält man

1. und 2. Classe;	Entfernung	1·00
3. »	»	1·89
4. »	»	2·76
5. »	»	4·00
6. »	»	5·78
7. »	»	8·32

Diese beiden Zahlenreihen lassen sich nicht vereinen, und infolge dessen können die beiden Annahmen über die gleiche Vertheilung der Fixsterne, sowohl der Helligkeit, als auch der Eigenbewegung nach nicht gleichzeitig bestehen.

In neuerer Zeit hat nun O. Stumpe in seiner Abhandlung »Untersuchungen über die Bewegung des Sonnensystems«[1] gezeigt, dass sich die gleichmässige Vertheilung der Eigenbewegungen der Fixsterne aufrecht erhalten lässt. Er vereinigt zu dem Zwecke die Sterne in vier Gruppen, wie folgt:

1. Gruppe.	Jährliche Eigenbewegung	0"16—0"32. .	551 Sterne
2. »	» »	0·32—0·64. .	340 »
3. »	» »	0·64—1·28. .	105 »,
4. »	» »	1·28— ∞ . .	58 »

Stumpe folgert nun: »Da das Mittel der Eigenbewegungen für die vier Sterngruppen der Reihe nach

0"23, 0"43, 0"85, 2"39

ist, so erhält nicht nur die allerdings von vorneherein plausible Annahme, dass die Sterne mit grösserer Eigenbewegung uns

[1] Astr. Nachr. CXXV, S. 385 ff.

näher sind, als die mit geringerer, ihre volle Berechtigung, sondern es scheint sich sogar direct das Gesetz auszusprechen, dass die Entfernungen der Sterne umgekehrt proportional sind der Grösse ihrer Eigenbewegung.

Bemerkenswerth ist ferner, dass sich für die vier Sterngruppen ein Gang nach den Helligkeitsgruppen nicht zeigt. Es sind im Mittel die Helligkeiten der Sterne in den vier Gruppen

$$6\cdot 0^m, \quad 6\cdot 7^m, \quad 6\cdot 1^m, \quad 6\cdot 5^m.$$

Hieraus scheint hervorzugehen, dass die Grösse der Eigenbewegung ein sichereres Kriterium, die Entfernungsverhältnisse der Fixsterne zu bestimmen, bietet als die Helligkeit«.

So sehen wir denn, dass sowohl die eine Annahme, die Eigenbewegungen seien für alle Sterne gleich gross, als auch die Annahme, die Leuchtstärke sei im Allgemeinen für alle Sterne dieselbe, während eine die andere ausschliesst, eine jede für sich wohl bestehen kann. Zweck der folgenden Untersuchung ist nun, diese beiden Annahmen so zu verallgemeinern, dass nicht nur jede für sich als Bild der wirklichen Verhältnisse gelten kann, sondern gleichzeitig die eine durch die andere bedingt wird.

Wir lassen die Voraussetzung, dass die Lichtstärke für alle Sterne dieselbe sei, fallen, jedoch wollen wir die Annahme beibehalten, dass die Sterne ein und derselben Leuchtkraft im Raume gleichmässig vertheilt seien. Die scheinbare Helligkeit lässt sich dann wiederum, wenn wir die K. v. Littrow'sche Bezeichnungsweise beibehalten, nach Gleichung (3) darstellen durch

$$H_m = \frac{c'}{r'_m r'_{m+1}} = \frac{c''}{r''_m r''_{m+1}} = \ldots = \frac{c^{(n)}}{r^{(n)}_m r^{(n)}_{m+1}}.$$

Dabei sind also die verschiedenen c proportional der Lichtmenge, welche die entsprechenden Sterne in Wirklichkeit aussenden. Es folgt weiter

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{r'_m}{r'_{m+2}} = \frac{r''_m}{r''_{m+2}} = \ldots = \frac{r^{(n)}_m}{r^{(n)}_{m+2}} = \delta.$$

Bezeichnen wir nun mit z'_m die Zahl jener Sterne, welche innerhalb des Kugelraumes vom Radius r_{m+1} liegen und in

ihrer wahren Leuchtstärke der Constanten c' entsprechen, in gleicher Weise mit z''_m die Zahl jener Sterne, welche sich auf c'' und r''_{m+1} beziehen u. s. f., so ergibt sich

$$z'_m = k' r'^3_{m+1}, \quad z''_m = k'' r''^3_{m+1}, \ldots z^{(n)}_m = k^{(n)} r^{(n)3}_{m+1}.$$

Hiebei sind die verschiedenen k Constanten, welche lediglich von der Zahl der Sterne einer jeden Classe in einem bestimmten Volumen abhängen.

Nennen wir nun die Zahl sämmtlicher Sterne, deren Helligkeit gleich oder grösser als H_m ist, z_m, so ist

$$z_m = z'_m + z''_m + \ldots + z^{(n)}_m = k' r'^3_{m+1} + k'' r''^3_{m+1} + \ldots + k^{(n)} r^{(n)3}_{m+1}.$$

Ferner erhalten wir

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \sqrt[3]{\frac{z'_{m-1}}{z'_{m+1}}} = \sqrt[3]{\frac{z''_{m-1}}{z''_{m+1}}} = \ldots = \sqrt[3]{\frac{z^{(n)}_{m-1}}{z^{(n)}_{m+1}}} = \sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_{m+1}}} = \delta.$$

Das ist aber dieselbe Gleichung, wie Gleichung (4). Wir können daher auch hier dieselben Folgerungen machen, wie dort. Es ist ebenfalls

$$\sqrt[3]{\frac{z_{m-1}}{z_m}} = \sqrt{\delta}, \qquad z_{m-1} = z_m \sqrt{\delta^3},$$

und es ist die Zahl der Sterne m^{ter} Grösse durch die Gleichung

$$Z_m = z_m - z_{m-1} = z_m (1 - \sqrt{\delta^3})$$

gegeben.

Wie wir schon erwähnt haben, entspricht diese Gleichung den thatsächlichen Verhältnissen. Es hindert uns also gar nichts anzunehmen, dass die Lichtmengen, welche die verschiedenen Sterne aussenden, innerhalb des Intervalls $0 - \infty$ variiren können. Bedingung ist nur, dass die Sterne verschiedener Lichtstärke über den ganzen Himmelsraum gleichmässig vertheilt sind, was nach dem Obigen für die Sterne erster bis zwölfter Grösse zutrifft.

Wiederum finde ich hier, wie ich schon seinerzeit auf anderem Wege in der Abhandlung »Folgerungen aus den Eigenbewegungen der Fixsterne« [1] gezeigt habe, die grosse Analogie

---

[1] Monatsh. für Math. und Phys. II.

zwischen dem gasförmigen und dem Zustande des Weltalls. Nur sind hier die Sterne das, was wir dort Molekeln nennen. In einem Gase können wir nicht annehmen, dass einer jeden Molekel dieselbe Temperatur zukommt, sondern das, was wir die Temperatur eines Gases nennen, ist nur das Mittel der Temperaturen der einzelnen Molekeln, welche, nach der absoluten Temperaturscala gemessen, zwischen 0 und ∞ variiren können. Es ergibt sich das unmittelbar aus dem Maxwell'schen Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Molekeln in einem Gase, indem ja die Temperatur einer Molekel von der jeweiligen Geschwindigkeit derselben abhängig ist.

In gleicher Weise fanden wir nun auch für die Himmelskörper, dass die Temperaturen derselben — denn nach diesen richten sich ja die ausgestrahlten Lichtmengen — nach einem bestimmten Gesetze vertheilt sein müssen. Welcher Art jedoch dieses Gesetz ist, können wir aus dem Bisherigen nicht erschliessen, indem ja zwischen den verschiedenen Werthen von c und k die willkürlichsten Beziehungen angenommen werden können, ohne dass dadurch das Resultat unserer Untersuchung gestört wird.

Desgleichen ist ersichtlich, dass, wenn die wahren Eigenbewegungen der Himmelskörper im Allgemeinen gleich und die scheinbaren nur durch die verschiedene Entfernung der Sterne bedingt wären, die gleich grossen scheinbaren Eigenbewegungen sich auf die verschiedensten Sternclassen vertheilen müssten, da ja aus ein und derselben Entfernung von den verschiedenen Sternen uns ganz verschiedene Lichtmengen zugesandt werden können.

Damit wäre eigentlich schon der Widerspruch gelöst, welcher sich in den eingangs erwähnten Annahmen zeigt. Doch wir wollen uns damit noch nicht begnügen, sondern es soll auch für die Eigenbewegungen nachgewiesen werden, dass eine jede Annahme bezüglich der Vertheilung der wahren Eigenbewegungen für das Resultat vollständig willkürlich ist, wenn nur wiederum das angenommene Vertheilungsgesetz auf den ganzen Himmelsraum ausgedehnt wird.

Die scheinbare Eigenbewegung eines Sternes rührt zum Theil von der wahren Eigenbewegung desselben, zum Theil

von der Eigenbewegung des Sonnensystems her. Wir wollen demnach unsere Untersuchung in zwei Theile zerlegen. Zuerst wollen wir annehmen, alle Sterne stehen still und die scheinbaren Eigenbewegungen rühren nur von der Bewegung des Sonnensystems her. Im zweiten Falle lassen wir das Sonnensystem stillstehen und nur die Sterne sich bewegen. Bewegt sich nur die Sonne in O (Fig. 1) in der Richtung OR mit der absoluten Geschwindigkeit v, so hat das für das Auge dieselbe Wirkung, als würde sich der Stern S mit derselben Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung bewegen. Die Entfernung des Sternes von der Sonne sei r, und es schliesse die Verbindungsgerade Sonne — Stern mit der Bewegungsrichtung der Sonne den Winkel α ein, so ist die scheinbare laterale Eigenbewegung c des Sternes durch die Gleichung

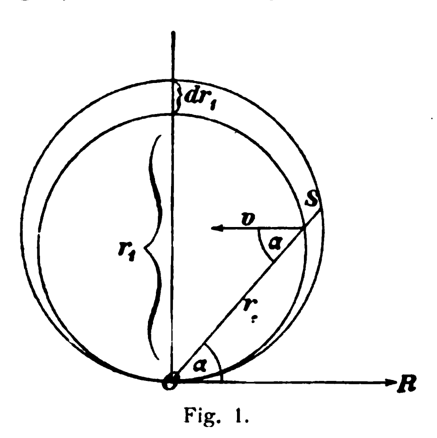


Fig. 1.

$$c = \frac{v \sin \alpha}{r}$$

gegeben. Das ist, wie Fig. 1 zeigt, die Gleichung eines Kreises, welcher von der OR-Achse tangirt wird. Lassen wir diesen Kreis um die Achse rotiren, so erhalten wir eine wulstförmige Fläche und es haben alle Sterne, welche sich auf dieser Fläche befinden, dieselbe Eigenbewegung. Daraus ist schon ersichtlich, dass die Eigenbewegung des Sternes nicht nur von seiner Entfernung, sondern auch von seiner Lage gegen das Sonnensystem abhängt. Es kann für ein und dieselbe Eigenbewegung c die Entfernung des Sternes von 0 bis r_1 wachsen, wenn wir mit r_1 den Durchmesser des Kreises bezeichnen, und zwar sei unter r_1 jener Durchmesser verstanden, welcher auf OR senkrecht steht.

Wächst r um dr bei constantem α, so nimmt r_1 um dr_1 zu und es ist $dr = dr_1 \sin\alpha$, da ja $r = r_1 \sin\alpha$. Lassen wir noch α um $d\alpha$ wachsen, so erhalten wir ein Volumelement der Wulstes von der Grösse

$$2\pi r^2 \sin\alpha d\alpha dr = 2\pi r_1^2 \sin^4 \alpha d\alpha dr_1.$$

Ist ferner die Zahl der Sterne in der Volumeinheit N, so resultirt für die Zahl der Sterne in unserem Volumelemente

$$2\pi N r_1^2 dr_1 \sin^4 \alpha d\alpha. \qquad (I)$$

Integriren wir diesen Ausdruck für die Variable α von 0 bis π, so erhalten wir die Zahl jener Sterne, welche die Eigenbewegung c besitzen. Dieselbe ist, da

$$\int_0^\pi \sin^4 \alpha d\alpha = \frac{3}{8}\pi,$$

$$Z' = \frac{3}{4}\pi^2 N r_1^2 dr_1. \qquad (7)$$

Bedenken wir nun, dass $c = \frac{v}{r_1}$, so ergibt sich in gleicher Weise für eine andere Eigenbewegung $c' = \frac{v}{r_1'}$, oder

$$r_1 = \frac{v}{c}, \qquad r_1' = \frac{v}{c'}.$$

Die Zahl Z sämmtlicher Sterne, deren Eigenbewegungen zwischen c und c' liegen, erhalten wir nun, wenn wir Gleichung (7) von r_1 bis r_1', d. i. von $\frac{v}{c}$ bis $\frac{v}{c'}$ integriren. Dies ergibt dann

$$Z = \frac{3}{4}\pi^2 N \int_{r_1}^{r_1'} r_1^2 dr_1 = \frac{\pi^2 N}{4}(r_1'^3 - r_1^3) = \frac{\pi^2 N v^3}{4}\left(\frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3}\right), \quad (8)$$

wobei natürlich $c > c'$ ist.

Wir wollen nun den zweiten Fall untersuchen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, sämmtliche Sterne hätten dieselbe wahre Eigenbewegung, doch seien die Bewegungsrichtungen

regelmässig im Raume vertheilt, während das Sonnensystem still stehe. Wiederum erhalten wir für c, wie aus Fig. 1 ersichtlich,

$$c = \frac{u \sin \alpha}{r}.$$

Nur ist OR jetzt eine willkürlich gelegte Coordinatenachse, während u die wirkliche Geschwindigkeit der Sterne sein soll. In gleicher Weise gestaltet sich jede weitere Rechnung genau so, wie für den früheren Fall, so dass wir auch hier schliesslich für die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegungen zwischen zwei bestimmten Grenzen liegen, die Gleichung (8) erhalten. Wir können also ohneweiters die Eigenbewegung der Sonne auf die Sterne und umgekehrt übertragen, ohne dass wir an der Erscheinung etwas ändern. Daraus folgt, dass, wenn sowohl die Sterne mit einer Geschwindigkeit u begabt sind, als auch die Sonne mit einer Geschwindigkeit v sich bewegt, das wahre Resultat für die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegung zwischen c und c' liegt, durch die Gleichung

$$Z = \frac{\pi^2 N}{4}(r_1'^3 - r_1^3) = \frac{\pi^2 N (u+v)^3}{4}\left(\frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3}\right) =$$
$$= \frac{\pi^2 N w^3}{4}\left(\frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3}\right) = k\left(\frac{1}{c'^3} - \frac{1}{c^3}\right) \qquad (9)$$

gefunden wird, wobei natürlich

$$c = \frac{u+v}{r_1}, \qquad c' = \frac{u+v}{r_1'}$$

zu setzen ist.

Wir wollen nun die Annahme, dass w für alle Sterne gleich sei, fallen lassen, und wie seinerzeit für die Lichtstärken, soll jetzt für die Eigenbewegungen angenommen werden, dass dieselben nach einem bestimmten Gesetze vertheilt sind, welches für den ganzen Himmelsraum gilt. Die verschiedenen Geschwindigkeiten seien $w_1, w_2, \ldots w_n$, die verschiedenen Werthe von r_1 seien jetzt dargestellt durch $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$, so dass

$$c_1 = \frac{w_1}{\rho_1} = \frac{w_2}{\rho_2} = \ldots = \frac{w_n}{\rho_n}$$

wird. Sind die zugehörigen Zahlen der Sterne in der Volumeinheit $N_1, N_2, \ldots N_n$, so erhalten wir nach Gleichung (8), indem wir $c' = c_1$, $c = \infty$ setzen, für die Zahl sämmtlicher Sterne, deren Eigenbewegung grösser als c_1 ist,

$$Z_1 = \frac{\pi^2}{4}(N_1 \rho_1^3 + N_2 \rho_2^3 + \ldots + N_n \rho_n^3) =$$
$$= \frac{\pi^2}{4 c_1^3}(N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \ldots + N_n w_n^3).$$

In gleicher Weise ergibt sich für die Zahl sämmtlicher Sterne, deren Eigenbewegung grösser als c_1' ist, da nun

$$c_1' = \frac{w_1}{\rho_1'} = \frac{w_2}{\rho_2'} = \ldots = \frac{w_n}{\rho_n'},$$

$$Z_1' = \frac{\pi^2}{4 c_1'^3}(N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \ldots + N_n w_n^3).$$

Daraus folgt für die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegung zwischen c und c' liegt,

$$Z = Z_1' - Z_1 = \frac{\pi^2}{4}(N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \ldots + N_n w_n^3)\left(\frac{1}{c_1'^3} - \frac{1}{c_1^3}\right) =$$
$$= k\left(\frac{1}{c_1'^3} - \frac{1}{c_1^3}\right).$$

Indem wir nun

$$\frac{\pi^2}{4}(N_1 w_1^3 + N_2 w_2^3 + \ldots + N_n w_n^3) = \frac{\pi^2 N w^3}{4} = k$$

setzen, erhalten wir wiederum die Gleichung (9), so dass wir auch bei der Annahme verschiedener Sterngeschwindigkeiten für die Vertheilung der scheinbaren Eigenbewegungen dasselbe Gesetz erhalten müssen, wie für die Annahme gleicher Geschwindigkeiten aller Sterne. Wiederum lässt sich über die Art des Gesetzes gar nichts aussagen, da eine jede Annahme zum selben Resultate führt.

Schon für den Fall, dass wir annehmen, Leuchtkraft und wahre Eigenbewegung sei für alle Sterne gleich gross, kommen

wegen der Gleichung $c = \frac{w \sin \alpha}{r}$ den Sternen gleicher scheinbarer Eigenbewegung ganz verschiedene Entfernungen zu. Wie vielmehr muss das der Fall sein, wenn wir Leuchtkraft und wahre Eigenbewegung nach willkürlichen Gesetzen vertheilt annehmen. Es nimmt daher gar nicht Wunder, dass die vier Gruppen, in welche Stumpe die Sterne nach ihrer Eigenbewegung eingetheilt hat, so ziemlich dieselbe mittlere Helligkeit besitzen, und dass umgekehrt die mittlere Eigenbewegung der verschiedenen Grössenclassen der Sterne viel weniger varrirt, als man von vornherein erwartet hat.

Man kann natürlich auch nach unserer neuen Anschauungsweise von der mittleren Entfernung der Sterne 1., 2.... n. Grösse sprechen. Nur ist dabei zu überlegen, dass diese Grössenclassen sich jetzt nicht mehr in getrennten Kugelschichten vorfinden, sondern dass die Sterne einer jeden Grössenclasse über den ganzen Raum vertheilt sein können.

Um die mittlere Entfernung einer bestimmten Grössenclasse zu finden, haben wir die Summe sämmtlicher Entfernungen durch die Zahl der Sterne dieser Classe zu dividiren. Somit ist die mittlere Entfernung

$$r_m = \frac{N' r'_m + N'' r''_m + \ldots + N^{(n)} r^{(n)}_m}{N},$$

wenn wir

$$N = N' + N'' + \ldots + N^{(n)}$$

setzen. In gleicher Weise ist

$$r_{m+2} = \frac{N' r'_{m+2} + N'' r''_{m+2} + \ldots + N^{(n)} r^{(n)}_{m+2}}{N}.$$

Da nun

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{r'_m}{r'_{m+2}} = \frac{r''_m}{r''_{m+2}} = \ldots = \frac{r^{(n)}_m}{r^{(n)}_{m+2}},$$

so ist auch

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = \frac{N' r'_m + N'' r''_m + \ldots + N^{(n)} r^{(n)}_m}{N' r'_{m+2} + N'' r''_{m+2} + \ldots + N^{(n)} r^{(n)}_{m+2}} = \frac{r_m}{r_{m+2}}.$$

Das heisst es stehen die mittleren Entfernungen der einzelnen Grössenclassen der Fixsterne im selben Verhältnisse, wie wir es nach Gleichung (4) erhalten haben, welche aus der Annahme gleicher wirklicher Helligkeit für alle Fixsterne entsprang.

Auf ganz analoge Weise lässt sich natürlich auch bei den Eigenbewegungen verfahren. Auch da ändert sich für das Verhältniss der mittleren Entfernung der Sterne verschiedener scheinbarer Eigenbewegung durch unsere erweiterte Annahme nichts.

Bei einem Vergleich von Zählung und Rechnung muss natürlich immer vorausgesetzt werden, dass die Zählung erschöpfend ist. Das ist bei den verschiedenen Grössenclassen der Sterne als sicher anzunehmen, da man es ja hier nur mit Sternen zu thun hat, die man auch thatsächlich sieht. Nicht so ist es bei den Eigenbewegungen, zumal wenn man zu kleineren Werthen derselben herabsteigt. Da ist es sehr wahrscheinlich, dass viele Sterne wegen ihrer geringen Helligkeit vollständig übersehen werden. Man hat ja die Bestimmung der Eigenbewegung nur etwa auf Sterne 1. bis 7. Grösse ausgedehnt. Das hat zur Folge, dass sich das Gesetz, welches durch Gleichung (8) dargestellt wird, nur für die grösseren Eigenbewegungen prüfen lässt, wie es Stumpe gethan hat. Hier dürfte die Zahl der Sterne, welche einer jeden Gruppe zukommt, ziemlich vollständig sein. Die Beschränkung auf grössere Eigenbewegungen führt aber wieder den Nachtheil mit sich, dass die Zahl der Sterne eine geringe wird. So beträgt dieselbe bei Stumpe z. B. nur 1055. Würde man sich bei der Prüfung des Helligkeitsgesetzes auf dieselbe Anzahl beschränken, so wäre die Übereinstimmung zwischen Zählung und Rechnung eine ungemein rohe. Es sei erwähnt, dass K. v. Littrow seine Untersuchungen über eine Zahl von fast 60.000 Sternen ausdehnte.

Wir wollen daher untersuchen, welche Vertheilung der scheinbaren Eigenbewegungen sich ergibt, wenn wir unsere Zählung nur auf einen bestimmten Raum beziehen. Wir stellen z. B. die ganz bestimmte Frage: Wie vertheilen sich die scheinbaren Eigenbewegungen über die Sterne 1. bis 4. Grösse? Beschränken wir uns bloss auf Verhältnisszahlen, so ist es für

die Rechnung, wie schon wiederholt gezeigt wurde, ganz gleichgiltig, welches Vertheilungsgesetz der wahren Helligkeiten und Eigenbewegungen wir annehmen. Wir setzen desshalb der Einfachheit halber voraus, die wahre Helligkeit und die wahre Eigenbewegung w sei für alle Sterne dieselbe. Unsere Aufgabe ist dann die, für eine bestimmte scheinbare Eigenbewegung c die Zahl der Sterne zu finden, welche innerhalb einer Kugel liegen, deren Radius ρ bis zur Grenze der Sterne 4. Grösse reicht. Es lässt sich dann der Ausdruck (I) nicht ohneweiters über α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und über r_1 von 0 bis r_1 integriren, sondern wir haben dann verschiedene Fälle zu unterscheiden, für welche verschiedene Integrationsgrenzen einzusetzen sind.

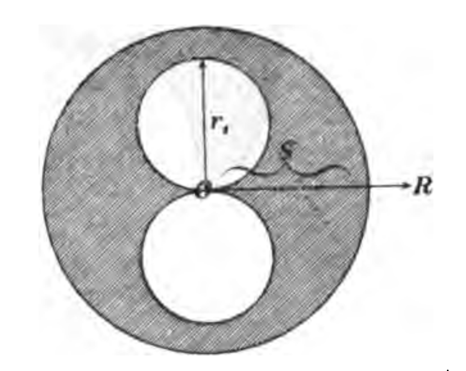


Fig. 2.

Ist $r_1 = \frac{w}{c}$ kleiner als ρ, so ist die Zahl der Sterne, deren Eigenbewegung zwischen 0 und c liegt, proportional dem Volumen, welches von der Kugel mit dem Radius ρ und von der Oberfläche des Wulstes begrenzt wird, welcher durch Rotation eines Kreises vom Durchmesser r_1 um die Achse OR als Tangente entsteht. In Fig. 2 ist dieser Raum durch Schraffen gekennzeichnet. Dieses Volumen entspricht dem Ausdrucke

$$\frac{4\pi}{3}\rho^3 - \frac{\pi^2}{4}r_1^3.$$

Der zweite Fall ist derjenige, dass

$$\rho < r_1 < \sqrt{2}\,\rho.$$

Für diesen Fall haben wir an der erzeugenden Curve unseres Rotationskörpers, wie Fig. 3 zeigt, drei Stücke zu unterscheiden, nämlich OA, AB und BC. A ist der Durchschnittspunkt des Kreises mit der Senkrechten, welche von B

auf OR gefällt wird. Ist OR die x-Achse eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so wird unser Raum durch die yz-Ebene in zwei symmetrische Hälften getheilt, und wir erhalten unser Volumen, wenn wir von der Summe des durch OA und BC begrenzten Raumes jenen subtrahiren, welcher durch die Rotation von AB bestimmt wird. Dieses Resultat ist doppelt zu nehmen,

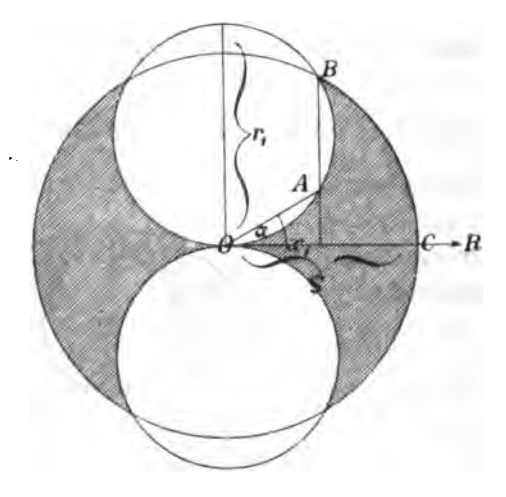


Fig. 3.

da wir ja für die linke Seite unseres symmetrischen Körpers dasselbe Volumen erhalten.

Für OA gilt die Gleichung

$$y^2 - r_1 y + x^2 = 0,$$

woraus folgt

$$y = \frac{r_1}{2} \pm \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2}.$$

Für das Volumen erhalten wir dann

$$\pi \int_0^{x_1} y^2 dx = \pi \int_0^{x_1} \left[\frac{r_1^2}{2} - r_1 \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2} - x^2 \right] dx,$$

wobei x_1 die Abscisse von A ist.

Für BC gilt die Gleichung

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

daher ist das zugehörige Volumen gleich

$$\pi \int_{x_1}^{\rho} (\rho^2 - x^2)\, dx.$$

Das Volumen, welches von dem Kreissegmente AB erzeugt wird, wollen wir nach dem Guldin'schen Theorem berechnen, indem wir die Fläche des Segments

$$2 \int_{x_1}^{r_1} \sqrt{r_1^2 - x^2}\, dx$$

mit 2π und der Ordinate des Schwerpunktes $\frac{r_1}{2}$ multipliciren, wodurch wir

$$2\pi r_1 \int_{x_1}^{r_1} \sqrt{r_1^2 - x^2}\, dx$$

erhalten.

Es ist somit das Volum, innerhalb dessen sich unsere Sterne befinden, gleich

$$2\pi \int_0^{x_1} \left(\frac{r_1^2}{2} - r_1 \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2} - x^2 \right) dx +$$
$$+ 2\pi \int_{x_1}^{\rho} (\rho^2 - x^2)\, dx + 4\pi r_1 \int_{x_1}^{r_1} \sqrt{r_1^2 - x^2}\, dx.$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit der Zahl der Sterne in der Volumeinheit N, so ergibt sich die Zahl jener Sterne, deren Eigenbewegungen zwischen 0 und c liegen.

Der dritte Fall ist nun der, dass

$$r_1 > \sqrt{2}\, \rho$$

ist. Wir erhalten dann nach Analogie des Vorhergehenden, wie aus Fig. 4 zu ersehen ist, für das entsprechende Volumen

$$2\pi \int_0^{x_1} \left(\frac{r_1^2}{2} - r_1 \sqrt{\frac{r_1^2}{4} - x^2} - x^2 \right) dx + 2\pi \int_{x_1}^{\rho} (\rho^2 - x^2)\, dx.$$

Welcher von den drei Fällen bei einer bestimmten Aufgabe in Rechnung zu ziehen ist, muss sich aus der Art der

Aufgabe ergeben. Man sieht, dass man es dabei im Allgemeinen mit sehr verwickelten Rechnungen zu thun hat.

Für die Frage, welche wir uns oben stellten, die Vertheilung der Eigenbewegungen der Sterne 1. bis 4. Grösse zu bestimmen, genügt die Beiziehung des ersten Falles. Es ist

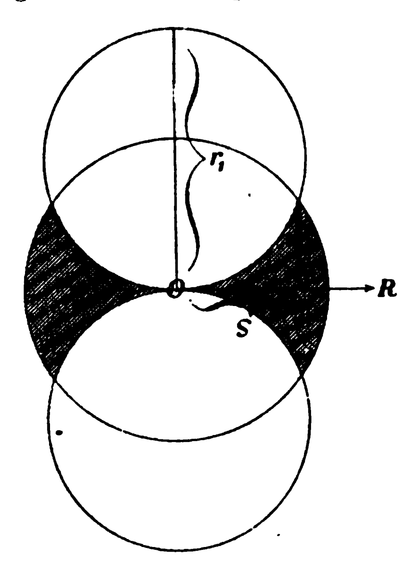


Fig. 4.

daher die Zahl der Sterne mit einer Eigenbewegung zwischen 0 und c gegeben durch

$$N\left(\frac{4\pi}{3}\rho^3 - \frac{\pi^2}{4}r_1^3\right) = \frac{4\pi}{3}N\rho^3 - \frac{\pi^2 N w^3}{4c^3} = a - \frac{b}{c^3},$$

wenn wir

$$\frac{4\pi}{3}N\rho^3 = a, \qquad \frac{\pi^2 N w^3}{4} = b$$

setzen, wobei a und b Constanten sind.

In folgender Tabelle sind die Sterne 1. bis 4. Grösse, deren Eigenbewegungen zwischen 0 und c liegen, zusammengestellt, wie sie sich bei »Mädler, Untersuchungen über die Fixsternsysteme« vorfinden. Dabei ist c in Secunden für das Jahrhundert angegeben.

c	Zahl der Sterne
10	318
20	485
30	537
40	563

Setzen wir

$$a = 540, \quad b = 222000,$$

und berechnen wir daraus die verschiedenen Sternzahlen, so ergibt sich folgende Tabelle.

c	Zählung	Rechnung	Quotient
10	318	318	1·00
20	485	512	0·95
30	537	532	1·01
40	563	537	1·05

In der That stimmen Zählung und Rechnung so weit überein, wie man es bei der geringen Sternzahl erwarten kann.

Wenn wir für die Sterne 1. bis 4. Grösse die Annahme einer gleichen Vertheilung der Eigenbewegungen aufrecht halten können, so ist dies natürlich nicht massgebend für die übrigen Grössenclassen. Ja es dürfte mit Gewissheit anzunehmen sein, dass die lichtärmeren Sterne, d. h. die in Wahrheit kleineren Sterne im Durchschnitt eine grössere wahre Eigenbewegung haben, als die grösseren. Denn denkt man sich diese infolge der Vereinigung kleinerer Himmelskörper entstanden, so ist leicht einzusehen, dass wegen der Erhaltung des Schwerpunktes diese grösseren Massen sich langsamer fortbewegen müssen als die kleineren. Und darauf weisen ja auch thatsächlich die Beobachtungen hin.



Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind

(I. Theil)

von

Jos. Finger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Jänner 1894.)

Das vor mehr als zwei Jahrhunderten aufgestellte Hooke'-sche[1] Gesetz: »Ut tensio, sic vis«, d. i. das Gesetz der Proportionalität der Spannungen und der gleichzeitigen Deformationen bildet noch heute die gewöhnliche Grundlage der Elasticitätstheorie, denn die innerhalb der Elasticitätsgrenzen gewöhnlich als allgemein giltig angenommenen Elasticitätsgrundgesetze, die bekanntlich für isotrope Substanzen zuerst von Navier,[2] Poisson,[3] Cauchy[4] aus der Wechselwirkung der Moleküle theoretisch deducirt worden sind, setzen voraus, dass die

---

[1] Robert Hooke, »Lectures de potentia restitutiva or of Spring« (Philosophical tracts and collections, 1678). Das bekannte Anagramm *ceiiinosssttuv* dieses Gesetzes findet sich schon in Hooke's »Decription of Helioscopes« (1676) vor.

[2] Navier, »Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques« (Mémoires de l'Académie des sciences, 1824, Tome VII, p. 375 e. s.).

[3] Poisson, »Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques« (Mémoires de l'Académie des sciences. Tome VIII, 1828, p. 357 e. s.).

[4] Cauchy, »Exercises de mathém.« Tome III, p. 188 (1828) und Tome IV, p. 129 (1829).

Spannungen lineare Functionen der Deformationsgrössen sind, indem Glieder, welche in Bezug auf die letzteren von höherer Ordnung sind, vernachlässigt werden. Nur das fragliche Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten, welches nach der Moleculartheorie sich für sämmtliche isotrope Körper im Gegensatze zu den Beobachtungsresultaten als constant ergab, war der Anlass von mannigfachen theoretischen und experimentellen Untersuchungen. Zwar wurde hie und da durch manche Beobachtungsergebnisse der Zweifel wachgerufen, ob das in den meisten Fällen wohl durch die Beobachtungen (von Wertheim, Edlund, Morin u. A.) bestätigte Proportionalitätsgesetz eine unbeschränkte Giltigkeit habe. Doch erst in neuerer Zeit ist durch genaue Beobachtungen von A. Miller[1] und von J. O. Thompson[2] festgestellt worden, dass selbst vollkommen elastische feste Körper das Proportionalitätsgesetz nicht genau befolgen, sondern dass dasselbe nur ein Näherungsgesetz ist und dass dementsprechend der sogenannte Elasticitätsmodul nicht als eine Elasticitätsconstante anzusehen ist, sondern dass derselbe mit zunehmender Belastung abnimmt. Diese Beobachtungsergebnisse und überdies gewisse theoretische, mit den Erfahrungsthatsachen nicht in Einklang zu bringende Folgerungen, zu welchen die Anwendung der derzeit herrschenden Elasticitätsgrundgesetze auf Untersuchungen aus dem Gebiete der mechanischen Wärmetheorie geführt haben, bewogen den Verfasser, auf theoretischem Wege die bei der Berechnung der Spannungen in isotropen Substanzen zu den bekannten linearen Gliedern hinzuzufügenden Glieder, die bezüglich der Deformationselemente von zweiter Ordnung sind, zu ermitteln, beziehungsweise das Potential der inneren Kräfte bis auf Glieder dritter Ordnung genau zu berechnen, und diese theoretischen Untersuchungen bilden den Gegenstand dieser Abhandlung.

[1] A. Miller, »Über die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elasticitätsmoduls« (Abhandlungen der königl. bayr. Akademie der Wissenschaften, II. Classe, Bd. 16, Jahrg. 1888).

[2] Jos. Osgood Thompson, »Über das Gesetz der elastischen Dehnung« (Wiedemann's Annalen, Bd. 44, Jahrg. 1891, S. 555—576).

Ein Element irgend eines festen oder flüssigen Körpers werde unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte bei constant bleibender Temperatur deformirt. Infolge dieser Deformation erlangen die anfänglichen, zur Zeit t_0 bestehenden und auf ein an der Deformation des Körpers nicht theilnehmendes, orthogonales Axensystem sich beziehenden Coordinaten xyz eines beliebigen Punktes m, welcher durch diese Deformation zur beliebigen Zeit t in die Lage M gelangt, zu dieser Zeit t die Werthe XYZ. Durch $\xi\eta\zeta$ seien die als einwerthige und stetige Functionen von xyz und t vorausgesetzten Coordinatenänderungen (Componenten der Verschiebung) bezeichnet, so dass

$$\left.\begin{aligned} X &= x+\xi \\ Y &= y+\eta \\ Z &= z+\zeta \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ist.

Da in diesen Gleichungen die Grössen xyz von t unabhängig sind, während XYZ Functionen von xyz und t sind, so sind die Geschwindigkeitscomponenten $u_x u_y u_z$ des Punktes M zur Zeit t durch die partiellen Differentialquotienten

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

bestimmt, welche gleichfalls Functionen der vier von einander unabhängigen Variablen $xyzt$ sind. Die in der Elasticitätstheorie allgemein betrachteten Verschiebungsderivationen (shift-fluxions) für das dem Punkte M unmittelbar benachbarte, unendlich kleine Körperelement, dessen ursprüngliches Volum durch dv bezeichnet sei, sind zur Zeit t

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \lambda_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \lambda_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \mu_x &= \frac{\partial \zeta}{\partial y}, & \mu_y &= \frac{\partial \xi}{\partial z}, & \mu_z &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \nu_x &= \frac{\partial \eta}{\partial z}, & \nu_y &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}, & \nu_z &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Den Gleichungen (2) und (3) zufolge ist

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial \lambda_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial \lambda_z}{\partial t} \\
\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial \mu_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial \mu_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial \mu_z}{\partial t} \\
\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial \nu_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial \nu_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial \nu_z}{\partial t}
\end{array}\right\}. \tag{4}$$

Die Geschwindigkeitscomponenten eines dem Punkte m benachbarten Punktes m', dessen anfänglichen Coordinaten $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ sind und welcher durch die stattgehabte Deformation zur Zeit t in die Lage M' gelangt, haben zu dieser Zeit t die Werthe

$$\left.\begin{array}{l}
u_x+du_x = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dx + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz = \\
\qquad = u_x + \frac{\partial \lambda_x}{\partial t} dx + \frac{\partial \nu_z}{\partial t} dy + \frac{\partial \mu_y}{\partial t} dz \\
u_y+du_y = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz = \\
\qquad = u_y + \frac{\partial \mu_z}{\partial t} dt + \frac{\partial \lambda_y}{\partial t} dy + \frac{\partial \nu_x}{\partial t} dz \\
u_z+du_z = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz = \\
\qquad = u_z + \frac{\partial \nu_y}{\partial t} dt + \frac{\partial \mu_x}{\partial t} dy + \frac{\partial \lambda_z}{\partial t} dz
\end{array}\right\} \tag{5}$$

und die Coordinaten dieses Punktes M' zu derselben Zeit t sind $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$, wo

$$\left.\begin{array}{l}
dX = d(x+\xi) = (1+\lambda_x).dx+\nu_z.dy+\mu_y.dz \\
dY = d(y+\eta) = \mu_z.dx+(1+\lambda_y).dy+\nu_x.dz \\
dZ = d(z+\zeta) = \nu_y.dx+\mu_x.dy+(1+\lambda_z).dz
\end{array}\right\} \tag{6}$$

ist.

Da diese Gleichungen in Bezug auf $dxdydz$ linear sind, so ist die Deformation eines unendlich kleinen Elementes eine homogene, und es müssen daher sämmtliche unendlich nahe an M gelegenen Punkte M', die ursprünglich innerhalb irgend eines Tetraëders dv gelegen sind, nach der Deformation in ihrer Gesammtheit ein zweites Tetraëder dV bilden.

Dasjenige elementare Tetraëder nun, dessen Eckpunkte $m\, m_1 m_2 m_3$ ursprünglich die bezüglichen Coordinaten (x, y, z), $(x+dx, y, z)$, $(x, y+dy, z)$, $(x, y, z+dz)$ besitzen und dessen anfängliches Volum $dv = \frac{1}{6} dx.dy.dz$ ist, erlangt durch die Deformation zur Zeit t eine durch die neue Lage $M M_1 M_2 M_3$ dieser Eckpunkte bestimmte Lage und Gestalt, für welche zufolge (6) die Coordinaten dieser vier Eckpunkte beziehungsweise $[X, Y, Z]$, $[X+(1+\lambda_x)dx, Y+\mu_z dx, Z+\nu_y.dx]$, $[X+\nu_z.dy, Y+(1+\lambda_y)dy, Z+\mu_x.dy]$, $[X+\mu_y.dz, Y+\nu_x.dz, Z+(1+\lambda_z)dz]$ sind. Demgemäss ist das Volum dV des Tetraëders $M M_1 M_2 M_3$ bestimmt durch

$$dV = D.dv, \tag{7}$$

wofern D die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1+\lambda_x, & \mu_z \;, & \nu_y \\ \nu_z \;, & 1+\lambda_y, & \mu_x \\ \mu_y \;, & \nu_x \;, & 1+\lambda_z \end{vmatrix} \tag{8}$$

bedeutet. Die Grösse der cubischen Dilatation ν in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M ist demnach

$$\nu = \frac{dV - dv}{dv} = D - 1. \tag{9}$$

Die Componenten jener im Punkte M herrschenden Spannung, die sich auf ein Flächenelement bezieht, welches zur Zeit t im deformirten Körperelemente zur x-Axe, beziehungsweise y-Axe, beziehungsweise z-Axe normal ist, seien $(X_x Y_x Z_x)$, beziehungsweise $(X_y Y_y Z_y)$, beziehungsweise $(X_z Y_z Z_z)$, während $p_x p_y p_z$ die Componenten der beschleunigenden äusseren Kraft zu derselben Zeit t bedeuten mögen. Die normalen Componenten $X_x Y_y Z_z$ der Spannungen seien positiv oder negativ

in Rechnung gezogen, je nachdem dieselben Druck- oder Zugspannungen sind. Es sei vorausgesetzt, dass zum mindesten in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M die Componenten $p_x p_y p_z$ und die cubische Dichtigkeit δ stetige Functionen der Punktcoordinaten und der Zeit t sind, so dass auch innerhalb desselben Bereiches die früher erwähnten Componenten der Spannung und die Glieder der Gleichungen (4) als stetige Functionen derselben Variablen angesehen werden können. Zur selben Zeit t ist dann den Gleichungen (4) zufolge beim Übergange von einem Punkte zum anderen das Differential der componentalen Beschleunigung der Bewegung parallel zu irgend einer Axe, etwa parallel zur x-Axe, nämlich

$$d\,\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2}\cdot dx + \frac{\partial^2 \nu_z}{\partial t^2}\cdot dy + \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial t^2}\cdot dz$$

jedenfalls unendlich klein, so dass die Annahme gerechtfertigt ist, dass diese Beschleunigung $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ innerhalb der ganzen Ausdehnung eines Parallelepipeds, dessen vom Punkte M ausgehende Kanten mit den drei Coordinatenaxen gleichgerichtet sind und die Längen ΔX, ΔY, ΔZ haben, dasselbe Qualitätszeichen besitzt, wofern diese Kanten entsprechend klein gewählt werden. Es hat sonach auch $P_x = \mu\cdot\frac{\partial u_x}{\partial t}$, d. i. die X-Componente der Resultanten sämmtlicher Kräfte, die auf irgend einen innerhalb dieses Parallelepipeds befindlichen materiellen Punkt von der Masse μ zur Zeit t einwirken, für alle Punkte des Parallelepipeds dasselbe Qualitätszeichen. Es kann demnach die auf alle diese Punkte sich erstreckende Summe $\Sigma[P_x . u_x]$, d. i. der Gesammteffect der auf dieselben einwirkenden Kräftecomponenten P_x gleichgesetzt werden dem Producte aus ΣP_x und irgend einem Mittelwerthe der diesen einzelnen Punkten entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten, der durch v_x bezeichnet sei. Anderseits ist, wenn e_x den mittleren Effect dieser Kräfte pro Volumeinheit des deformirten Körpers bedeutet, dieser Gesammteffect auch durch $e_x . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z$ ausdrückbar, demnach

$$e_x . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z = \Sigma[P_x . u_x] = v_x . \Sigma P_x . \qquad (10)$$

Für die zwischen den einzelnen materiellen Punkten μ des Parallelepipeds gegenseitig wirkenden, anziehenden, beziehungsweise abstossenden inneren Kräfte ist $\Sigma P_x = 0$, so dass bei der Bildung von ΣP_x blos die X-Componenten der auf dieses Parallelepiped wirkenden äusseren Kräfte zu berücksichtigen sind, nämlich die auf die Masse $\bar{\delta}.\Delta X \Delta Y \Delta Z$ des Parallelepipeds einwirkende äussere Kraft $\bar{\delta}.\Delta X \Delta Y \Delta Z.\bar{p}_x$ (wo durch die oberhalb einer Bezeichnung beigefügten Querstriche hier und in der Folge die Mittelwerthe angedeutet sein mögen), ferner die Druckkräfte, welche auf die zur x-Axe senkrechten Seitenflächen $\Delta Y.\Delta Z$ seitens der das Parallelepiped umschliessenden Masse ausgeübt werden, nämlich

$$\bar{X}_x.\Delta Y \Delta Z \quad \text{und} \quad -(\bar{X}_x + \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} \cdot \Delta X).\Delta Y \Delta Z,$$

ferner die auf die Seitenflächen $\Delta Z \Delta X$ wirkenden Schubkräfte

$$\bar{X}_y.\Delta Z \Delta X \quad \text{und} \quad -(\bar{X}_y + \frac{\Delta_y \bar{X}_y}{\Delta Y} \cdot \Delta Y).\Delta Z \Delta X$$

und schliesslich die auf die Fläche $\Delta X \Delta Y$ entfallenden Schubkräfte

$$\bar{X}_z.\Delta X \Delta Y \quad \text{und} \quad -(\bar{X}_z + \frac{\Delta_z \bar{X}_z}{\Delta Z} \Delta Z).\Delta X \Delta Y.$$

Sonach ist der Gleichung (10) zufolge

$$e_x = v_x \left[\bar{\delta}.\bar{p}_x - \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} - \frac{\Delta_y \bar{X}_y}{\Delta Y} - \frac{\Delta_z \bar{X}_z}{\Delta Z}\right].$$

Um nun den auf die Volumeinheit des deformirten Körpers entfallenden Effect der inneren Kräfte, die zwischen den einzelnen Punkten des Parallelepipeds wirken, zu bestimmen, hat man zunächst den Effect der Kraft $\bar{\delta}.\Delta X \Delta Y \Delta Z.\bar{p}_x$ und die Effecte der oberwähnten, auf die Seitenflächen wirkenden sechs Kräfte, nämlich die Effecte $\bar{X}_x.\Delta Y \Delta Z.\bar{u}_x = \Delta Y \Delta Z.(\overline{X_x u_x})$ und

$$-\Delta Y \Delta Z.(\overline{X_x u_x} + \frac{\Delta_x (\overline{X_x u_x})}{\Delta X} \cdot \Delta X)$$

u. s. w. von $e_x . \Delta X \Delta Y \Delta Z$ in Abzug zu bringen und hierauf durch $\Delta X . \Delta Y . \Delta Z$ zu dividiren, wodurch beim Übergange zu den Grenzwerthen für $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0$ nach Einsetzung von u_x statt v_x sich als Effect e_1 der X-Componenten der inneren Kräfte pro Volumeinheit des deformirten Körpers in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes M offenbar der Werth ergibt:

$$e_1 = \left[\frac{\partial (X_x u_x)}{\partial X} - u_x \frac{\partial X_x}{\partial X}\right] + \left[\frac{\partial (X_y u_x)}{\partial Y} - u_x \frac{\partial X_y}{\partial Y}\right] + \\ + \left[\frac{\partial (X_z u_x)}{\partial Z} - u_x \frac{\partial X_z}{\partial Z}\right] = X_x \frac{\partial u_x}{\partial X} + X_y \frac{\partial u_x}{\partial Y} + X_z \frac{\partial u_x}{\partial Z}. \quad (11)$$

Auf gleiche Art kann man für den Effect e_2 der Y-Componenten und den Effect e_3 der Z-Componenten der inneren Kräfte pro Volumeinheit des deformirten Körpers die Werthe bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} e_2 &= Y_x \frac{\partial u_y}{\partial X} + Y_y \frac{\partial u_y}{\partial Y} + Y_z \frac{\partial u_y}{\partial Z} \\ e_3 &= Z_x \frac{\partial u_z}{\partial X} + Z_y \frac{\partial u_z}{\partial Y} + Z_z \frac{\partial u_z}{\partial Z} \end{aligned}\right\}. \quad (12)$$

Sonach ist der Gesammteffect dE der in dem dem Punkte M unmittelbar benachbarten unendlich kleinen Volumelemente dV zur Zeit t wirkenden inneren Kräfte bestimmt durch

$$dE = (e_1 + e_2 + e_3) dV. \quad (13)$$

Demgemäss ist die elementare mechanische Arbeit da_i dieser inneren Kräfte, die in dem der Zeit t unmittelbar angrenzenden Zeitelemente dt geleistet wird, bestimmbar aus der Gleichung

$$da_i = dE . dt = (e_1 + e_2 + e_3) . dV . dt. \quad (14)$$

Da die Coordinatenänderungen $\xi \eta \zeta$ einwerthige Functionen der Variablen xyz und t sind, so können auch, wofern man die drei Gleichungen (1) berücksichtigt, auch xyz als Functionen von XYZ und t betrachtet werden, und es sind dann auch $\xi = X - x$, $\eta = Y - y$, $\zeta = Z - z$ und daher auch die

Geschwindigkeitscomponenten $u_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $u_y = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, $u_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ als Functionen derselben Variablen XYZ und t anzusehen, wie dies die Glieder der Gleichungen (11) und (12) erheischen.

Ist also u irgend eine dieser drei Geschwindigkeitscomponenten, so ist, da u bei gleich bleibendem t bloss eine Function von XYZ ist, welche letzteren wiederum Functionen von xyz sind, die durch die Gleichungen (1) bestimmt sind,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Demnach ist den Gleichungen (1) und (3) zufolge

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot (1 + \lambda_x) + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \mu_z + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \nu_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \nu_z + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot (1 + \lambda_y) + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \mu_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \mu_y + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \nu_x + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot (1 + \lambda_z)$$

Bezeichnet man durch $l_x, m_z, n_y \ldots$ die den einzelnen Gliedern $1 + \lambda_x, \mu_z, \nu_y \ldots$ der durch (8) bestimmten Determinante D adjungirten Unterdeterminanten, so ist den letzten drei Gleichungen zufolge

$$D \cdot \frac{\partial u}{\partial X} = l_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_z \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + m_y \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$D \cdot \frac{\partial u}{\partial Y} = m_z \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + l_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + n_x \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$D \cdot \frac{\partial u}{\partial Z} = n_y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + m_x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + l_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

Wendet man diese Gleichungen der Reihe nach auf die Geschwindigkeitscomponenten $u_x u_y u_z$ an, so nehmen die Gleichungen (11) und (12) nach ihrer Multiplication mit D bei Beachtung von (4) folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
e_1 . D &= (l_x . X_x + m_z . X_y + n_y . X_z) \cdot \frac{\partial \lambda_x}{\partial t} + (n_z . X_x + l_y . X_y + m_x . X_z) \cdot \frac{\partial \nu_z}{\partial t} + \\
&\quad + (m_y . X_x + n_x . X_y + l_z . X_z) \cdot \frac{\partial \mu_y}{\partial t} \\
e_2 . D &= (l_x . Y_x + m_z . Y_y + n_y . Y_z) \cdot \frac{\partial \mu_z}{\partial t} + (n_z . Y_x + l_y . Y_y + m_x . Y_z) \cdot \frac{\partial \lambda_y}{\partial t} + \\
&\quad + (m_y . Y_x + n_x . Y_y + l_z . Y_z) \cdot \frac{\partial \nu_x}{\partial t} \\
e_3 . D &= (l_x . Z_x + m_z . Z_y + n_y . Z_z) \cdot \frac{\partial \nu_y}{\partial t} + (n_z . Z_x + l_y . Z_y + m_x . Z_z) \cdot \frac{\partial \mu_x}{\partial t} + \\
&\quad + (m_y . Z_x + n_x . Z_y + l_z . Z_z) \cdot \frac{\partial \lambda_z}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Substituirt man nun die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von $e_1 e_2 e_3$ in die Gleichung (14), so nimmt dieselbe, da nach (7) $dV = D.dv$ ist, die Form an:

$$\begin{aligned}
da_i = [(L_x . d\lambda_x + N_z . d\nu_z + M_y . d\mu_y) + (M_z . d\mu_z + L_y . d\lambda_y + N_x . d\nu_x) + \\
+ (N_y . d\nu_y + M_x . d\mu_x + L_z . d\lambda_z)] . dv, \qquad (16)
\end{aligned}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
L_x &= l_x . X_x + m_z . X_y + n_y . X_z & M_z &= l_x . Y_x + m_z . Y_y + n_y . Y_z \\
N_z &= n_z . X_x + l_y . X_y + m_x . X_z & L_y &= n_z . Y_x + l_y . Y_y + m_x . Y_z \\
M_y &= m_y . X_x + n_x . X_y + l_z . X_z & N_x &= m_y . Y_x + n_x . Y_y + l_z . Y_z \\
& & N_y &= l_x . Z_x + m_z . Z_y + n_y . Z_z \\
& & M_x &= n_z . Z_x + l_y . Z_y + m_x . Z_z \\
& & L_z &= m_y . Z_x + n_x . Z_y + l_z . Z_z
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Setzt man nun für diese inneren Kräfte ein Potential dU voraus, (indem man etwa annimmt, dass die zwischen je zwei Massenpunkten des betrachteten Massenelementes wirkenden inneren Kräfte anziehende oder abstossende Kräfte sind, die von den constant bleibenden Massen dieser Massenpunkte oder überhaupt von gewissen, für jeden einzelnen Massenpunkt charakteristischen Constanten und überdies blos von der variablen Entfernung der beiden auf einander einwirkenden Massenpunkte abhängen) und bezeichnet man durch f den Potential-

werth für die Volumeinheit des anfänglichen Volums dv des betrachteten Massenelementes, so ist

$$dU = f.dv. \tag{18}$$

Für den ganzen Körper wäre das Potential durch das auf das ganze anfängliche (primitive) Volum v desselben auszudehnende Integral $U = \int f.dv$ bestimmt.

Da für ein gegebenes Körperelement das Potential dU blos von der veränderlichen relativen Lage der einzelnen Punkte dieses Elementes, sonach blos von den einzelnen relativen Coordinaten dX, dY, dZ dieser Punkte abhängig ist, und da ferner diese Grössen dX, dY, dZ den Gleichungen (6) zufolge bei einem gegebenen Körperelement (bei welchem die den einzelnen Punkten desselben ursprünglich zukommenden Werthe von dx, dy, dz, wie auch dv als constante Grössen anzusehen sind) lediglich Functionen der 9 Verschiebungsderivationen $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \mu_x \ldots$ sind, so ist nothwendigerweise auch das Potential dU und der Gleichung (18) gemäss auch f blos eine Function dieser 9 variablen, von einander unabhängigen Verschiebungsderivationen.

Dem Begriffe des Potentials entsprechend muss aber das dem Zeitelemente dt entsprechende Differential dieser Function dU, nämlich $df.dv$, der elementaren Arbeit da_i der inneren Kräfte, die durch (16) bestimmt ist, stets gleich[1] sein, was, wie aus der Form des Ausdruckes (16) ersichtlich ist, nur dann möglich ist, wenn

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_x} = L_x, & \dfrac{\partial f}{\partial \mu_z} = M_z, & \dfrac{\partial f}{\partial \nu_y} = N_y \\ \dfrac{\partial f}{\partial \nu_z} = N_z, & \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_y} = L_y, & \dfrac{\partial f}{\partial \mu_x} = M_x \\ \dfrac{\partial f}{\partial \mu_y} = M_y, & \dfrac{\partial f}{\partial \nu_x} = N_x, & \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_z} = L_z \end{array}\right\} \tag{19}$$

ist. Setzt man diese Werthe von $L_x N_z \ldots$ in (17) ein und bestimmt aus diesen linearen Gleichungen die unbekannten Span-

[1] Identificirt man, was häufig geschieht, das Potential mit der potenziellen Energie, so muss es hier heissen: »entgegengesetzt gleich«. Es ist in diesem Falle, wenn man nämlich diesen letzteren Begriff des Potentials festhalten will, in der ganzen Abhandlung nur statt f durchwegs zu setzen $(-f)$.

nungscomponenten $X_x X_y \ldots$, so findet man das folgende für unsere Zwecke wichtige System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
D.X_x &= (1+\lambda_x)\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda_x} + \nu_z\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu_z} + \mu_y\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu_y}\\
D.X_y &= \mu_z\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda_x} + (1+\lambda_y)\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu_z} + \nu_x\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu_y}\\
D.X_z &= \nu_y\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda_x} + \mu_x\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu_z} + (1+\lambda_z)\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu_y}\\
D.Y_x &= (1+\lambda_x)\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu_z} + \nu_z\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda_y} + \mu_y\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu_x}\\
D.Y_y &= \mu_z\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu_z} + (1+\lambda_y)\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda_y} + \nu_x\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu_x}\\
D.Y_z &= \nu_y\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu_z} + \mu_x\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda_y} + (1+\lambda_z)\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu_x}\\
D.Z_x &= (1+\lambda_x)\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu_y} + \nu_z\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu_x} + \mu_y\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda_z}\\
D.Z_y &= \mu_z\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu_y} + (1+\lambda_y)\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu_x} + \nu_x\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda_z}\\
D.Z_z &= \nu_y\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu_y} + \mu_x\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu_x} + (1+\lambda_z)\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda_z}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Aus diesen streng richtigen Gleichungen ist zu ersehen, dass die allgemein übliche Identificirung der Spannungscomponenten $X_x X_y \ldots$ mit den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial\lambda_x}, \frac{\partial f}{\partial\nu_z} \ldots$ strenge genommen unstatthaft ist und nur dann gestattet ist, wenn man in erster Annäherung bei der Bestimmung der Spannungscomponenten von allen Gliedern, welche irgend ein Product aus diesen Differentialquotienten und den Verschiebungsderivationen $\lambda_x \nu_z \ldots$ enthalten, absieht.

Die hier mit f bezeichnete, auf die Volumeinheit bezogene Potentialfunction f wird allgemein in allen den vielen Hand- und Lehrbüchern, welche die Theorie elastischer Körper behandeln, wie auch bei sämmtlichen für die Praxis so überaus wichtigen technischen Anwendungen als eine bezüglich der Verschiebungsderivationen $\lambda_x \mu_z \nu_y \ldots$ rationale homogene Function zweiten Grades angenommen, die lediglich Glieder zweiter

Ordnung enthält. Diese willkürliche Annahme ist nicht vollkommen gerechtfertigt. Zunächst liegt nach der Ansicht des Verfassers kein zwingender Grund vor, von den linearen Gliedern ganz abzusehen oder, was dasselbe besagt, anzunehmen, dass in jenem als deformationslos angenommenen anfänglichen Zustande, von welchem aus die in Rechnung gebrachte Deformation in Betracht gezogen wird, absolut keine Spannung im Innern eines Körpers vorhanden ist, — eine Annahme, die umsoweniger gerechtfertigt ist, als dieser Zustand nicht stets derselbe ist, sondern wesentlich von der Temperatur des Körpers abhängt, deren Änderung stets eine Deformation zur Folge hat (ausser man würde, was gewöhnlich nicht geschieht, die Deformation auf jenen Nullpunkt der Temperatur, für welchen eine jegliche Spannung den Werth Null hat, als Ausgangspunkt einer jeden in Betracht gezogenen Deformation beziehen). Für manche Untersuchungen ist es überdies nicht gestattet, die höheren Potenzen der Verschiebungsderivationen $\lambda_x \mu_z \ldots$ zu vernachlässigen, da diese letzteren von demselben Grade sind, wie das Verhältniss der Deformationen zu den ursprünglichen Raumgrössen, das, wenn auch die Dimensionen eines unendlich kleinen Körperelementes nach der Deformation unendlich klein bleiben, dennoch in manchen Fällen nicht so klein ist, dass von höheren Potenzen desselben abgesehen werden kann.

Es soll demnach der im Vorworte gestellten Aufgabe gemäss in dieser Abhandlung die Potentialfunction f als eine ganze rationale Function dritter Ordnung vorausgesetzt werden, und zwar soll von nun an die Betrachtung sich blos auf ein im anfänglichen Zustande elastisch isotropes Körperelement dv beschränken.

Die bedungene elastische Isotropie soll lediglich die Bedeutung haben, dass die mechanische Arbeit der inneren Kräfte bei denselben Coordinatenänderungen von der Lage des als orthogonal vorausgesetzten Coordinatensystems zum Körperelemente unabhängig ist, so zwar, dass, wenn man in dem früher betrachteten elementaren Tetraëder $m m_1 m_2 m_3$, welches durch die Deformation die Gestalt $M M_1 M_2 M_3$ erlangt, die senkrechten Kanten $m m_1$, $m m_2$ und $m m_3$ als gleich voraussetzt, die mechanische Arbeit der inneren Kräfte bei dieser Deformation,

daher auch das Potential $dU = f.dv$ denselben Werth beibehält, wie in dem Falle, in welchem das Tetraëder $m\,m_1 m_2 m_3$ durch die Deformation im Körper jene Lage und Gestalt erhält, die sich durch Drehung des Tetraëders $M M_1 M_2 M_3$ etwa um die gegen alle drei Coordinatenaxen gleichgeneigte, von M ausgehende Mittellinie, sei es in einem oder dem anderen Sinne bei einer Amplitude von 120° als Schlusslage ergeben würde, durch welche Drehung die Axen xyz in die Lage yzx, beziehungsweise zxy gelangen und die durch (6) bestimmten Grössen dX, dY, dZ die Werthe dY, dZ, dX, beziehungsweise dZ, dX, dY annehmen würden. Mit anderen Worten, durch die Isotropie ist hier vorausgesetzt, dass die Potentialfunction f ihren Werth nicht ändert, wenn man die Indices der beliebig angenommenen Verschiebungsderivationen (3) cyclisch permutirt. Wenn man demgemäss diese Function f der Variabeln $\lambda_x \mu_z \nu_y \ldots$ in eine Reihe von der Form einer ganzen rationalen Function der letzteren entwickelt, so müssen die Coëfficienten A, B, $C \ldots$ jener Glieder, die sich in ihrem variablen Theile nur dadurch von einander unterscheiden, dass die Indices xyz der Verschiebungsderivationen (3) cyclisch permutirt sind, einander gleich sein, so dass diese Function f, wofern man von Gliedern höherer Ordnung als der dritten absieht, folgende Form annehmen muss:

$$\left.\begin{aligned} f = A_0 &+ [A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3] + \\ &+ [B_1\beta_1 + B_2\beta_2 + B_3\beta_3 + C_1\gamma_1 + C_2\gamma_2 + C_3\gamma_3 + D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + D_3\delta_3 + E_1\varepsilon_1 + E_2\varepsilon_2 + E_3\varepsilon_3] + \\ &+ [A'_1\alpha'_1 + A'_2\alpha'_2 + A'_3\alpha'_3 + B'_1\beta'_1 + B'_2\beta'_2 + B'_3\beta'_3 + C'_1\gamma'_1 + C'_2\gamma'_2 + C'_3\gamma'_3 + C'\gamma' + E.\varepsilon + E'\varepsilon' + E'_1\varepsilon'_1 + E'_2\varepsilon'_2 + E'_3\varepsilon'_3 + \\ &+ A_{12}\alpha_{12} + A_{21}\alpha_{21} + A_{23}\alpha_{23} + A_{32}\alpha_{32} + A_{31}\alpha_{31} + A_{13}\alpha_{13} + B_{12}\beta_{12} + B_{21}\beta_{21} + B_{23}\beta_{23} + B_{32}\beta_{32} + B_{31}\beta_{31} + B_{13}\beta_{13} + \\ &+ C_{12}\gamma_{12} + C_{21}\gamma_{21} + C_{23}\gamma_{23} + C_{32}\gamma_{32} + C_{31}\gamma_{31} + C_{13}\gamma_{13} + D_{12}\delta_{12} + D_{21}\delta_{21} + D_{23}\delta_{23} + D_{32}\delta_{32} + D_{31}\delta_{31} + D_{13}\delta_{13}] \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

wo die Coëfficienten $A_1 B_1 C_1 D_1 \ldots$ von den Verschiebungsderivationen und von der Wahl der Axenrichtungen xyz unabhängig sind und die 54 variablen Factoren $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ folgende Werthe haben:

$$
\left.
\begin{array}{c}
\alpha_1 = \lambda_x+\lambda_y+\lambda_z, \quad \alpha_2 = \mu_x+\mu_y+\mu_z, \quad \alpha_3 = \nu_x+\nu_y+\nu_z \\
\beta_1 = \lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2, \quad \beta_2 = \mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2, \quad \beta_3 = \nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2 \\
\gamma_1 = \lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y, \quad \gamma_2 = \mu_y\mu_z+\mu_z\mu_x+\mu_x\mu_y, \quad \gamma_3 = \nu_y\nu_z+\nu_z\nu_x+\nu_x\nu_y \\
\delta_1 = \mu_x\nu_x+\mu_y\nu_y+\mu_z\nu_z, \quad \delta_2 = \nu_x\lambda_x+\nu_y\lambda_y+\nu_z\lambda_z, \quad \delta_3 = \lambda_x\mu_x+\lambda_y\mu_y+\lambda_z\mu_z \\
\varepsilon_1 = \mu_x(\nu_y+\nu_z)+\mu_y(\nu_z+\nu_x)+\mu_z(\nu_x+\nu_y), \quad \varepsilon_2 = \nu_x(\lambda_y+\lambda_z)+\nu_y(\lambda_z+\lambda_x)+\nu_z(\lambda_x+\lambda_y), \\
\varepsilon_3 = \lambda_x(\mu_y+\mu_z)+\lambda_y(\mu_z+\mu_x)+\lambda_z(\mu_x+\mu_y) \\
\alpha_1' = \lambda_x^3+\lambda_y^3+\lambda_y^3, \quad \alpha_2' = \mu_x^3+\mu_y^3+\mu_z^3, \quad \alpha_3' = \nu_x^3+\nu_y^3+\nu_z^3 \\
\beta_1' = \lambda_x^2(\lambda_y+\lambda_z)+\lambda_y^2(\lambda_z+\lambda_x)+\lambda_z^2(\lambda_x+\lambda_y), \quad \beta_2' = \mu_x^2(\mu_y+\mu_z)+\mu_y^2(\mu_z+\mu_x)+\mu_z^2(\mu_x+\mu_y), \\
\beta_3' = \nu_x^2(\nu_y+\nu_z)+\nu_y^2(\nu_z+\nu_x)+\nu_z^2(\nu_x+\nu_y) \\
\gamma_1' = \lambda_x\lambda_y\lambda_z, \quad \gamma_2' = \mu_x\mu_y\mu_z, \quad \gamma_3' = \nu_x\nu_y\nu_z \\
\gamma' = \lambda_x\mu_x\nu_x+\lambda_y\mu_y\nu_y+\lambda_z\mu_z\nu_z \\
\varepsilon = \lambda_x\mu_y\nu_z+\lambda_y\mu_z\nu_x+\lambda_z\mu_x\nu_y, \quad \varepsilon' = \lambda_x\mu_z\nu_y+\lambda_y\mu_x\nu_z+\lambda_z\mu_y\nu_x \\
\varepsilon_1' = \mu_x\nu_x(\lambda_y+\lambda_z)+\mu_y\nu_y(\lambda_z+\lambda_x)+\mu_z\nu_z(\lambda_x+\lambda_y), \quad \varepsilon_2' = \nu_x\lambda_x(\mu_y+\mu_z)+\nu_y\lambda_y(\mu_z+\mu_x)+\nu_z\lambda_z(\mu_x+\mu_y), \\
\varepsilon_3' = \lambda_x\mu_x(\nu_y+\nu_z)+\lambda_y\mu_y(\nu_z+\nu_x)+\lambda_z\mu_z(\nu_x+\nu_y) \\
\alpha_{12} = \lambda_x^2\mu_x+\lambda_y^2\mu_y+\lambda_z^2\mu_z, \quad \alpha_{23} = \mu_x^2\nu_x+\mu_y^2\nu_y+\mu_z^2\nu_z, \quad \alpha_{31} = \nu_x^2\lambda_x+\nu_y^2\lambda_y+\nu_z^2\lambda_z \\
\alpha_{21} = \mu_x^2\lambda_x+\mu_y^2\lambda_y+\mu_z^2\lambda_z, \quad \alpha_{32} = \nu_x^2\mu_x+\nu_y^2\mu_y+\nu_z^2\mu_z, \quad \alpha_{13} = \lambda_x^2\nu_x+\lambda_y^2\nu_y+\lambda_z^2\nu_z \\
\beta_{12} = \lambda_x^2(\mu_y+\mu_z)+\lambda_y^2(\mu_z+\mu_x)+\lambda_z^2(\mu_x+\mu_y), \quad \beta_{23} = \mu_x^2(\nu_y+\nu_z)+\mu_y^2(\nu_z+\nu_x)+\mu_z^2(\nu_x+\nu_y), \\
\beta_{31} = \nu_x^2(\lambda_y+\lambda_z)+\nu_y^2(\lambda_z+\lambda_x)+\nu_z^2(\lambda_x+\lambda_y) \\
\beta_{21} = \mu_x^2(\lambda_y+\lambda_z)+\mu_y^2(\lambda_z+\lambda_x)+\mu_z^2(\lambda_x+\lambda_y), \quad \beta_{32} = \nu_x^2(\mu_y+\mu_z)+\nu_y^2(\mu_z+\mu_x)+\nu_z^2(\mu_x+\mu_y), \\
\beta_{13} = \lambda_x^2(\nu_y+\nu_z)+\lambda_y^2(\nu_z+\nu_x)+\lambda_z^2(\nu_x+\nu_y) \\
\gamma_{12} = \lambda_y\lambda_z\mu_x+\lambda_z\lambda_x\mu_y+\lambda_x\lambda_y\mu_z, \quad \gamma_{23} = \mu_y\mu_z\nu_x+\mu_z\mu_x\nu_y+\mu_x\mu_y\nu_z, \quad \gamma_{31} = \nu_y\nu_z\lambda_x+\nu_z\nu_x\lambda_y+\nu_x\nu_y\lambda_z \\
\gamma_{21} = \mu_y\mu_z\lambda_x+\mu_z\mu_x\lambda_y+\mu_x\mu_y\lambda_z, \quad \gamma_{32} = \nu_y\nu_z\mu_x+\nu_z\nu_x\mu_y+\nu_x\nu_y\mu_z, \quad \gamma_{13} = \lambda_y\lambda_z\nu_x+\lambda_z\lambda_x\nu_y+\lambda_x\lambda_y\nu_z \\
\delta_{12} = \lambda_y\lambda_z(\mu_y+\mu_z)+\lambda_z\lambda_x(\mu_z+\mu_x)+\lambda_x\lambda_y(\mu_x+\mu_y), \quad \delta_{23} = \mu_y\mu_z(\nu_y+\nu_z)+\mu_z\mu_x(\nu_z+\nu_x)+\mu_x\mu_y(\nu_x+\nu_y), \\
\delta_{31} = \nu_y\nu_z(\lambda_y+\lambda_z)+\nu_z\nu_x(\lambda_z+\lambda_x)+\nu_x\nu_y(\lambda_x+\lambda_y) \\
\delta_{21} = \mu_y\mu_z(\lambda_y+\lambda_z)+\mu_z\mu_x(\lambda_z+\lambda_x)+\mu_x\mu_y(\lambda_x+\lambda_y), \quad \delta_{32} = \nu_y\nu_z(\mu_y+\mu_z)+\nu_z\nu_x(\mu_z+\mu_x)+\nu_x\nu_y(\mu_x+\mu_y), \\
\delta_{13} = \lambda_y\lambda_z(\nu_y+\nu_z)+\lambda_z\lambda_x(\nu_z+\nu_x)+\lambda_x\lambda_y(\nu_x+\nu_y)
\end{array}
\right\} \quad (22)
$$

Nun bestehen bekanntlich, da die Spannungen den ursprünglichen Annahmen zufolge stetige Functionen der Coordinaten sind, zwischen den Schubspannungen die von der Constitution des Körpers, von der Art der Bewegung und von der Form der Potentialfunction f vollkommen unabhängigen, allgemein giltigen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Y_z - Z_y &= 0 \\ Z_x - X_z &= 0 \\ X_y - Y_x &= 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (23)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit der Determinante D und substituirt hierauf die Werthe aus (20), nachdem man die in (20) vorkommenden partiellen Derivationen der Function f mit Hilfe der Gleichungen (21) und (22) bestimmt hat, so ergeben sich nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten zwischen den letzteren folgende Beziehungen:

Zunächst verschwinden die Coëfficienten:

$$A_2 = A_3 = C_2 = C_3 = D_2 = D_3 = E_1 = E_2 = E_3 = 0. \qquad (24)$$

Ferner bestehen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &B_3 = B_2,\ A_{32} = A_{23} \\ &A'_3 = A'_2 = \frac{1}{3} A_{32} = \frac{1}{3} A_{23} \\ &B'_3 = B'_2 = \frac{1}{2} D_{23} = \frac{1}{2} D_{32} = B_{32} = B_{23} \\ &A_{13} = A_{12},\ B_{13} = B_{12},\ C_{13} = C_{12},\ D_{13} = D_{12} \\ &D_1 = 2B_2 - A_1,\ C_{32} = C_{23},\ A_{31} = A_{21},\ B_{31} = B_{21} \\ &C'_3 = C'_2 = C_{32} - D_1 = C_{23} - (2B_2 - A_1) \\ &B_1 = B_2 + \frac{1}{2}(C_1 + D_1) = 2B_2 + \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{2} A_1 \\ &E = E' = C_{31} = C_{21} \\ &E'_3 = E'_2 = D_{31} = D_{21} \\ &C' = 2A_{21} - C_1 \\ &E'_1 = 2(B_{21} - B_1 + B_2) = 2B_{21} - C_1 - 2B_2 + A_1 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Aus dem Umstande, dass die erstgenannten Coëfficienten A_2 und A_3 verschwinden, muss, wie aus (20), (21) und (22)

sofort zu ersehen ist, gefolgert werden, dass, wenn die durch (3) bestimmten Deformationselemente sämmtlich den Werth Null haben, auch alle Schubspannungen den Werth Null annehmen und dass überdies $X_x = Y_y = Z_z = A_1$ ist, d. h. die im anfänglichen (primitiven) Zustande vorausgesetzte Isotropie bedingt die Abwesenheit jeglicher Schubspannung und die Gleichheit der normalen Spannungen nach allen Richtungen des Raumes im Elemente dv vor der betrachteten Deformation.

Drückt man mittelst der Gleichungen (24) und (25) alle Coëfficienten in (21) durch die 18 Coëfficienten $A_0\, A_1\, C_1\, B_2$ $A'_1\, B'_1\, C'_1\, A_{12}\, B_{12}\, C_{12}\, D_{12}\, A_{21}\, B_{21}\, C_{21}\, D_{21}\, A_{23}\, B_{23}\, C_{23}$ aus, substituirt man hierauf diese Werthe in (21) und berechnet schliesslich mit Hilfe der Gleichungen (20) die Componenten der Spannungen, so gelangt man bei Berücksichtigung der Werthe (22), wenn kürzehalber durch $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ die Summen

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \mu_x + \nu_x = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \\
\varepsilon_y &= \mu_y + \nu_y = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
\varepsilon_z &= \mu_z + \nu_z = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y},
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

bezeichnet werden, zu folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
D.X_x = {} & A_1 + 4B_2.\lambda_x + C_1(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) \\
& + 2B_2.(\mu_y^2 + \nu_z^2) - C_1(\mu_x\nu_x + \mu_y\nu_y + \mu_z\nu_z) \\
& + (4B_2 + C_1 - A_1 + 3A'_1).\lambda_x^2 + B'_1(\lambda_y^2 + \lambda_z^2) \\
& + C'_1.\lambda_y\lambda_z + (C_1 + 2B'_1).\lambda_x(\lambda_y + \lambda_z) \\
& + 2A_{12}.\lambda_x\varepsilon_x + 2B_{12}.\lambda_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z) + C_{12}.(\lambda_y\varepsilon_z + \lambda_z\varepsilon_y) \\
& + D_{12}.[\lambda_y\varepsilon_y + \lambda_z\varepsilon_z + (\lambda_y + \lambda_z)\varepsilon_x] \\
& + A_{21}.\varepsilon_x^2 + B_{21}.(\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + C_{21}.\varepsilon_y\varepsilon_z + D_{21}.\varepsilon_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
D.Y_z = {} & 2B_2.\varepsilon_x + 2B_2.(\mu_x\lambda_y + \nu_x\lambda_z + \nu_y\mu_z) \\
& + A_{12}.\lambda_x^2 + B_{12}.(\lambda_y^2 + \lambda_z^2) + C_{12}.\lambda_y\lambda_z + D_{12}.\lambda_x(\lambda_y + \lambda_z) \\
& + 2A_{21}.\lambda_x\varepsilon_x + 2B_{21}.(\lambda_y + \lambda_z)\varepsilon_x + C_{21}(\lambda_y\varepsilon_z + \lambda_z\varepsilon_y) \\
& + D_{21}.[\lambda_y\varepsilon_y + \lambda_z\varepsilon_z + \lambda_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \\
& + A_{23}.\varepsilon_x^2 + B_{23}[\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] + C_{23}.\varepsilon_y\varepsilon_z
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Die anderen Spannungscomponenten ergeben sich durch cyclische Permutation von xyz und von XYZ.

Wie aus diesen Gleichungen zu ersehen ist, sind die Longitudinalspannungen $X_x Y_y Z_z$ von dem Werthe der Coëfficienten A_{23}, B_{23} und C_{23}, dagegen die Schubspannungen $Y_z Z_x X_y$ von den Coëfficienten $A_1 C_1 A'_1 B'_1 C'_1$ vollkommen unabhängig.

Nun lässt sich bekanntlich in allen Fällen die durch die Gleichungen (6) bestimmte räumliche Änderung (Deformation) des betrachteten Körperelementes dv, wenn man von der translatorischen Verschiebung $(\xi\eta\zeta)$ absieht, als zusammengesetzt ansehen aus einer reinen (rotationslosen) Deformation, bei welcher drei zu einander senkrechte Axen — die Deformationshauptaxen — ihre Lage im Raume nicht ändern, und aus einer Rotation dieses Körperelementes um den Punkt M.

Sind nun $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$, $(\beta_x \beta_y \beta_z)$, $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$ die Richtungscosinus der Deformationshauptaxen abc vor dieser Rotation, dagegen $(\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z)$, $(\beta'_x \beta'_y \beta'_z)$, $(\gamma'_x \gamma'_y \gamma'_z)$ die schliesslichen Richtungscosinus derselben Axen nach erfolgter Rotation, durch welche sie die Lagen $a'b'c'$ erlangen, sind ferner durch $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ die linearen Dilatationen (Elongationen) in der Richtung dieser drei Axen, d. i. die Hauptdilatationen (Hauptelongationen) bezeichnet, so dass die Halbaxen jenes Ellipsoids — des Deformationsellipsoids —, in welches eine Kugel vom Radius dl infolge der Deformation des Elementes dv übergeht, die Längen

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu_1 . dl = (1+\lambda_1) . dl \\ b &= \mu_2 . dl = (1+\lambda_2) . dl \\ c &= \mu_3 . dl = (1+\lambda_3) . dl \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

erhalten, so bestehen bekanntlich stets folgende, aus (6) leicht deducirbare Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} 1+\lambda_x &= (1+\lambda_1) . \alpha_x \alpha'_x + (1+\lambda_2) . \beta_x \beta'_x + (1+\lambda_3) . \gamma_x \gamma'_x \\ \nu_z &= (1+\lambda_1) . \alpha_y \alpha'_x + (1+\lambda_2) . \beta_y \beta'_x + (1+\lambda_3) . \gamma_y \gamma'_x \\ \mu_y &= (1+\lambda_1) . \alpha_z \alpha'_x + (1+\lambda_2) . \beta_z \beta'_x + (1+\lambda_3) . \gamma_z \gamma'_x \\ \mu_z &= (1+\lambda_1) . \alpha_x \alpha'_y + (1+\lambda_2) . \beta_x \beta'_y + (1+\lambda_3) . \gamma_x \gamma'_y \\ 1+\lambda_y &= (1+\lambda_1) . \alpha_y \alpha'_y + (1+\lambda_2) . \beta_y \beta'_y + (1+\lambda_3) . \gamma_y \gamma'_y \\ \nu_x &= (1+\lambda_1) . \alpha_z \alpha'_y + (1+\lambda_2) . \beta_z \beta'_y + (1+\lambda_3) . \gamma_z \gamma'_y \\ \nu_y &= (1+\lambda_1) . \alpha_x \alpha'_z + (1+\lambda_2) . \beta_x \beta'_z + (1+\lambda_3) . \gamma_x \gamma'_z \\ \mu_x &= (1+\lambda_1) . \alpha_y \alpha'_z + (1+\lambda_2) . \beta_y \beta'_z + (1+\lambda_3) . \gamma_y \gamma'_z \\ 1+\lambda_z &= (1+\lambda_1) . \alpha_z \alpha'_z + (1+\lambda_2) . \beta_z \beta'_z + (1+\lambda_3) . \gamma_z \gamma'_z \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Wenn durch $\varphi\chi\psi$ die auf die ursprünglichen Lagen abc der Deformationshauptaxen bezogenen Richtungscosinus jener Rotationsaxe A bezeichnet sind, um welche das Körperelement dv rotiren muss, damit abc in die Lage $a'b'c'$ nach der Drehung um den Winkel ϑ gelangt, und wenn $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$, $(\alpha''\beta''\gamma'')$ die auf dieselben Axen abc bezogenen Richtungscosinus der Axen $a'b'c'$ bedeuten, so ist[1]

$$\begin{aligned}
\alpha &= \varphi^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta\\
\beta &= \varphi\chi(1-\cos\vartheta)+\psi\sin\vartheta\\
\gamma &= \varphi\psi(1-\cos\vartheta)-\chi\sin\vartheta\\
\alpha' &= \chi\varphi(1-\cos\vartheta)-\psi\sin\vartheta\\
\beta' &= \chi^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta\\
\gamma' &= \chi\psi(1-\cos\vartheta)+\varphi\sin\vartheta\\
\alpha'' &= \psi\varphi(1-\cos\vartheta)+\chi\sin\vartheta\\
\beta'' &= \psi\chi(1-\cos\vartheta)-\varphi\sin\vartheta\\
\gamma'' &= \psi^2(1-\cos\vartheta)+\cos\vartheta
\end{aligned}$$

Sind sonach $\varphi_x\varphi_y\varphi_z$ die auf die ursprünglichen Coordinatenaxen xyz bezogenen Richtungscosinus der Rotationsaxe A, so ist

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_x\alpha_x+\varphi_y\alpha_y+\varphi_z\alpha_z = \varphi_x\alpha'_x+\varphi_y\alpha'_y+\varphi_z\alpha'_z\\
\chi &= \varphi_x\beta_x+\varphi_y\beta_y+\varphi_z\beta_z = \varphi_x\beta'_x+\varphi_y\beta'_y+\varphi_z\beta'_z\\
\psi &= \varphi_x\gamma_x+\varphi_y\gamma_y+\varphi_z\gamma_z = \varphi_x\gamma'_x+\varphi_y\gamma'_y+\varphi_z\gamma'_z
\end{aligned}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_x &= \alpha\alpha'_x+\alpha'\beta'_x+\alpha''\gamma'_x = (\varphi_x\alpha'_x+\varphi_y\alpha'_y+\varphi_z\alpha'_z).\varphi_x.(1-\cos\vartheta)+\\
&\qquad +\alpha'_x.\cos\vartheta+(\varphi_z\alpha'_y-\varphi_y\alpha'_z).\sin\vartheta\\
\alpha_y &= \alpha\alpha'_y+\alpha'\beta'_y+\alpha''\gamma'_y = (\varphi_x\alpha'_x+\varphi_y\alpha'_y+\varphi_z\alpha'_z).\varphi_y.(1-\cos\vartheta)+\\
&\qquad +\alpha'_y.\cos\vartheta+(\varphi_x\alpha'_z-\varphi_z\alpha'_x).\sin\vartheta\\
\alpha_z &= \alpha\alpha'_z+\alpha'\beta'_z+\alpha''\gamma'_z = (\varphi_x\alpha'_x+\varphi_y\alpha'_y+\varphi_z\alpha'_z).\varphi_z.(1-\cos\vartheta)+\\
&\qquad +\alpha'_z.\cos\vartheta+(\varphi_y\alpha'_x-\varphi_x\alpha'_y).\sin\vartheta\\
\beta_x &= \beta\alpha'_x+\beta'\beta'_x+\beta''\gamma'_x = (\varphi_x\beta'_x+\varphi_y\beta'_y+\varphi_z\beta'_z).\varphi_x.(1-\cos\vartheta)+\\
&\qquad +\beta'_x.\cos\vartheta+(\varphi_z\beta'_y-\varphi_y\beta'_z).\sin\vartheta\\
\beta_y &= \beta\alpha'_y+\beta'\beta'_y+\beta''\gamma'_y = (\varphi_x\beta'_x+\varphi_y\beta'_y+\varphi_z\beta'_z).\varphi_y.(1-\cos\vartheta)+\\
&\qquad +\beta'_y.\cos\vartheta+(\varphi_x\beta'_z-\varphi_z\beta'_x).\sin\vartheta\\
\beta_z &= \beta\alpha'_z+\beta'\beta'_z+\beta''\gamma'_z = (\varphi_x\beta'_x+\varphi_y\beta'_y+\varphi_z\beta'_z).\varphi_z.(1-\cos\vartheta)+\\
&\qquad +\beta'_z.\cos\vartheta+(\varphi_y\beta'_x-\varphi_x\beta'_y).\sin\vartheta
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

[1] Siehe Jacobi, »Euleri formulae de transformatione coordinatorum (Crelle's Journal, II. Bd., II. Heft, S. 188).

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_x &= \gamma\alpha'_x+\gamma'\beta'_x+\gamma''\gamma'_x = (\varphi_x\gamma'_x+\varphi_y\gamma'_y+\varphi_z\gamma'_z).\varphi_x.(1-\cos\vartheta)+\\
&\qquad +\gamma'_x.\cos\vartheta+(\varphi_z\gamma'_y-\varphi_y\gamma'_z).\sin\vartheta\\
\gamma_y &= \gamma\alpha'_y+\gamma'\beta'_y+\gamma''\gamma'_y = (\varphi_x\gamma'_x+\varphi_y\gamma'_y+\varphi_z\gamma'_z).\varphi_y.(1-\cos\vartheta)+\\
&\qquad +\gamma'_y.\cos\vartheta+(\varphi_x\gamma'_z-\varphi_z\gamma'_x).\sin\vartheta\\
\gamma_z &= \gamma\alpha'_z+\gamma'\beta'_z+\gamma''\gamma'_z = (\varphi_x\gamma'_x+\varphi_y\gamma'_y+\varphi_z\gamma'_z).\varphi_z.(1-\cos\vartheta)+\\
&\qquad +\gamma'_z.\cos\vartheta+(\varphi_y\gamma'_x-\varphi_x\gamma'_y).\sin\vartheta
\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

Durch Substitution dieser Werthe in (29) ergeben sich, wenn kürzehalber durch $\sigma_x\sigma_y\sigma_z\tau_x\tau_y\tau_z$ die mit den Dilatationen gleichartigen Grössen

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda_1\alpha'^2_x+\lambda_2\beta'^2_x+\lambda_3\gamma'^2_x\\
\sigma_y &= \lambda_1\alpha'^2_y+\lambda_2\beta'^2_y+\lambda_3\gamma'^2_y\\
\sigma_z &= \lambda_1\alpha'^2_z+\lambda_2\beta'^2_z+\lambda_3\gamma'^2_z\\
\tau_x &= \lambda_1\alpha'_y\alpha'_z+\lambda_2\beta'_y\beta'_z+\lambda_3\gamma'_y\gamma'_z\\
\tau_y &= \lambda_1\alpha'_z\alpha'_x+\lambda_2\beta'_z\beta'_x+\lambda_3\gamma'_z\gamma'_x\\
\tau_z &= \lambda_1\alpha'_x\alpha'_y+\lambda_2\beta'_x\beta'_y+\lambda_3\gamma'_x\gamma'_y
\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

bezeichnet werden, folgende Gleichungen für die Derivationen der Verschiebungen $\xi\eta\zeta$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_x &= \sigma_x+\sin\vartheta.[\tau_z\varphi_z-\tau_y\varphi_y]\\
&\qquad -2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cdot[1-\varphi_x^2+\sigma_x-\varphi_x(\sigma_x\varphi_x+\tau_z\varphi_y+\tau_y\varphi_z)]\\
\nu_z &= \tau_z-\sin\vartheta[\varphi_z+\sigma_x\varphi_z-\tau_y\varphi_x]\\
&\qquad -2\sin^2\frac{\vartheta}{2}[-\varphi_x\varphi_y+\tau_z-\varphi_y(\sigma_x\varphi_x+\tau_z\varphi_y+\tau_y\varphi_z)]\\
\mu_y &= \tau_y+\sin\vartheta(\varphi_y+\sigma_x\varphi_y-\tau_z\varphi_x]\\
&\qquad -2\sin^2\frac{\vartheta}{2}[-\varphi_x\varphi_z+\tau_y-\varphi_z(\sigma_x\varphi_x+\tau_z\varphi_y+\tau_y\varphi_z)]\\
\mu_z &= \tau_z+\sin\vartheta[\varphi_z+\sigma_y\varphi_z-\tau_x\varphi_y]\\
&\qquad -2\sin^2\frac{\vartheta}{2}[-\varphi_y\varphi_x+\tau_z-\varphi_x(\tau_z\varphi_x+\sigma_y\varphi_y+\tau_x\varphi_z)]\\
\lambda_y &= \sigma_y+\sin\vartheta[\tau_x\varphi_x-\tau_z\varphi_z]\\
&\qquad -2\sin^2\frac{\vartheta}{2}[1-\varphi_y^2+\sigma_y-\varphi_y(\tau_z\varphi_x+\sigma_y\varphi_y+\tau_x\varphi_z)]\\
\nu_x &= \tau_x-\sin\vartheta[\varphi_x+\sigma_y\varphi_x-\tau_z\varphi_y]\\
&\qquad -2\sin^2\frac{\vartheta}{2}[-\varphi_y\varphi_z+\tau_x-\varphi_z(\tau_z\varphi_x+\sigma_y\varphi_y+\tau_x\varphi_z)]
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

$$\left.\begin{aligned}
\nu_y &= \tau_y - \sin\vartheta[\varphi_y + \sigma_z\varphi_y - \tau_x\varphi_z] \\
&\quad -2\sin^2\frac{\vartheta}{2}[-\varphi_z\varphi_x + \tau_y - \varphi_x(\tau_y\varphi_x + \tau_x\varphi_y + \sigma_z\varphi_z)] \\
\mu_x &= \tau_x + \sin\vartheta[\varphi_x + \sigma_z\varphi_x - \tau_y\varphi_z] \\
&\quad -2\sin^2\frac{\vartheta}{2}[-\varphi_z\varphi_y + \tau_x - \varphi_y(\tau_y\varphi_x + \tau_x\varphi_y + \sigma_z\varphi_z)] \\
\lambda_z &= \sigma_z + \sin\vartheta[\tau_y\varphi_y - \tau_x\varphi_x] \\
&\quad -2\sin^2\frac{\vartheta}{2}[1 - \varphi_z^2 + \sigma_z - \varphi_z(\tau_y\varphi_x + \tau_x\varphi_y + \sigma_z\varphi_z)]
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Für die Verschiebungsderivationen in den schliesslichen Richtungen $a'b'c'$ der Deformationshauptaxen ist in den Gleichungen (31) und (32) zu setzen $\alpha'_x = \beta'_y = \gamma'_z = 1$ und $\alpha_y = \alpha'_z = \beta'_x = \beta'_z = \gamma'_x = \gamma'_y = 0$, und es ist sonach für dieselben $\sigma_x = \lambda_1$, $\sigma_y = \lambda_2$, $\sigma_z = \lambda_3$, $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ und

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_x &= \lambda_1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\lambda_1)(1-\varphi_x^2) \\
\nu_z &= -\sin\vartheta(1+\lambda_1)\varphi_z + 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\lambda_1)\varphi_x\varphi_y \\
\mu_y &= \quad \sin\vartheta(1+\lambda_1)\varphi_y + 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\lambda_1)\varphi_x\varphi_z \\
\mu_z &= \quad \sin\vartheta(1+\lambda_2)\varphi_z + 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\lambda_2)\varphi_y\varphi_x \\
\lambda_y &= \lambda_2 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\lambda_2)(1-\varphi_y^2) \\
\nu_x &= -\sin\vartheta(1+\lambda_2)\varphi_x + 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\lambda_2)\varphi_y\varphi_z \\
\nu_y &= -\sin\vartheta(1+\lambda_3)\varphi_y + 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\lambda_3)\varphi_z\varphi_x \\
\mu_x &= \quad \sin\vartheta(1+\lambda_3)\varphi_x + 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\lambda_3)\varphi_z\varphi_y \\
\lambda_z &= \lambda_3 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1+\lambda_3)(1-\varphi_z^2)
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Setzt man in diesen Gleichungen, da bei der Berechnung der Componenten der Spannungen Potenzen von $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ und ϑ, welche höher sind, als die zweite, zu vernachlässigen sind,

$\sin\vartheta = \vartheta$ und $\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\vartheta}{2}$ und substituirt die Werthe aus (33) und (26) in (27), so findet man folgende bis auf Glieder zweiter Ordnung genaue Relationen für die zu den Axen $a'b'c'$ parallelen Componenten $(S_1 T_3 T_2)$, $(T_3 S_2 T_1)$, $(T_2 T_1 S_3)$ der Spannungen in den zu den Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ in ihrer schliesslichen Lage senkrechten Flächenelementen, wenn kürzehalber

$$D'_1 = 4B_2 + C_1 - A_1 + 3A'_1 \tag{34}$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}
D.S_1 &= A_1 + 4B_2\lambda_1 + C_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + D'_1\lambda_1^2 + \\
&\quad + B'_1(\lambda_2^2+\lambda_3^2) + C'_1\lambda_2\lambda_3 + (C_1+2B'_1)\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3) \\
D.T_1 &= A_{12}\lambda_1^2 + B_{12}(\lambda_2^2+\lambda_3^2) + C_{12}\lambda_2\lambda_3 + D_{12}\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3) \\
D.S_2 &= A_1 + 4B_2\lambda_2 + C_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + D'_1\lambda_2^2 + \\
&\quad + B'_1(\lambda_3^2+\lambda_1^2) + C'_1\lambda_3\lambda_1 + (C_1+2B'_1)\lambda_2(\lambda_3+\lambda_1) \\
D.T_2 &= A_{12}\lambda_2^2 + B_{12}(\lambda_3^2+\lambda_1^2) + C_{12}\lambda_3\lambda_1 + D_{12}\lambda_2(\lambda_3+\lambda_1) \\
D.S_3 &= A_1 + 4B_2\lambda_3 + C_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + D'_1\lambda_3^2 + \\
&\quad + B'_1(\lambda_1^2+\lambda_2^2) + C'_1\lambda_1\lambda_2 + (C_1+2B'_1)\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2) \\
D.T_3 &= A_{12}\lambda_3^2 + B_{12}(\lambda_1^2+\lambda_2^2) + C_{12}\lambda_1\lambda_2 + D_{12}\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Da nun die Determinante D, wie dies die Substitution von (29) in (8) sofort lehrt, auch in der Form

$$D = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3) . \begin{vmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha'_x & \beta'_x & \gamma'_x \\ \alpha'_y & \beta'_y & \gamma'_y \\ \alpha'_z & \beta'_z & \gamma'_z \end{vmatrix} =$$

$$= (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3) \tag{36}$$

ausdrückbar ist, so ist aus (35) zu entnehmen, dass die Spannungen $S_1 S_2 S_3 T_1 T_2 T_3$ bei einem gegebenen ursprünglich elastisch isotropen Körper von dem Rotationswinkel ϑ und den Richtungscosinus $\varphi_x \varphi_y \varphi_z$ der Rotationsaxe nicht abhängen, sondern lediglich Functionen der drei Hauptdilatationen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ sind.

Da sich aus diesen sechs Spannungen und aus den auf die Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ bezogenen Richtungscosinus $\alpha'_x \beta'_x \gamma'_x$ der beliebig gewählten Richtung x in bekannter Weise die Spannungscomponenten $X_x Y_x Z_x$ berechnen lassen, so besteht

diese Unabhängigkeit von $\vartheta \varphi_x \varphi_y \varphi_z$ auch für die letzteren Kräfte. Übrigens zeigt dies auch die Substitution von (32) in (27), welche, wenn man abermals Glieder von höherer Ordnung als der zweiten vernachlässigt, bei Beachtung von (34) und (26) zu folgendem Werthe von $D.X_x$ führt:

$$
\left.\begin{aligned}
D.X_x = {} & A_1 + 4B_2 . \sigma_x + C_1(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
& + 2B_2 . (\tau_y^2 + \tau_z^2) - C_1(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \\
& + D_1' . \sigma_x^2 + B_1' . (\sigma_y^2 + \sigma_z^2) + C_1' . \sigma_y \sigma_z + \\
& \qquad\qquad + (C_1 + 2B_1') . \sigma_x(\sigma_y + \sigma_z) \\
& + 4A_{12} . \sigma_x \tau_x + 4B_{12} . \sigma_x(\tau_y + \tau_z) + 2C_{12}(\sigma_y \tau_z + \sigma_z \tau_y) + \\
& \qquad\qquad + 2D_{12}[\sigma_y \tau_y + \sigma_z \tau_z + (\sigma_y + \sigma_z)\tau_x \\
& + 4A_{21} . \tau_x^2 + 4B_{21} . (\tau_y^2 + \tau_z^2) + 4C_{21} . \tau_y \tau_z + \\
& \qquad\qquad + 4D_{21} . \tau_x(\tau_y + \tau_z)
\end{aligned}\right\} \quad (37)
$$

worin für $\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_x \tau_y \tau_z$ die Werthe aus (31) einzusetzen sind.

Anderseits ist bekanntlich die normale Spannung für die Richtung x, da $\alpha_x' \beta_x' \gamma_x'$ die Richtungscosinus derselben in Bezug auf die Axen $a'b'c'$ sind, aus der allgemein giltigen Gleichung bestimmbar:

$$
X_x = S_1 \alpha_x'^2 + S_2 \beta_x'^2 + S_3 \gamma_x'^2 + 2T_1 \beta_x' \gamma_x' + 2T_2 \gamma_x' \alpha_x' + 2T_3 \alpha_x' \beta_x' .
$$

Sonach ist den Gleichungen (35) zufolge auch

$$
\left.\begin{aligned}
D.X_x = {} & A_1 + 4B_2(\lambda_1 \alpha_x'^2 + \lambda_2 \beta_x'^2 + \lambda_3 \gamma_x'^2) + C_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\
& + D_1'(\lambda_1^2 \alpha_x'^2 + \lambda_2^2 \beta_x'^2 + \lambda_3^2 \gamma_x'^2) + \\
& \qquad + B_1'[(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\alpha_x'^2 + (\lambda_3^2 + \lambda_1^2)\beta_x'^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\gamma_x'^2] \\
& + C_1'(\lambda_2 \lambda_3 \alpha_x'^2 + \lambda_3 \lambda_1 \beta_x'^2 + \lambda_1 \lambda_2 \gamma_x'^2) + \\
& \qquad + (C_1 + 2B_1')[\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)\alpha_x'^2 + \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_1)\beta_x'^2 + \\
& \qquad\qquad + \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)\gamma_x'^2] \\
& + 2A_{12}(\lambda_1^2 \beta_x' \gamma_x' + \lambda_2^2 \gamma_x' \alpha_x' + \lambda_3^2 \alpha_x' \beta_x') + \\
& \qquad + 2B_{12}[(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\beta_x' \gamma_x' + (\lambda_3^2 + \lambda_1^2)\gamma_x' \alpha_x' + \\
& \qquad\qquad + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\alpha_x' \beta_x'] \\
& + 2C_{12}(\lambda_2 \lambda_3 \beta_x' \gamma_x' + \lambda_3 \lambda_1 \gamma_x' \alpha_x' + \lambda_1 \lambda_2 \alpha_x' \beta_x') + \\
& \qquad + 2D_{12}[\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)\beta_x' \gamma_x' + \lambda_2(\lambda_3 + \lambda_1)\gamma_x' \alpha_x' + \\
& \qquad\qquad + \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_x' \beta_x']
\end{aligned}\right\} \quad (38)
$$

Da die Gleichheit der Ausdrücke (37) und (38) für jede Lage der Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ und für alle Werthe der Hauptdilatationen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ besteht, so muss sicher auch der Coëfficient von λ_1^2 in (37) jenem in (38) gleich sein, also ihre Differenz verschwinden, so dass sich nach Einsetzung der Werthe (31) in (37) und entsprechender Reduction folgende für alle möglichen Werthe der Richtungscosinus $\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z \beta'_x \ldots$ giltige Gleichung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} &[2B_2 - D'_1 + B'_1 + 4B_{21}]\ \alpha'^2_x(\alpha'^2_y + \alpha'^2_z) \\ &+[-C_1 - 2B'_1 + C'_1 + 4A_{21}].\alpha'^2_y \alpha'^2_z + 2A_{12}.(2\alpha'^2_x \alpha'_y \alpha'_z - \beta'_x \gamma'_x) \\ &+2B_{12}.\alpha'_x[2\alpha'^2_x(\alpha'_y + \alpha'_z) - \beta'_x - \gamma'_x] + 2C_{12}.\alpha'_x(\alpha'^3_y + \alpha'^3_z) \\ &+2D_{12}.\alpha'_y \alpha'_z[\alpha'^2_y + \alpha'^2_z + \alpha'_x(\alpha'_y + \alpha'_z)] + 4C_{21}.\alpha'^2_x \alpha'_y \alpha'_z + \\ &\qquad\qquad + 4D_{21}.\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z(\alpha'_y + \alpha'_z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Da diese Gleichung für alle möglichen Richtungen der drei zu einander senkrechten Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ erfüllt werden muss und da die Coëfficienten dieser Gleichung von diesen Axenrichtungen unabhängig sind, so müssen alle diese Coëfficienten verschwinden, wie dies etwa aus folgender Schlussfolgerung hervorgeht: Nimmt man etwa a' parallel zur z-Axe und b', beziehungsweise c' parallel zu jener Lage an, in welche die Axe x, beziehungsweise y durch eine Drehung in ihrer Ebene um den beliebigen Winkel φ gelangt, so ist $\alpha'_z = 1$, $\alpha'_x = \alpha'_y = \beta'_z = \gamma'_z = 0$, $\beta'_x = \gamma'_y = \cos\varphi$, $\beta'_y = -\gamma'_x = \sin\varphi$ zu setzen, wodurch die Gleichung (39) sich auf $A_{12}.\sin 2\varphi = 0$ reducirt, so dass $A_{12} = 0$ ist. Setzt man diesen Werth in (39) ein und nimmt nunmehr etwa $\alpha'_x = 0$, also $\alpha'^2_y + \alpha'^2_z = 1$ an, so erhält man eine bezüglich $\alpha'_y \alpha'_z$ quadratische Gleichung, deren Coëfficienten verschwinden müssen, da $\alpha'_y \alpha'_z$ jeden zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ gelegenen Werth annehmen kann, und es ist sonach $D_{12} = 0$ und ebenso der Coëfficient von $\alpha'^2_y \alpha'^2_z$ in (39). Dividirt man die derart reducirte Gleichung (39) durch α'_x und setzt wie früher $\alpha'_z = 1$, $\beta'_x = \cos\varphi$ u. s. w., so wird $2B_{12}.(\sin\varphi - \cos\varphi) + 2C_{12} = 0$, also, da φ beliebig ist, $B_{12} = C_{12} = 0$. Nimmt man nun abermals $\alpha'_x = 0$ an, so findet man $D_{21} = 0$ und wenn man die übrig bleibende Gleichung durch α'_x dividirt

und hierauf $\alpha'_x = 0$, $\alpha'_y = \cos\varphi$, $\alpha'_z = \sin\varphi$ setzt, so ersieht man, dass auch die übrig gebliebenen Coëfficienten verschwinden müssen. Zu genau denselben Folgerungen würde man durch Gleichsetzung etwa der Coëfficienten von $\lambda_2\lambda_3$ in (37) und (38) gelangen.

Da sonach alle Coëfficienten der Gleichung (39) sich auf Null reduciren müssen, so ist nach Einführung des Werthes von D'_1 aus (34)

$$\left.\begin{aligned} B'_1 &= -A_1 + C_1 + 2B_2 + 3A'_1 - 4B_{21} \\ C'_1 &= C_1 + 2B'_1 - 4A_{21} = -2A_1 + 3C_1 + 4B_2 + \\ &\qquad\qquad + 6A'_1 - 8B_{21} - 4A_{21} \\ A_{12} &= B_{12} = C_{12} = D_{12} = C_{21} = D_{21} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Aus dem Verschwinden der letztgenannten Coëfficienten muss zunächst zufolge (35) gefolgert werden, dass $T_1 = T_2 = = T_3 = 0$ ist, d. h. dass keine Schubspannungen in den zu den Dilatationshauptaxen $a'b'c'$ senkrechten Flächenelementen vorhanden sind, oder mit anderen Worten, dass die Dilatationshauptaxen in ihrer schliesslichen Lage zugleich auch die Hauptdruckaxen (Reactionshauptaxen) und $S_1 S_2 S_3$ die Hauptdruckspannungen sind. Es besteht demnach für die Schubspannung Y_z, indem $(\alpha'_y \beta'_y \gamma'_y)$ die auf die Hauptdruckaxen $a'b'c'$ bezogenen Richtungscosinus der Axe y und $(\alpha'_z \beta'_z \gamma'_z)$ jene der Axe z sind, die bekannte allgemein giltige Beziehung

$$Y_z = S_1 . \alpha'_y \alpha'_z + S_2 . \beta'_y \beta'_z + S_3 . \gamma'_y \gamma'_z . \quad (41)$$

Setzt man nun in den in (27) ausgedrückten Werth von Y_z die Werthe aus (26), (32) und (40) ein, so findet man bei Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} D.Y_z = {} & 4B_2 . \tau_x + 2B_2 . [\tau_y \tau_z + (\sigma_y + \sigma_z)\tau_x] \\ & + 4A_{21} . \sigma_x \tau_x + 4B_{21} . (\sigma_y + \sigma_z)\tau_x \\ & + 4A_{23} . \tau_x^2 + 4B_{23} . [\tau_y^2 + \tau_z^2 + 2\tau_x(\tau_y + \tau_z)] + 4C_{23} . \tau_y \tau_z \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Anderseits ergibt die Substitution der Werthe (40) und des aus (40) und (34) resultirenden Werthes $D'_1 = 2B_2 + B'_1 + 4B_{21}$ in die Gleichungen (35)

$$\left.\begin{array}{l}
D.S_1 = A_1 + 4B_2 . \lambda_1 + C_1 . (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \\
\quad + (2B_2 + 4B_{21}) . \lambda_1^2 + B_1'(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4A_{21} . \lambda_2\lambda_3 + \\
\quad\quad + (C_1 + 2B_1')(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) \\
D.S_2 = A_1 + 4B_2 . \lambda_2 + C_1 . (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \\
\quad + (2B_2 + 4B_{21}) . \lambda_2^2 + B_1'(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4A_{21} . \lambda_3\lambda_1 + \\
\quad\quad + (C_1 + 2B_1')(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) \\
D.S_3 = A_1 + 4B_2 . \lambda_3 + C_1 . (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \\
\quad + (2B_2 + 4B_{21}) . \lambda_3^2 + B_1'(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 4A_{21} . \lambda_1\lambda_2 + \\
\quad\quad + (C_1 + 2B_1')(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)
\end{array}\right\} \quad (43)$$

Aus den Gleichungen (31) lassen sich nun leicht folgende Beziehungen ableiten:

$$\left.\begin{array}{r}
\tau_z\tau_y + \sigma_y\tau_x + \tau_x\sigma_z = \lambda_1^2 . \alpha_y'\alpha_z' + \lambda_2^2 . \beta_y'\beta_z' + \lambda_3^2 . \gamma_y'\gamma_z' \\
\tau_y\tau_z - \sigma_x\tau_x = \lambda_2\lambda_3 . \alpha_y'\alpha_z' + \lambda_3\lambda_1 . \beta_y'\beta_z' + \lambda_1\lambda_2 . \gamma_y'\gamma_z' \\
\sigma_x^2 + \tau_z^2 + \tau_y^2 = \lambda_1^2 . \alpha_x'^2 + \lambda_2^2 . \beta_x'^2 + \lambda_3^2 . \gamma_x'^2 \\
\sigma_y\sigma_z - \tau_x^2 = \lambda_2\lambda_3 . \alpha_x'^2 + \lambda_3\lambda_1 . \beta_x'^2 + \lambda_1\lambda_2 . \gamma_x'^2 \\
\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_x\tau_y\tau_z - (\sigma_x\tau_x^2 + \sigma_y\tau_y^2 + \sigma_z\tau_z^2) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3
\end{array}\right\} \quad (44)$$

Setzt man nunmehr die Werthe aus (43) in die Gleichung (41) ein und beachtet ausser (33) auch die zwei ersten Gleichungen in (44), so ergibt sich für $D.Y_z$ ausser dem Werthe (42) auch folgender zweiter Werth:

$$\left.\begin{array}{l}
D.Y_z = 4B_2 . \tau_x + (2B_2 + 4B_{21}) . [\tau_y\tau_z + (\sigma_y + \sigma_z)\tau_x] \\
\quad + 4A_{21}(\sigma_x\tau_x - \tau_y\tau_z)
\end{array}\right\} \quad (45)$$

Da demgemäss die rechten Glieder dieser Gleichung und der Gleichung (42) für jeden beliebigen Werth der sechs Grössen $\sigma_x\sigma_y\sigma_z\tau_x\tau_y\tau_z$, durch welche den Gleichungen (31) zufolge die Hauptdilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ und die Lagen der Hauptdruckaxen eindeutig bestimmt sind, einander gleich sein müssen, so folgt aus (42) und (45) nothwendigerweise

$$\left.\begin{array}{l}
C_{23} = B_{21} - A_{21} \\
A_{23} = B_{23} = 0
\end{array}\right\} \quad (46)$$

Substituirt man die gefundenen Werthe (46), (40), (25) und (24) in (21), so wird

$$f = A_0 + A_1\alpha_1 + A_1\left(-\frac{1}{2}\beta_1 - \delta_1\right) + 2B_2\left(\beta_1 + \frac{\beta_2+\beta_3}{2} + \delta_1\right)$$
$$+\frac{1}{2}C_1(\beta_1+2\gamma_1) + A_1'(\alpha_1'+3\beta_1'+6\gamma_1')$$
$$+(A_1-2B_2)(-\beta_1'-2\gamma_1'+\gamma_2'+\gamma_3'+\varepsilon_1') + C_1(\beta_1'+3\gamma_1'-\gamma'-\varepsilon_1')$$
$$+A_{21}(\alpha_{21}+\alpha_{31}+2\gamma'-\gamma_2'-\gamma_3'-\gamma_{23}-\gamma_{32}-4\gamma_1')$$
$$+B_{21}(\beta_{21}+\beta_{31}+2\varepsilon_1'+\gamma_2'+\gamma_3'+\gamma_{23}+\gamma_{32}-4\beta_1'-8\gamma_1').$$

Setzt man hierin die Werthe aus (22) und (26) ein und beachtet, dass $\beta_1 = \lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2 = (\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^2 - 2\gamma_1$ ist, so findet man für die gesuchte Potentialfunction f folgenden Werth:

$$\left.\begin{aligned}
f = {} & A_0 + A_1(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z) + \frac{C_1-A_1}{2}\cdot(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^2 \\
& + A_1(\lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y-\mu_x\nu_x-\mu_y\nu_y-\mu_z\nu_z) \\
& + 2B_2\left[\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2+\frac{1}{2}(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)\right] \\
& + A_1'(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^3 + (A_1-2B_2)\cdot[-(\lambda_y+\lambda_z)(\lambda_z+\lambda_x)(\lambda_x+\lambda_y) + \mu_x\mu_y\mu_z + \nu_x\nu_y\nu_z + \mu_x\nu_x(\lambda_y+\lambda_z) + \\
& \qquad + \mu_y\nu_y(\lambda_z+\lambda_x) + \mu_z\nu_z(\lambda_x+\lambda_y)] \\
& + C_1(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)(\lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y-\mu_x\nu_x-\mu_y\nu_y-\mu_z\nu_z \\
& + A_{21}(\lambda_x\varepsilon_x^2+\lambda_y\varepsilon_y^2+\lambda_z\varepsilon_z^2-\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z-4\lambda_x\lambda_y\lambda_z) \\
& + B_{21}[(\lambda_y+\lambda_z)\varepsilon_x^2+(\lambda_z+\lambda_x)\varepsilon_y^2+(\lambda_x+\lambda_y)\varepsilon_z^2+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z-4(\lambda_y+\lambda_z)(\lambda_z+\lambda_x)(\lambda_x+\lambda_y)]
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

In die Augen springend ist der Zusammenhang der Glieder dieses Ausdruckes mit den vier Determinanten

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \begin{vmatrix} \lambda_x, & \mu_z, & \nu_y \\ \nu_z, & \lambda_y, & \mu_x \\ \mu_y, & \nu_x, & \lambda_z \end{vmatrix}, \quad
\beta = \begin{vmatrix} \lambda_x, & \frac{\mu_z+\nu_z}{2}, & \frac{\mu_y+\nu_y}{2} \\ \frac{\mu_z+\nu_z}{2}, & \lambda_y, & \frac{\mu_x+\nu_x}{2} \\ \frac{\mu_y+\nu_y}{2}, & \frac{\mu_x+\nu_x}{2}, & \lambda_z \end{vmatrix}, \\
\gamma &= \begin{vmatrix} -(\lambda_y+\lambda_z), & \mu_z, & \nu_y \\ \nu_z, & -(\lambda_z+\lambda_x), & \mu_x \\ \mu_y, & \nu_x, & -(\lambda_x+\lambda_y) \end{vmatrix}, \quad
\delta = \begin{vmatrix} -(\lambda_y+\lambda_z), & \frac{\mu_z+\nu_z}{2}, & \frac{\mu_y+\nu_y}{2} \\ \frac{\mu_z+\nu_z}{2}, & -(\lambda_z+\lambda_x), & \frac{\mu_x+\nu_x}{2} \\ \frac{\mu_y+\nu_y}{2}, & \frac{\mu_x+\nu_x}{2}, & -(\lambda_x+\lambda_y) \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Bezeichnet man nämlich durch α', beziehungsweise β' die Summe der zu $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$ adjungirten Unterdeterminanten der Determinante α, beziehungsweise β, durch β'' die Summe der Quadrate sämmtlicher Glieder der Determinante β und durch λ die Summe aus $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$, also

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \lambda_x+\lambda_y+\lambda_z \\
\alpha' &= (\lambda_y\lambda_z-\mu_x\nu_x)+(\lambda_z\lambda_x-\mu_y\nu_y)+(\lambda_x\lambda_y-\mu_z\nu_z) \\
\beta' &= \lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y-\frac{1}{4}\left[(\mu_x+\nu_x)^2+(\mu_y+\nu_y)^2+(\mu_z+\nu_z)^2\right] \\
\beta'' &= \lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2+\frac{1}{2}\left[(\mu_x+\nu_x)^2+(\mu_y+\nu_y)^2+(\mu_z+\nu_z)^2\right] = \lambda^2-2\beta'
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

so ist den Gleichungen (47) und (26) gemäss

$$\left.\begin{aligned} f = A_0 + A_1\lambda + \frac{C_1 - A_1}{2}\lambda^2 + A_1\alpha' + 2B_2\beta'' \\ + A_1'\lambda^3 + (A_1 - 2B_2)\gamma + C_1\lambda\alpha' - 4A_{21}\beta + 4B_{21}\delta \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

wo auch $\gamma = -\lambda\alpha' + \alpha$ und $\delta = -\lambda\beta' + \beta$ gesetzt werden kann.

Der Ausdruck (47), beziehungsweise (50) für die Potentialfunction f ist bis auf Glieder dritter Ordnung genau.

Die Werthe der Spannungscomponenten ergeben sich entweder aus (47) mit Zuhilfenahme der Gleichungen (20) oder durch Einsetzung der Werthe aus (46) und (40) in die Gleichungen (27). Man erhält so nach entsprechender Reduction und nach Einführung der Werthe (26) und bei Beachtung des Werthes von B_1' in (40) folgende Gleichungen, die bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig sind:

$$\left.\begin{aligned} D.X_x = {} & A_1 + 4B_2\lambda_x + C_1(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) \\ & + B_1'(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)^2 + 2B_2(\lambda_x^2 + \nu_z^2 + \mu_y^2) \\ & + C_1(\lambda_y\lambda_z + \lambda_z\lambda_x + \lambda_x\lambda_y - \mu_x\nu_x - \mu_y\nu_y - \mu_z\nu_z) \\ & - 4A_{21}\left[\lambda_y\lambda_z - \left(\frac{\mu_x + \nu_x}{2}\right)^2\right] + \\ & \qquad + 4B_{21}\left[\lambda_x^2 + \left(\frac{\mu_z + \nu_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_y + \nu_y}{2}\right)^2\right] \\ D.Y_z = {} & 2B_2(\mu_x + \nu_x) + 2B_2[\mu_z\nu_y + \lambda_y\mu_x + \nu_x\lambda_z] \\ & - 4A_{21}\left[\frac{\mu_y + \nu_y}{2}\cdot\frac{\mu_z + \nu_z}{2} - \lambda_x\cdot\frac{\mu_x + \nu_x}{2}\right] \\ & + 4B_{21}\left[\frac{\mu_z + \nu_z}{2}\cdot\frac{\mu_y + \nu_y}{2} + \lambda_y\frac{\mu_x + \nu_x}{2} + \frac{\mu_x + \nu_x}{2}\lambda_z\right] \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Der innige Zusammenhang der Factoren von $2B_2$ und C_1 mit den entsprechenden Gliedern der Determinante α in (48) und der Factoren von $4A_{21}$ und $4B_{21}$ mit den entsprechenden Gliedern der Determinante β ist derart ersichtlich, dass er einer näheren Auseinandersetzung nicht bedarf.

Da nach (8) die cubische Dilatation

$$\left.\begin{aligned} D - 1 = {} & \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z + \lambda_y\lambda_z + \lambda_z\lambda_x + \lambda_x\lambda_y - \mu_x\nu_x - \mu_y\nu_y - \mu_z\nu_z \\ & + \lambda_x\lambda_y\lambda_z + \mu_x\mu_y\mu_z + \nu_x\nu_y\nu_z \\ & \qquad - \lambda_x\mu_x\nu_x - \lambda_y\mu_y\nu_y - \lambda_z\mu_z\nu_z = \lambda + \alpha' + \alpha \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

so ist, wenn man Glieder dritter Ordnung vernachlässigt

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{D} &= 1-(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)+(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^2- \\ &-(\lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y-\mu_x\nu_x-\mu_y\nu_y-\mu_z\nu_z) = 1-\lambda+\lambda^2-\alpha'\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

sonach zufolge (51) und (40) bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$\left.\begin{aligned}X_x &= A_1+4B_2\lambda_x+(C_1-A_1)(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z) \\ &+(3A_1'-4B_{21})(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^2+2B_2[(\lambda_y+\lambda_z)^2+\nu_z^2+\mu_y^2] \\ &+(C_1-A_1)(\lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y-\mu_x\nu_x-\mu_y\nu_y-\mu_z\nu_z) \\ &-4A_{21}\left[\lambda_y\lambda_z-\left(\frac{\mu_x+\nu_x}{2}\right)^2\right]+ \\ &\qquad +4B_{21}\left[\lambda_x^2+\left(\frac{\mu_z+\nu_z}{2}\right)^2+\left(\frac{\mu_y+\nu_y}{2}\right)^2\right] \\ Y_z &= 2B_2(\mu_x+\nu_x)+2B_2[\mu_z\nu_y-(\lambda_z+\lambda_x)\mu_x-\nu_x(\lambda_x+\lambda_y)] \\ &-4A_{21}\left[\frac{\mu_y+\nu_y}{2}\cdot\frac{\mu_z+\nu_z}{2}-\lambda_x\cdot\frac{\mu_x+\nu_x}{2}\right] \\ &+4B_{21}\left[\frac{\mu_z+\nu_z}{2}\cdot\frac{\mu_y+\nu_y}{2}+\lambda_y\cdot\frac{\mu_x+\nu_x}{2}+\frac{\mu_x+\nu_x}{2}\cdot\lambda_z\right]\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Die Factoren von $2B_2$ entsprechen in diesen beiden für unsere Zwecke wichtigsten Schlussgleichungen nicht mehr wie in (51) den Gliedern der Determinante α, sondern den analogen Gliedern der Determinante γ in (48). Der Factor von C_1-A_1 in (54), nämlich $\lambda+\alpha'$, ist zufolge (52) der cubischen Dilatation $(D-1)$ gleich, während in derselben Gleichung der Factor von $3A_1'-4B_{21}$, nämlich $(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^2$, dem Quadrate dieser cubischen Dilatation gleichgesetzt werden kann.

Durch cyclische Permutation von XYZ, beziehungsweise xyz ergeben sich aus (54) die Werthe aller übrigen Spannungscomponenten.

Wie aus den gefundenen Hauptgleichungen (47) und (54) zu ersehen ist, hat man, wenn bei der Berechnung des Potentials der inneren Kräfte Glieder dritter, sonach bei der Bestimmung der Spannungen (54) Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden sollen, ausser der Integrationsconstanten A_0 der Potentialfunction und der ursprünglichen, von der herrschenden Temperatur abhängigen Spannung A_1 fünf Elasticitätsconstanten

— die jedoch keineswegs nothwendigerweise von einander unabhängig sein müssen und deren eventuelle Beziehungen zu einander festzustellen eine (im folgenden zweiten Theile zu behandelnde) Aufgabe der Moleculartheorie und experimenteller Untersuchungen ist — in Betrachtung zu ziehen, und zwar sind dies, wenn die zu Grunde gelegten Gleichungen die Form (47) und (54) haben sollen, die Constanten $B_2 C_1 A'_1 A_{21}$ und B_{21}, sonach ausser den bisher in der Elasticitätstheorie stets zur Betrachtung kommenden Constanten B_2 und C_1 noch die drei Constanten A'_1, A_{21} und B_{21}. Würde man etwa in ähnlicher Weise, wie dies in dieser Untersuchung geschehen ist, auch Glieder der nächst höheren Ordnung in die Rechnung einführen, so müsste man vier weitere Elasticitätsconstanten in die Rechnung einbeziehen. Begnügt man sich, wie dies allgemein geschieht, bei der Berechnung des Potentials der inneren Kräfte mit Gliedern zweiter Ordnung, so dass die Spannungen als lineare Functionen der Verschiebungsderivationen angesehen werden dürfen und setzt überdies in den Gleichungen (47) und (54) $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ und etwa $2B_2 = -K$ und $C_1 = -2K\Theta$, wo dann K den sogenannten Modulus der Starrheit (Schubspannungsmodul) und $E = 2K\frac{1+3\Theta}{1+2\Theta}$ den sogenannten Elasticitätsmodulus, beziehungsweise $W = \frac{2}{3}K(1+3\Theta)$ den sogenannten Compressionswiderstand bedeutet, so nehmen die Gleichungen (47) und (54) die bekannte gebräuchliche Form (nach Kirchhoff) an:

$$f = -K[\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2+\frac{1}{2}(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)+\Theta(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^2]$$

$$X_x = -2K[\lambda_x+\Theta(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)]$$

$$Y_z = -K(\mu_x+\nu_x)$$

Setzt man in (47) die Werthe (32) und (31) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} f = {} & A_0+A_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\frac{C_1-A_1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 \\ & +A_1(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)+2B_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) \\ & +A'_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3-(A_1-2B_2)(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2) \\ & +C_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)-4A_{21}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ & -4B_{21}(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2) \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

und für die Hauptspannungen ergeben sich aus (35) oder (54) die Werthe

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= A_1+4B_2\lambda_1+(C_1-A_1)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\\
&\quad+(3A_1'-4B_{21})(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2+2B_2(\lambda_2+\lambda_3)^2\\
&\quad+(C_1-A_1)(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)-4A_{21}\lambda_2\lambda_3+4B_{21}\lambda_1^2\\
S_2 &= A_1+4B_2\lambda_2+(C_1-A_1)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\\
&\qquad+(3A_1'-4B_{21})(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2\\
&\quad+2B_2(\lambda_3+\lambda_1)^2+(C_1-A_1)(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)-\\
&\qquad-4A_{21}\lambda_3\lambda_1+4B_{21}\lambda_2^2\\
S_3 &= A_1+4B_2\lambda_3+(C_1-A_1)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\\
&\qquad+(3A_1'-4B_{21})(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2\\
&\quad+2B_2(\lambda_1+\lambda_2)^2+(C_1-A_1)(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)-\\
&\qquad-4A_{21}\lambda_1\lambda_2+4B_{21}\lambda_3^2
\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Die Gleichungen (47) und (54) lassen sich in mannigfacher Weise umformen. Nicht ohne Interesse ist folgende in einfacher Weise deducirbare Form dieser Gleichungen: Bezeichnet man durch ν die cubische Dilatation $\nu = D-1 = \lambda+\alpha'+\alpha$, durch σ die um 3 verminderte Summe der Quadrate sämmtlicher Glieder der ursprünglichen Determinante (8), so dass

$$\sigma = (1+\lambda_x)^2+(1+\lambda_y)^2+(1+\lambda_z)^2+\mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2+\nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2-3$$

von derselben Dimension ist wie die Dilatationen, so ist, wenn $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z C_{23} \beta\beta''$ und λ die in (26), (46), (48) und (49) angeführten Werthe bedeuten und wenn kürzehalber

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= A_0+(A_1-2B_2)\nu+\left(\frac{C_1-A_1}{2}+B_2\right)\nu^2+(A_1'-2B_{21})\nu^3\\
f_2 &= 4(B_{21}-A_{21})\beta+2B_{21}\lambda\beta'' = 4C_{23}\beta+2B_{21}\nu\beta''
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned}
f &= f_1+f_2+B_2\sigma\\
X_x &= \frac{\partial f_1}{\partial \nu}+\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_x}+2B_2\frac{(1+\lambda_x)^2+\nu_z^2+\mu_y^2}{D}\\
Y_z &= \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_x}+2B_2\frac{\mu_z\nu_y+(1+\lambda_y)\mu_x+\nu_x(1+\lambda_z)}{D}
\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

wodurch ein verhältnissmässig einfacher Zusammenhang mit der ursprünglichen Determinante D und der Determinante β ausgedrückt ist.

Die geometrische Bedeutung der Zähler der beiden letzten Brüche in den Ausdrücken (58) für X_x und Y_z lässt sich aus folgender Betrachtung entnehmen:

Jene Punkte m', die anfangs in einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt m, deren Radius dl und deren Gleichung $dx^2+dy^2+dz^2=dl^2$ ist, liegen zur Zeit t bekanntlich, wie sofort aus (6) zu entnehmen ist, wenn man aus diesen Gleichungen dx, dy, dz bestimmt und diese Werthe in die Gleichung der Kugelfläche einsetzt, in jenem Ellipsoid — dem Deformationsellipsoid (Dilatationsellipsoid, Verschiebungsellipsoid) —, dessen Halbaxen $(1+\lambda_1)dl$, $(1+\lambda_2)dl$, $(1+\lambda_3)dl$ die Richtungen $a'b'c'$ der Dilatationshauptaxen haben, und dessen Gleichung, wenn man wieder, wie früher, durch $l_x m_z n_y \ldots$ die Subdeterminanten der Determinante (8) bezeichnet, lautet:

$$(l_x.dX+m_z.dY+n_y dZ)^2+(n_z.dX+l_y.dY+m_x.dZ)^2+\\+(m_y.dX+n_x.dY+l_z.dZ)^2 = D^2.dl^2.$$

Die Kanten MM_1, MM_2, MM_3 des früher betrachteten Tetraëders (7) sind conjugirte Radien dieses Ellipsoids, wofern die zu einander senkrechten, dem ursprünglichen Tetraëder dv angehörigen Kanten $mm_1 = mm_2 = mm_3 = dl$ gewählt werden.

Jenes dem Deformationsellipsoid adjungirte Ellipsoid, dessen Halbaxen mit den Halbaxen des ersteren gleichgerichtet und diesen invers proportional sind, also etwa die Längen $\frac{dl}{1+\lambda_1}$, $\frac{dl}{1+\lambda_2}$, $\frac{dl}{1+\lambda_3}$ haben, hat die Gleichung[1]

$$[(1+\lambda_x).x+\mu_z.y+\nu_y z]^2+[\nu_z x+(1+\lambda_y)y+\mu_x z]^2+\\+[\mu_y x+\nu_x y+(1+\lambda_z)z]^2 = dl^2.$$

Die zu den Seitenflächen $f_1 = \overline{M_2 M M_3}$, $f_2 = \overline{M_3 M M_1}$ und $f_3 = \overline{M_1 M M_2}$ des Tetraëders dV senkrechten Radien dieses

[1] Siehe Finger, »Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser, in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung, nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik«. Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, Abth. II. a, S. 1108 und 1112.

Ellipsoids sind conjugirte Radien desselben und deren Längen sind den mit diesen gleichgerichteten Höhen des Tetraëders dV invers, also den Dreiecksflächen $f_1 f_2 f_3$ direct proportional.[1]

Bringt man die letzte Gleichung auf die Form $a_x x^2 + a_y . y^2 + + a_z . z^2 + 2 b_x . yz + 2 b_y . zx + 2 b_z . xy = dl^2$, so ersieht man sofort, dass $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ die gesuchten Zähler in den durch (58) ausgedrückten Werthen von $X_x Y_y Z_z Y_z Z_x X_y$ sind.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, dass sich nicht nur der erste und letzte Summand von f in der Gleichung (58), sondern auch der mittlere Summand f_2 als Function von ν und σ ausdrücken lässt, wofern nur noch ausser der cubischen Dilatation $\nu = D - 1$ und der Summe $(\sigma + 3)$ der Quadrate sämmtlicher Glieder der Determinante D auch die Summe der Quadrate sämmtlicher Subdeterminanten $l_x m_z' n_y \ldots$ von D in die Rechnung einbezogen wird. Ist nämlich s die um 3 verminderte letztere Summe, also $s = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 + m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 + n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 3$, so ist, wie aus (48) und (49) leicht zu deduciren ist,

$$\beta = \frac{1}{4}\nu + \frac{1}{8}(\sigma - s + \nu^2)$$

$$\lambda\beta'' = (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z)\beta'' = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2}{4} - \nu^2 + \nu^3\right],$$

so dass, wenn man diese Werthe in (57) und (58) einsetzt, sich auch die Potentialfunction f als Function der drei Variabeln ν, σ und s darstellen lässt.

Um Missdeutungen zu verhüten, sei schliesslich bemerkt, dass zwar, wenn man von Gliedern höheren Grades als des ersten absieht, die sogenannten Deformationsgrössen durch λ_x, λ_y, λ_z, $\varepsilon_x = \mu_x + \nu_x$, $\varepsilon_y = \mu_y + \nu_y$, $\varepsilon_z = \mu_z + \nu_z$ bestimmt sind, und zwar bekanntlich durch $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$ die linearen Dilatationen parallel zu den Coordinatenaxen und durch $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ die Grössen der Schiebungen in den zu den drei Coordinatenebenen parallelen Ebenen, dass dies jedoch bei Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung nicht der Fall ist. Es lässt sich nämlich leicht einsehen, dass bei Vernachlässigung von Gliedern

[1] L. c.

höherer Ordnung als der zweiten die linearen Dilatationen $\Lambda_x \Lambda_y \Lambda_z$ parallel zu den Coordinatenaxen den Gleichungen

$$\Lambda_x = \lambda_x + \frac{1}{2}(\mu_z^2 + \nu_y^2)$$

$$\Lambda_y = \lambda_y + \frac{1}{2}(\mu_x^2 + \nu_z^2)$$

$$\Lambda_z = \lambda_z + \frac{1}{2}(\mu_y^2 + \nu_x^2)$$

entsprechen müssen, dass ferner unter derselben Voraussetzung, wenn durch $E_x E_y E_z$ die Änderungen der Kantenwinkel des ursprünglichen Tetraëders dv bezeichnet sind, also der Winkel $(M_2 M M_3) = \frac{\pi}{2} + E_x$, $(M_3 M M_1) = \frac{\pi}{2} + E_y$, $(M_1 M M_2) = \frac{\pi}{2} + E_z$ ist,

$$-E_x = \varepsilon_x + \mu_y \nu_z - \lambda_y \mu_x - \lambda_z \nu_x$$

$$-E_y = \varepsilon_y + \mu_z \nu_x - \lambda_z \mu_y - \lambda_x \nu_y$$

$$-E_z = \varepsilon_z + \mu_x \nu_y - \lambda_x \mu_z - \lambda_y \nu_z$$

während, wenn $H_x H_y H_z$ die Änderungen der Seitenwinkel der Ecke M des Tetraëders bedeuten, so dass, wenn $N_1 N_2 N_3$ die von $M_1 M_2 M_3$ auf die Gegenflächen $M_2 M M_3$, $M_3 M M_1$, $M_1 M M_2$ gefällten Höhen bedeuten, die Winkel $(N_2 N_3) = \frac{\pi}{2} + H_x$, $(N_3 N_1) = \frac{\pi}{2} + H_y$, $(N_1 N_2) = \frac{\pi}{2} + H_z$ sind,

$$H_x = \varepsilon_x - \mu_z \nu_y - \lambda_y \mu_x - \lambda_z \nu_x - \mu_y \mu_z - \nu_y \nu_z$$

$$H_y = \varepsilon_y - \mu_x \nu_z - \lambda_z \mu_y - \lambda_x \nu_y - \mu_z \mu_x - \nu_z \nu_x$$

$$H_z = \varepsilon_z - \mu_y \nu_x - \lambda_x \mu_z - \lambda_y \nu_z - \mu_x \mu_y - \nu_x \nu_y$$

also z. B. $-E_x - H_x = (\mu_y + \nu_y)(\mu_z + \nu_z) = \varepsilon_y \varepsilon_z$ u. s. w. ist.

Nach Abschluss dieser Abhandlung ist mir eine in der Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 8. Juli 1893 vorgelegte Abhandlung von Prof.

W. Voigt,[1] welche zufälligerweise denselben Gegenstand behandelt, in die Hand gekommen. Nichtsdestoweniger habe ich mich bestimmt gefunden, meine Untersuchungen zu publiciren, da Prof. Voigt, der gleichfalls durch die Beobachtungsresultate O. Thompson's zu dieser Arbeit veranlasst wurde, durch seine theoretischen Untersuchungen zu Ergebnissen gelangt ist, die von den meinen verschieden sind. Setzt man nämlich, um den Zusammenhang zwischen meiner Bezeichnungsweise und jener Voigt's herzustellen, $f = -F$, ferner $\lambda_x = x_x$, $\lambda_y = y_y$, $\lambda_z = z_z$, $\varepsilon_x = \mu_x + \nu_x = y_z$, $\varepsilon_y = z_x$ und $\varepsilon_z = x_y$ * und bezeichnet kürzehalber durch δ und ϑ die Ausdrücke $\delta = x_x + y_y + z_z$, $\vartheta = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2)$, so lauten die von Prof. Voigt gefundenen Formeln:

$$2F = c_1\delta^2 + c_2\vartheta + \frac{2c_1'}{3}\delta^3 + c_2'.\delta\vartheta$$

$$-X_x = c_1\delta + c_2 x_x + c_1'\delta^2 + c_2'.\delta\vartheta$$

$$-Y_z = \frac{c_2}{2} y_z + \frac{c_2'}{2} y_z\delta,$$

welche anders lauten als die von mir gefundenen Formeln (47) und (54). Prof. Voigt wendet dann diese blos zwei neue Elasticitätsconstanten c_1' und c_2' enthaltenden Formeln auf verschiedene besondere Fälle, nämlich die Dehnung, Torsion und Biegung eines cylindrischen isotropen Körpers an. Leider kann ich jedoch nicht die Bemerkung unterdrücken, dass nach meiner Überzeugung die zwei Voraussetzungen, von welchen Prof. Voigt bei der Ableitung seiner Formeln ausgeht, nicht stich-

[1] W. Voigt, »Über eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität.« Göttinger Nachrichten Nr. 13 (vom 2. August 1893), S. 534—552.

* Trotzdem ich diese von Kirchhoff gewählte Bezeichnungsweise als sehr zweckentsprechend ansehe und ich daher auch ursprünglich beabsichtigte, die Verschiebungsderivationen $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \mu_x \mu_y \mu_z \nu_x \nu_y \nu_z$ entsprechend ihren Werthen (3) durch $x_x y_y z_z z_y x_x y_x y_z z_x x_y$ zu bezeichnen, so bin ich doch von dieser Absicht abgekommen, um Missverständnissen vorzubeugen, die durch den Umstand leicht hätten herbeigeführt werden können, dass man fast allgemein z. B. durch ν_x nicht $\frac{\partial \eta}{\partial z}$, sondern die Summe $\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ zu bezeichnen pflegt.

hältig sind. Zunächst sind die nach meinem Dafürhalten viel zu willkürlichen Annahmen nicht begründet, dass die Spannungen blos Functionen der Grössen $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ sind (in dem besonderen Falle, dass die Deformation eine reine, von keiner Rotation begleitete, also etwa eine Potentialdeformation, sonach $\mu_x = \nu_x = \frac{1}{2} \varepsilon_x$, $\mu_y = \nu_y = \frac{1}{2} \varepsilon_y$ und $\mu_z = \nu_z = \frac{1}{2} \varepsilon_z$ ist, ist diese Annahme wohl streng richtig) ebensowenig wie die Annahme, dass die Potentialfunction f blos eine Function von δ und ϑ ist.

Dass diese Annahmen nothwendige »Folgerungen der Grundannahme seien, derzufolge die elastischen Drucke an einer Stelle nur von dem Zustande in der unmittelbaren Umgebung des Punktes abhängen« ist nicht einzusehen, da ja die Deformation in dem unmittelbar angrenzenden Körperelement, wofern auch Glieder zweiter Ordnung in Rechnung gezogen werden, nicht nur, wie früher gezeigt wurde, von $\lambda_x \lambda_y \lambda_z \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$, sondern auch von $\mu_x \nu_x \mu_y \ldots$ abhängig sind. Die Potentialfunction F, die Prof. Voigt als eine Function der zwei Grössen δ und ϑ annimmt, lässt sich in dem betrachteten Falle nach meiner Überzeugung nicht als eine Function von zwei Variabeln, wohl aber, wie ich gezeigt habe, als Function von drei Variabeln darstellen. Und ebenso ist die weitere Voraussetzung, dass auch bei Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung »die Formeln bestehen bleiben, welche die Druckcomponenten mit dem elastischen Potential F verbinden, nämlich $X_x = -\frac{\partial F}{\partial x_x}$, $X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y}$ u. s. w.«, nicht gerechtfertigt, wie dies die streng-giltigen Gleichungen (20) lehren. So dürfte auch der »Widerspruch« zu erklären sein, »in welchem«, wie Prof. Voigt selbst gesteht, »scheinbar die von O. Thompson bei Längsdehnung gefundenen Resultate mit den von mir (Prof. Voigt) bei Biegung und Torsion erhaltenen stehen«. Dass die Berücksichtigung der in der bisherigen Elasticitätstheorie nicht berücksichtigten Glieder höherer Ordnung auch nach der Meinung des Prof. Voigt (der sich durch seine Arbeiten um die Ausgestaltung der Theorie der Elasticität, besonders jener der krystallinischen Substanzen, unbestrittene Verdienste erworben hat) in manchen

Fällen von Wichtigkeit ist, ist aus folgender Bemerkung des Prof. Voigt in der citirten Abhandlung zu entnehmen: »Die von mir (Voigt) gefundenen Resultate zeigen, dass der Einfluss, den die nicht genaue Giltigkeit des gewöhnlichen elastischen Potentials auf die verschiedenen beobachteten Deformationen hat, eine ganz verschiedene Grössenordnung besitzt, z. B. bei Längsdehnung in einem Gliede erster, bei Biegung und Drillung in einem Gliede zweiter Ordnung auftritt, im ersten Falle also unter Umständen sehr merklich sein kann, wo er in den letzteren kaum nachweisbar ist«.

SITZUNGSBERICHTE

DER

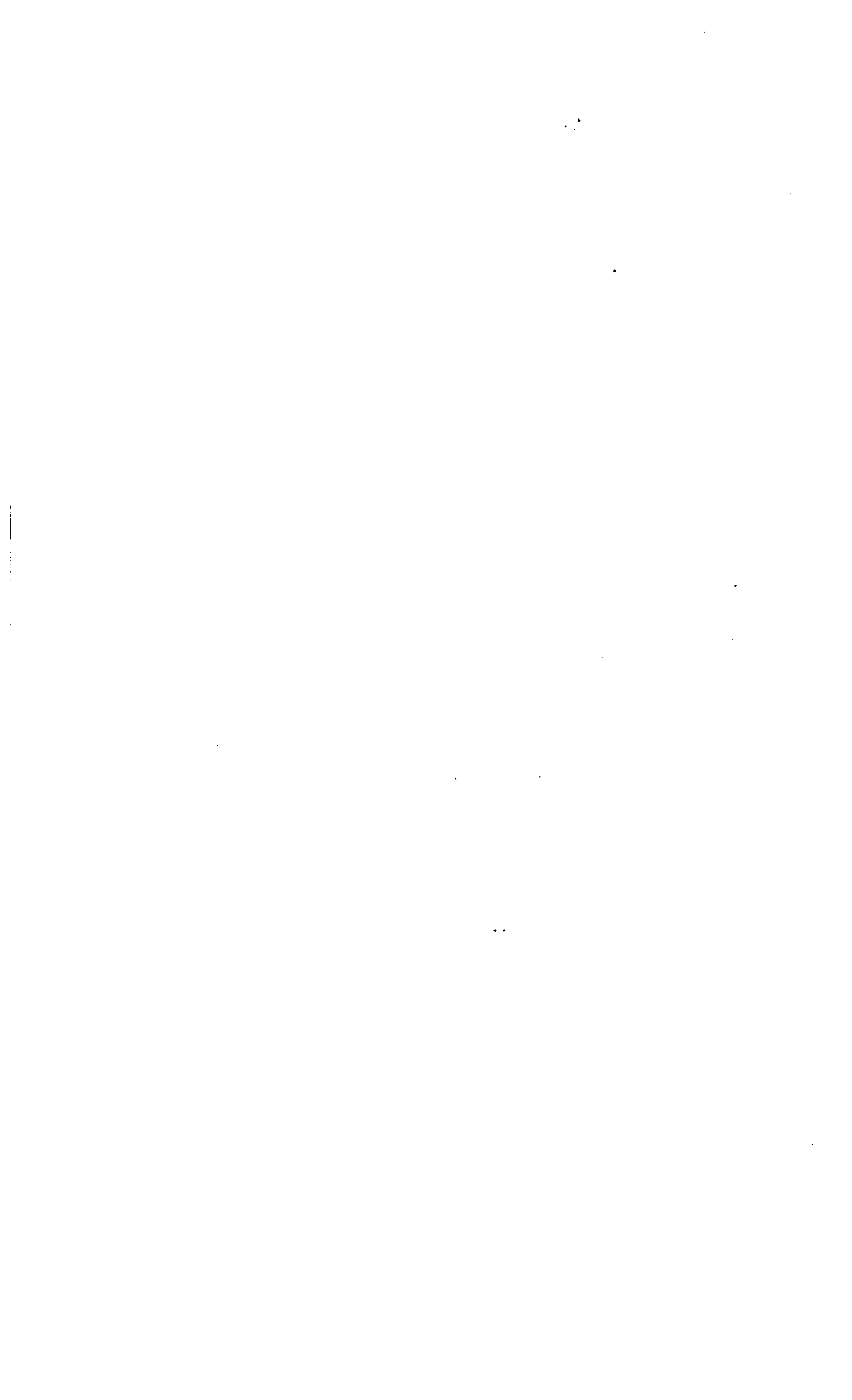
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



VII. SITZUNG VOM 1. MÄRZ 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft I (Jänner 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie, ferner das Register zum 14. Bande (Jahrgang 1893) dieser Monatshefte vor.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. I. Klemenčič: »Über die Magnetisirung von Eisen- und Nickeldraht durch schnelle elektrische Schwingungen«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Weiss in Prag übersendet eine Arbeit von Dr. A. Nestler, Assistenten am pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität daselbst, unter dem Titel: »Über Ringfasciation«.

Das c. M. Herr Director Th. Fuchs übersendet eine Abhandlung: »Über von der österreichischen Tiefsee-Expedition S. M. Schiffes „Pola" in bedeutenden Tiefen gedredschte *Cylindrites*-ähnliche Körper und deren Verwandtschaft mit *Gyrolithes*«.

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine Abhandlung des Herrn Friedrich Siebenrock, Assistenten am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, betitelt: »Das Skelet der *Lacerta Simonyi* Steind. und der Lacertidenfamilie überhaupt«.

Das w. M. Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Herrn Hans Meyer ausgeführte Untersuchung: »Über einige Derivate

der Picolinsäure und die Überführung derselben in α-Amidopyridin«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn Adolf Stengel über die Krystallformen einiger neuen organischen Verbindungen, und zwar von Picolinsäureamid; Jodäthylpicolinsäureäthylester; Äthylpyridinchloridchloroplatinat; Amidopyridinchloroplatinat; Mesoweinsäurenitril; Bromlacton, Dibromid, Amid und Baryumsalz der Oxypropilidenbuttersäure.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Statistischer Bericht über die volkswirthschaftlichen Zustände des Erzherzogthums Österreich unter der Enns im Jahre 1890, erstattet an das k. k. Handelsministerium von der Handels- und Gewerbekammer in Wien. I. Bd. Gewerbestatistik. Wien, 1893.

Über die Magnetisirung von Eisen- und Nickeldraht durch schnelle elektrische Schwingungen

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

In neuerer Zeit ist von verschiedenen Beobachtern festgestellt worden, dass elektrische Schwingungen in Eisendrähten viel stärker gedämpft werden, als in anderen nicht magnetisirbaren Metallen. Die stärkere Dämpfung erklärt sich aus der circularen oder transversalen Magnetisirung, infolge welcher die elektrischen Schwingungen noch viel mehr wie bei anderen Drähten in die Oberflächenschichten zusammengedrängt werden. Der Widerstand eines magnetisirbaren Leiters ist daher für Oscillationen viel grösser als der eines anderen Drahtes von gleicher Leitungsfähigkeit. Die Wärmeentwicklung in einem Leiter ist proportional dem Widerstand; man kann daher aus der Wärmeentwicklung beim Durchleiten elektrischer Schwingungen einen Schluss auf die Grösse des Widerstandes ziehen und hieraus mit Hilfe der von Lord Rayleigh[1] und Stefan[2] entwickelten Formeln den Werth der Permeabilität für diesen Fall berechnen. Bei der vorliegenden Untersuchung wurde die Wärmeentwicklung in den Eisen- und Nickeldrähten so wie bei früheren Messungen durch ein in der Nähe des Versuchsdrahtes aufgestelltes Thermoelement bestimmt und mit der

---

[1] Phil. Mag. Vol. 21, Jahrg. 1886.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. XCIX, Jahrg. 1890.

Wärmeentwicklung in einem ebenso dicken Messingdrahte verglichen, welcher in dieselbe Leitung eingeschaltet war. Die Versuche ergaben folgende Werthe für die Permeabilität μ: Weiches Eisen 118, Stahl (Klaviersaitendraht) weich 106, hart 115, Bessemerstahl weich 77, hart 74, Nickel 27.

Diese Werthe stimmen ganz gut mit jenen, welche Baur[1] und Lord Rayleigh[2] für sehr schwache magnetisirende Kräfte gefunden haben. Wie die Versuche der beiden genannten Forscher lehren, ist die Permeabilität bis zu gewissen Werthen der magnetisirenden Kraft eine constante Grösse, während sie dann rasch ansteigt.

Die vorliegenden Beobachtungen zeigen, dass wir uns bei diesen Versuchen in einem Gebiete constanter μ bewegen. Diese Thatsache kann nun so gedeutet werden, dass die hier verwendeten magnetisirenden Kräfte sehr schwach sind und der Grössenordnung nach in den Bereich jener Feldstärken fallen, bei welchen μ wirklich constant ist, oder auch so, dass wir es hier zwar mit viel grösseren magnetisirenden Kräften zu thun haben, dass aber die Magnetisirung dem raschen Wechsel derselben nicht so schnell folgen kann, um hiebei je den Theil der Magnetisirungscurve zu erreichen, welcher den variablen und viel grösseren Werthen von μ entspricht. Man hat ja sogar ursprünglich bezweifelt, ob sehr rasche elektrische Schwingungen überhaupt magnetisirend wirken könnten. Eine beiläufige Schätzung der hier in Betracht kommenden Feldstärken aus den bei den Schwingungen auftretenden Maximalstromstärken ergibt nun wenigstens für die Oberfläche der Drähte und für den Beginn der Oscillationen Werthe der magnetisirenden Kräfte, welche jene Grenze, innerhalb welcher μ constant ist, mehr als hundertmal überschreiten. Darnach würde hier thatsächlich ein Fall des Zurückbleibens der Magnetisirung[3] vorliegen. Hiebei muss freilich vorausgesetzt werden, dass die Resultate der Beobachtungen Baur's und Lord Rayleigh's,

---

[1] Wied. Ann., 11, 1880.

[2] Phil. Mag. Vol. 23, 1887.

[3] Dieses Zurückbleiben darf mit der Hysteresis nicht verwechselt werden.

welche sich auf die longitudinale Magnetisirung beziehen, auch auf die circulare anwendbar sind.

In den Grenzen, innerhalb welcher μ constant ist, gibt es keinen remanenten Magnetismus; die Magnetisirung in diesem Gebiete ist den Deformationen eines Körpers innerhalb der Elasticitätsgrenze ähnlich, während die weiteren Stadien der Magnetisirung mit dauernden Deformationen zu vergleichen sind, ein Analogon, auf welches schon Maxwell hingewiesen hat.

Der technisch verwendbare Theil der Magnetisirung liegt in dem Gebiete, welches den dauernden Deformationen entspricht; es ist nun sehr wahrscheinlich, und diese Annahme wird auch durch die Erfahrung gestützt, dass die Magnetisirung bei schnellen Feldwechseln dieses Gebiet nicht mehr erreicht, während die Moleküle innerhalb der Grenzen der constanten μ noch viel rascheren Schwingungen folgen können, wie die hier verwendeten. Weitere Versuche, welche vielleicht am besten mit Condensatorentladungen bei directer Beobachtung der Schwingungsdauer und der Dämpfung anzustellen wären, müssen darüber entscheiden.

Die Versuchsanordnung.

Bezüglich der Versuchsanordnung verweise ich auf eine frühere Abhandlung.[1] Der Primär- und Secundärinductor hatten dieselbe Grösse wie bei früheren Messungen und die Wärmeentwicklung wurde ebenfalls mit Hilfe eines in der Nähe des Versuchsdrahtes angebrachten feinen Thermoelements (Eisen-Constanten) gemessen; nur waren die beiden Drähte, in denen die Wärmeentwicklung verglichen werden sollte, nicht in einem Gehäuse befestigt, sondern es war jeder Versuchsdraht separat montirt. Die Länge der untersuchten Drähte betrug in allen Fällen 6*cm*, ihre Dicke wechselte zwischen 0·45 und 0·18*mm*, doch hatten die beiden Vergleichsdrähte immer gleiche Dicke. Der Secundärinductor war auf diese Weise aus mehreren Stücken zusammengesetzt; die aneinanderstossenden Stellen waren behufs besseren Contacts gut amalgamirt.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CII, 1893, und Wied. Ann., Bd. 50.

Die Resultate.

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:

α den Ausschlag des Thomson-Carpentier-Galvanometers, durch welchen die Wärmeentwicklung im Versuchsdraht gemessen wird;

β den Ausschlag des Galvanometers, welches mit dem Standardinductor verbunden war;

$\bar{\alpha}$ den auf $\beta = 100$ reducirten Werth von α;

ψ die Ablenkung des Thomson-Carpentier-Galvanometers, durch welche die Wärmeentwicklung im Versuchsdrahte beim Durchgange eines constanten Stromes gemessen wird. Die Stärke des Stromes war immer für beide Drähte gleich und ist bei jeder Tabelle angegeben.

C Die in dieser Rubrik angeführten Zahlen geben die Empfindlichkeit des Thomson-Carpentier-Galvanometers an. Bei dem hier verwendeten Instrument ändert sich die Empfindlichkeit im Verlaufe des Tages, vermuthlich infolge von Temperaturschwankungen, ziemlich beträchtlich. Zur Controle konnte in den Galvanometerkreis eine schwache elektromotorische Kraft von $0 \cdot 052/50000 \times 1 \cdot 438$ Volt eingeschaltet werden. Die hierauf beobachtete Doppelablenkung ist unter *C* eingetragen. Der Widerstand im Galvanometerkreise betrug 6·8 Ohm.

D bedeutet die Entfernung des Primär- vom Secundärinductor in *cm* und

V das Verhältniss der Wärmeentwicklung in den Vergleichsdrähten durch die elektrischen Schwingungen.

Jeder Werth von α ist das Mittel aus vier Beobachtungen, wovon zwei bei einer und zwei bei entgegengesetzter Richtung des Primärstromes im Inductorium erhalten wurden. Auch hier konnte man die Beobachtung machen, dass die Primärfunken manchmal bei einer Richtung viel activer waren, als bei der entgegengesetzten.

Die Erwärmung mit constantem Strom geschah durch Einschaltung der Versuchsdrähte in einen Stromkreis, in welchem sich ein Accumulator und ein passender Widerstand befand. In manchen Fällen war die Erwärmung des Eisens durch die

elektrischen Schwingungen sehr stark und es musste bei der Beobachtung derselben in den Kreis des Thomson-Carpentier-Galvanometers ein Widerstand eingeschaltet werden, welcher bei der Beobachtung an dem Vergleichsdraht wieder entfernt wurde. Die entsprechenden, für Eisen erhaltenen Zahlen müssen daher mit einem constanten Factor F multiplicirt werden; F ist bei jeder Tabelle angegeben; die Werthe von $\bar{\alpha}$ sind schon mit F multiplicirt.

Zum Vergleiche wurde immer ein Messingdraht verwendet.

Eisen—Messing.

Diese Combination wurde bei zwei verschiedenen Dicken untersucht. Das Eisen war ausgeglüht.

1.

Eisen- und Messingdraht 0·452 *mm* dick.

Widerstand pro Längeneinheit { Eisen = 0·0082 S. E.; Messing = 0·0053 »

Verhältniss der spec. Wid. = 1·55.

Constanter Strom = 0·135 Amp.; $F = 3\cdot15$ für $D = 20$ und 40.

Tabelle I.

D	C	Eisen				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	78·4	57·2	373	82	1447	40·0	97	77	126	11·5
	70·3	53·6	297	74	1269	35·0	72	85	108	11·9
40			220	86	815		53	86	62	13·2
			245	108	758		53	57	57	13·4
60			386	67	577		23	53	44	13·0
			450	89	508		34	92	36	13·9
									Mittel....	12·9

Das Verhältniss von $\psi = 1\cdot48$.

2.

Eisen- und Messingdraht 0·175 *mm* dick.

Widerstand pro Längeneinheit { Eisen = 0·055 S. E.
Messing = 0·036 »

Verhältniss der spec. Wid. = 1·51.

Constanter Strom = 0·066 Amp.; F = 5·2 für die oberen Werthe von α und 8·1 für die unteren, und zwar diesmal für alle drei Distanzen.

Tabelle II.

D	C	Eisen				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	73·8	239	674	48	7332	160	499	54	914	8·0
	70·7	235	344	39	7250	159	234	29	805	9·0
40			413	57	3791		354	88	400	9·5
			260	51	4148		168	43	387	10·5
60			445	78	2960		194	67	291	10·2
			203	52	3142		165	55	297	10·5
									Mittel....	9·6

Das Verhältniss von ψ = 1·49.

Stahl (Klaviersaitendraht)—Messing.

1.

Der Draht wurde von 0·5 *mm* auf 0·45 *mm* ausgezogen und dann untersucht.

Stahl- und Messingdraht 0·452 *mm* dick.

Widerstand pro Längeneinheit { Stahl = 0·0083 S. E.
Messing = 0·0053 »

Verhältniss der spec. Widerstände = 1·57.

Constanter Strom = 0·135 Amp.; F = 3·2 für D = 20 und 40.

Tabelle III.

D	C	Stahl (weich)				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	74·0	59·5	265	68	1253	38·6	60	58	103	12·1
	73 0	55·0	182	52	1107	35·3	45	46	97	11·4
40			125	54	749		31	61	51	14·6
			92	42	694		35	67	53	13·2
60			248	45	546		20	48	41	13·2
			331	62	534		27	63	42	12·6
								Mittel....		12·8

Das Verhältniss von $\psi = 1 \cdot 54$.

2.

Der Draht wurde bis zur Rothgluth erhitzt und hierauf in Wasser abgelöscht. Er war hart, doch nicht glashart.

Die Dicke wie vorher.

Widerstand pro Längeneinheit { Stahl $= 0 \cdot 0098$ S. E.; Messing $= 0 \cdot 0053$ »

Verhältniss der spec. Widerstände $= 1 \cdot 85$; $F = 3$ 2 für $D = 20$ und 40. Constanter Strom $= 0 \cdot 135$ Amp.

Tabelle IV.

D	C	Stahl (hart)				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	76	71	300	66	1480	39	78	71	111	13·4
	72	66	307	67	1486	36	69	68	101	14·7
40			183	71	842		44	79	56	15 0
			161	68	771		35	65	53	14 5
60			454	77	590		31	77	40	14·6
			436	74	593		28	73	38	15·5
								Mittel....		14·6

Das Verhältniss von $\psi = 1 \cdot 83$.

Bessemerstahl—Messing.

1.

Weicher Draht in dem Zustande, wie er den Zug verlässt.
Stahl- und Messingdraht 0·396 *mm* dick.

Widerstand pro Längeneinheit { Stahl = 0·0152 S. E. / Messing = 0·0064 »

Verhältniss der spec. Widerstände = 2·37; F = 3·15 für alle D.

Constanter Strom = 0·135 Amp.

Tabelle V.

D	C	Bessemerstahl (weich)				Messing				Γ
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	68·8	146	251	32	2495	54	55	27	168	14·8
	76·5	154	568	66	2709	57	124	63	196	13·8
40			150	34	1399		29	33	87	16·1
			180	36	1588		50	52	97	16·0
60			128	37	1087		23	34	66	16·3
			137	37	1175		27	36	75	15·7
									Mittel	15·4

Das Verhältniss von ψ = 2·70.

2.

Bessemerstahldraht, glashart.
Dicke wie vorhergehend.

Widerstand pro Längeneinheit { Stahl = 0·0252 S. E. / Messing = 0·0064 »

Verhältniss der spec. Widerstände = 3·94; F = 3·15 für D = 20 und 40.

Constanter Strom = 0·135 Amp.

Tabelle VI.

D	C	Bessemerstahl (hart)				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	75	208	498	82	1915	54	96	78	122	15·7
	69	189	407	51	2535	52	79	47	167	15·1
40			332	100	1046		62	101	62	16·9
			262	62	1327		38	45	85	15·7
60			600	77	780		46	112	41	18·9
			677	67	1014		32	50	64	15·8

Mittel.... 16·3

Das Verhältniss von $\psi = 3 \cdot 75$.

Nickel—Messing.

Der Nickeldraht wurde von 0·5 *mm* auf 0·452 *mm* ausgezogen und dann untersucht. Der Vergleichsdraht aus Messing hatte ebenfalls diesen Durchmesser.

Widerstand pro Längeneinheit { Nickel = 0·0109 S. E.
Messing = 0·0052 »

Verhältniss der spec. Widerstände = 2·10.

Constanter Strom = 0·135 Amp.

Tabelle VII.

D	C	Nickel				Messing				V
		ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	ψ	α	β	$\bar{\alpha}$	
20	74	81	603	50	1201	37	64	43	148	8·1
	73	81	484	42	1160	37	63	43	144	8·1
40			388	59	653		50	62	81	8·1
			284	45	635		43	54	79	8·0
40			149	32	462		28	46	61	7·6
			124	28	442		25	42	60	7·4

Mittel.... 7·9

Das Verhältniss von $\psi = 2 \cdot 20$.

Von diesen Beobachtungen sind nicht alle bei gleicher Empfindlichkeit des Standardinductors gemacht worden. Bei einer Gelegenheit wurde dieser durch einen Stoss stark erschüttert und dadurch seine Empfindlichkeit geändert, da die Drähte des Thermoelements nach einem früher angewandten Verfahren nur gekreuzt und nicht verlöthet waren. Tabelle VI zeigt den Einfluss dieses Unfalls, indem die oberen Werthe von $\bar{\alpha}$ durchwegs viel grösser sind, als die unteren, ein Unterschied, der nur durch eine Änderung im Standardinductor erklärt werden kann. Nebst den unteren Zahlen der Tabelle VI gehören hieher auch die Werthe der Tabelle V und VII.

Berechnung von μ.

Lord Rayleigh und Stefan (l. c.) haben für den Widerstand w' eines Drahtes gegen schnelle elektrische Schwingungen folgende Formel berechnet

$$w' = w\pi a\sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}}. \qquad 1)$$

Darin bedeutet w den Widerstand für constante Ströme, a den Radius, σ den specifischen Widerstand, μ die Permeabilität des Drahtes und n die Zahl der Schwingungen pro Secunde. Über den Werth von μ bei verschiedenen Eisensorten sind bekanntlich schon viele ausführliche Untersuchungen gemacht worden; μ ist keine constante Grösse, sondern eine Function der magnetisirenden Kraft und kann für weiches Eisen Werthe annehmen, die zwischen 100 und 3000 liegen. Nur bei den allerschwächsten Feldstärken ist μ constant, wie das die Untersuchungen von Lord Rayleigh und Baur (l. c.) lehren. Alle bisherigen Messungen von μ beziehen sich auf eine longitudinale Magnetisirung.

Der Verlauf von μ bei circularer oder transversaler Magnetisirung ist mit Ausnahme einer Untersuchung von Herwig über die circulare Magnetisirung von Eisenröhren bisher nicht studirt worden.

Als Grundlage der hier gezogenen Schlüsse wird nun angenommen, dass der Verlauf der Magnetisirung in circulärer Richtung nahezu der nämliche ist, wie in der longitudinalen.

Die Wärmeentwicklung in einem von elektrischen Schwingungen durchflossenen Drahte ist proportional dem entsprechenden Widerstande und hängt also bei magnetisirbaren Drähten von μ ab. Wenn wir nun die Resultate unserer Beobachtungen ansehen, so finden wir, dass der Werth von V für dieselbe Drahtsorte bei allen Werthen von D nahezu gleich ist; die Stärke der inducirten Schwingung und hiemit die Grösse der magnetisirenden Kraft nimmt jedoch mit zunehmendem D sicher ab, was ja die auf Messing bezüglichen Zahlenangaben bestätigen.[1] Zwar ist in einigen Tabellen der Werth von V für $D = 20$ etwas kleiner wie die beiden anderen, doch geht dieser Unterschied kaum über die Beobachtungsfehler hinaus.

Aber auch bei demselben D war die Stärke der inducirten Schwingung manchmal sehr verschieden je nach der Activität der Primärfunken, und doch ergab die Beobachtung beinahe immer gleiche Werthe von V.

Allerdings sind bei diesen Versuchen die Grenzen, innerhalb welcher die magnetisirende Kraft schwankt, nicht gross, doch müssten wir auch bei diesen Schwankungen viel grössere Differenzen in den Werthen von V bekommen, wenn sich die Magnetisirung in unserem Falle auf einem Theile der Magnetisirungscurve bewegen würde, welcher steil ansteigt und den rasch veränderlichen Werthen von μ entspricht. Dass wir uns bei unseren Versuchen in einem Gebiete constanter μ bewegen, wird auch durch die absoluten Werthe von μ bekräftigt, welche wir mit Hilfe der Formel 1 aus den vorliegenden Beobachtungen berechnen können. Obige Formel habe ich schon in einer früheren Arbeit nach einer Richtung geprüft und mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung gefunden; aber auch die Versuche von Bjerknes, wovon später die Rede sein wird, sprechen sehr dafür, dass die den Formeln zu Grunde gelegten Annahmen vollkommen zutreffend sind.

---

[1] Es sei bemerkt, dass die Werthe von $\bar{\alpha}$ für Messing dem Werthe von D nahezu verkehrt proportional sind, doch drückt sich in den Zahlen auch der Einfluss der Umgebung aus; es waren nämlich in der Nähe der Inductoren mehrere ausgedehnte Metallmassen vorhanden.

Werden zwei gleich dicke Drähte von denselben elektrischen Schwingungen durchflossen, so ist das Verhältniss der Wärmeentwicklung

$$V = \frac{w}{w_1}\sqrt{\frac{\mu\sigma_1}{\mu_1\sigma}}\,.$$

Setze ich $\mu_1 = 1$ und führe auch für w und w_1 die spec. Widerstände ein, so ist

$$V = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\sigma_1}}\,.$$

Daraus könnte man sogleich μ berechnen, wenn die beiden Thermoelemente, welche uns ein Maass der Wärmeentwicklung angeben sollen, gleich wirksam, respective empfindlich wären. Um diesen Umstand zu controliren, wurden die Drähte auch durch einen constanten Strom erwärmt, bei welchem es ja bekannt ist, dass die Wärmeentwicklung proportional dem spec. Widerstande geschehen muss. In den meisten Fällen stimmt das Verhältniss von ψ mit jenem der spec. Widerstände nahe überein; in anderen Fällen ist an V eine kleine Correction anzubringen; wir schreiben also

$$qV = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\sigma_1}},$$

wo $q = \frac{\sigma}{\sigma_1}\cdot\frac{\psi_1}{\psi}$ ist.

Wir haben also

$$\mu = q^2 V^2 \frac{\sigma_1}{\sigma}.$$

Bei dieser Berechnung wollen wir die Resultate der Tabelle II ausschliessen, weil die dort verwendeten Drähte nur 0·175 *mm* dick waren und die Formel 1 vielleicht für diese feinen Drähte nicht anwendbar ist.

In der nachfolgenden Tabelle sind die beobachteten (V) und die corrigirten Werthe (qV) des Verhältnisses der Wärmeentwicklung, sowie die absoluten Werthe von μ eingetragen.

Tabelle VIII.

Drahtsorte		V	qV	μ
Eisen weich		12·9	13·5	118
Stahl (Klaviersaite)	weich	12·8	13·1	106
	hart	14·6	14·7	115
Bessemerstahl	weich	15·4	13·5	77
	hart	16·3	17·1	74
Nickel		7·9	7·5	27

Bemerkungen über die Stärke der magnetisirenden Kräfte.

Um eine Schätzung der im Eisendrahte beim Durchgange elektrischer Schwingungen erregten magnetisirenden Kräfte zu erhalten, muss man vor Allem einen Überblick über die während der Oscillationen herrschenden Stromstärkeverhältnisse erlangen. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Wärmeentwicklung durch den constanten Strom und durch die Schwingungen. Bedeuten J und i die entsprechenden Stromstärken in einem bestimmten Zeitmoment, so ist die im Zeitelement dt entwickelte Wärmemenge gegeben durch MwJ^2dt und $Mw'i^2dt$, und während des Verlaufes einer ganzen Entladung ist sie $= Mw'\int_0^\infty i^2dt$. Man kann annehmen, dass die Schwingungen einer Entladung vollkommen ablaufen, bevor die nächste beginnt. Die Wärmeentwicklung pro Secunde ist N-mal so gross, wenn N Entladungen in der Zeiteinheit auftreten und wenn man annimmt, dass sich die Wärmewirkungen einfach superponiren.

Wir wollen als concretes Beispiel die Daten über den Messingdraht aus Tabelle I nehmen. Da ist $\psi = 37\cdot5$ und $\alpha = 94\cdot5$ für $D = 20$; also die Wärmeentwicklung durch die Schwingungen ungefähr 2·5mal so gross, als durch den constanten Strom; doch nehmen wir an, da es sich nur um eine Schätzung handelt, sie wäre gleich, so ist zu setzen

$$wJ^2 = Nw'\int_0^\infty i^2 dt. \qquad 2)$$

Bei der Schätzung der magnetisirenden Kräfte kommen die Maximalstromstärken der Oscillation in Betracht. Wir wollen nun den Verlauf einer Oscillation in der Form einer gedämpften Pendelschwingung annehmen, was ja angenähert richtig sein dürfte. Der erste maximale Ausschlag des Pendels, welches mit einer gewissen Geschwindigkeit die Ruhelage verlässt, repräsentirt uns hier die erste maximale Stromstärke i_m. Wir schreiben daher

$$i = Ai_m e^{-\frac{\lambda t}{T}} \sin\frac{\pi t}{T}, \qquad 3)$$

wo

$$A = e^{\frac{\lambda}{\pi}\,\mathrm{arttg}\,\frac{\pi}{\lambda}}\,\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\pi^2}.$$

λ bedeutet auch hier das logarithmische Decrement und T die Schwingungsdauer. Setzen wir diesen Werth in 2 ein, so ist

$$wJ^2 = Nw'A^2 i_m^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2\lambda t}{T}} \sin^2\frac{\pi t}{T}\,dt$$

und daher

$$wJ^2 = Nw'A^2 i_m^2 \frac{T}{4}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\pi}{\lambda^2+\pi^2}\right).$$

Wir können λ^2 gegen π^2 und ebenso $\frac{1}{\pi}$ gegen $\frac{1}{\lambda}$ vernachlässigen und haben also

$$wJ^2 = Nw'A^2 i_m^2 \frac{T}{4\lambda}.$$

Setzen wir für w' den Werth aus 1) ein, so ist

$$\frac{i_m^2}{J^2} = \frac{1}{\pi a}\sqrt{\frac{n\sigma}{\mu}}\,\frac{4\lambda}{NA^2}. \tag{4}$$

Je grösser die Dämpfung, desto stärker muss die Oscillation einsetzen, damit dieselbe Wärmewirkung erzeugt wird wie beim constanten Strom. Für Werthe von λ, welche sich der Null nähern, verliert die Gleichung ihre Richtigkeit; sie entspricht aber dann auch nicht mehr den Bedingungen, unter welchen wir sie aufgestellt haben. Wir machen den Vergleich an dem Messingdrahte; es ist $a = 0\cdot 0226\ cm$, $\sigma = 8000$, $N = 23$, $n = 9\times 10^7$ (nach einer früheren Bestimmung), $\mu = 1$.

Für die Beurtheilung der Dämpfung der Schwingungen im Secundärinductor muss der Umstand massgebend sein, dass hier ein Eisendraht eingeschaltet ist; eine theoretische Schätzung von λ aus Selbstinduction und Widerstand des Secundärinductors führt nahe auf den Werth $\lambda = 0\cdot 03$, welchen wir in unsere Berechnung einführen wollen.

Unter Zugrundelegung obiger Daten ergibt sich

$$\frac{i_m^2}{J^2} = 58000.$$

Wird ein Draht von einem constanten Strome durchflossen, so ist die circular wirkende magnetisirende Kraft H im Drahte und in einem Abstande a von der Axe desselben nach Kirchhoff[1]

$$H = 2\pi u a,$$

wo u die Stromdichtigkeit bedeutet.

Die gleiche Formel wurde später auch von H. Streintz[2] und Lorenz[3] aufgestellt. In jedem Punkte tragen zur magnetisirenden Kraft nur jene Stromfäden bei, welche innerhalb des Kreises liegen, auf dessen Peripherie sich der Punkt befindet, und zwar ist die Wirkung so, als wenn alle Stromfäden in der

[1] Pogg. Ann., Ergänzungsbd. V.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 76, 1877.

[3] Wied. Ann., Bd. VII.

Axe vereinigt wären. Man kann also obige Formel auch so schreiben

$$H = \frac{2i}{a},$$

wo i ganz einfach die Stromstärke innerhalb des Kreises vom Radius a bedeutet. Ist r der Radius des Drahtes, so kann man für einen Punkt der Oberfläche

$$H = \frac{2i}{r}$$

setzen. In unserem Falle ist zwar der Strom nicht gleichmässig über den ganzen Querschnitt, wohl aber symmetrisch um die Axe vertheilt, also die Formel noch anwendbar. Dabei ist noch ein Umstand zu berücksichtigen. Die Strömung, welche ohnehin nur in einer dünnen Schichte nahe an der Oberfläche auftritt, besitzt gegen die Tiefe zu eine Phasenverschiebung. Die magnetisirende Kraft der oberen Schichten erfährt also eine Gegenkraft durch die unteren Schichten. Diese Gegenwirkung ist allerdings sehr klein.

Nach den Berechnungen von Stefan (l. c.) ist in einem Eisendrahte unter der Annahme von $\mu = 150$ bei 50×10^6 Schwingungen in der Secunde die Amplitude in einer Tiefe von 0·0058 *mm* in der Phase um eine halbe Schwingungsdauer gegen die Amplitude an der Oberfläche verzögert. Die Amplitude ist in dieser Tiefe 23 mal kleiner als an der Oberfläche. Es ist bemerkenswerth, dass die Versuche von Bjerknes[1] mit den Berechnungen Stefan's sehr gut übereinstimmen. Nach Bjerknes verleiht eine auf Kupferdraht aufgetragene Eisenschichte von 0·006 *mm* dem Draht ganz den Charakter eines Eisendrahtes.

Mit Rücksicht auf diese Umstände ist also die Darstellung der Stromschwankungen durch Gleichung 3) auch nicht

[1] Wied. Ann., Bd. 48. In der betreffenden Tabelle ist für die Dicke der Eisenschichte von 0·0124 *mm* ein Werth für den Elektrometerausschlag eingetragen, der sich von dem für die Schichtdicke von 0·0057 *mm* nur sehr wenig unterscheidet. Die Beobachtungen von Bjerknes beziehen sich auf Drähte von 0·5 *mm* Durchmesser.

ganz correct und es ist zur Bestimmung von i_m nicht ohne Weiteres die Quadratwurzel aus 4 zu ziehen; mit Rücksicht auf die sehr starke Dämpfung der nach der Tiefe verlaufenden Strömung können wir uns jedoch erlauben

$$i_m = J\sqrt{58000} = 240\,J$$

zu nehmen. Nun ist $J = 0\cdot 135$ Amp., also $i_m = 32$ Amp. Mit dieser Stärke muss die Strömung ihr erstes Maximum erreichen;[1] für diesen Moment und für die Oberfläche ergibt sich also

$$H = 290 \text{ abs. E.}$$

Diese Zahl gibt allerdings nur den grössten möglichen Werth an; es nimmt H sowohl nach der Tiefe als auch im Verlaufe der Schwingung ab. Wenn man jedoch berücksichtigt dass μ auch mit abnehmender magnetisirender Kraft einen endlichen Werth beibehält, dann muss man wohl zugeben, dass sich diese extremen Werthe der magnetisirenden Kräfte bemerkbar machen müssten, wenn die Moleküle oder Molekülgruppen im Stande wären, ihrem raschem Wechsel zu folgen. Es liegt nahe anzunehmen, dass die Magnetisirung eines Körpers bei sehr rasch wechselndem Felde überhaupt nicht über jene Grenzen hinausgeht, innerhalb welcher μ constant ist und welche ihr Analogon in den elastischen Deformationen eines Körpers hat. Eine stärkere Magnetisirung über dieses Gebiet hinaus nimmt wahrscheinlich mit zunehmender Wechselzahl rasch ab, wenigstens scheint die Erfahrung dafür zu sprechen.

Beobachtungen in dieser Richtung wären gewiss von Interesse.

Vielleicht würde sich eine solche Untersuchung direct mit Condensatorentladungen führen lassen. Legt man Eisendrähte in eine Rolle und schickt durch diese eine Condensatorentladung, welche oscillatorisch verläuft, so werden die Oscillationen in doppelter Weise durch die Eisendrähte beeinflusst.

---

[1] Man muss dabei bedenken, dass diese hohe Stromstärke nur eine ausserordentlich kurze Zeit anhält.

Erstens wird die Dauer der Oscillation verlängert, da die Eisendrähte den Selbstinductionscoëfficienten des Entladungskreises erhöhen, und zweitens wird auch die Dämpfung der Schwingungen vermehrt, insoferne als in den Eisendrähten infolge der Hysteresis ein Theil der Schwingungsenergie absorbirt wird.[1] Mit Hilfe des von Hiecke[2] construirten Apparates kann die Schwingungsdauer einer Entladung ziemlich genau bestimmt werden und man kann dabei auch die Dämpfung messen. Auf diese Weise könnte man einigen Aufschluss über das Verhalten des Eisens bei Schwingungen erhalten, deren Zahl zwischen 500 und 10000 liegt.

---

[1] Die Foucault'schen Ströme müssten eliminirt werden.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 96, 1887.

VIII. SITZUNG VOM 8. MÄRZ 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft IX und X (November und December 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. Skraup in Graz übersendet zwei im chemischen Institute der k. k. Universität in Graz ausgeführte Untersuchungen:

1. »Über propionylirte Schleimsäureester«, von P. Fortner und Zd. H. Skraup.
2. »Über die Umwandlung der Citraconsäure in Mesaconsäure«, von Dr. R. Franz.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine von Dr. J. Weidenfeld im physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Untersuchung, die den Titel trägt: »Versuche über die respiratorische Function der Intercostalmuskeln. II. Abhandlung. Sind die Intercostalmuskeln bei der Athmung thätig?«

Herr Dr. Gustav Jäger, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über die innere Reibung der Lösungen«.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

IX. SITZUNG VOM 5. APRIL 1894.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 17. März l. J. erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Regierungsrath Prof. Dr. Gustav Adolph Weiss in Prag.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1893), Abtheilung I, und das Heft IX—X (November und December 1893), Abtheilung II. a., des 102. Bandes der Sitzungsberichte, ferner das Heft II (Februar 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Der Magistrat der k. k. Reichshaupt- und Residenzstadt Wien spricht der kaiserl. Akademie den Dank aus für das demselben übermittelte Gutachten über den neuesten Stand der Blitzableiterfrage.

Herr Prof. Dr. V. Hilber in Graz dankt für die ihm zu einer zweiten geologischen Forschungsreise nach Thessalien und Macedonien bewilligte Subvention; desgleichen dankt Herr Custos Dr. Günther Ritter Beck v. Mannagetta für die ihm bewilligte Reisesubvention zur Durchführung seiner botanischen Forschungen im nordwestlichen Theile der Balkanhalbinsel.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen übersendet eine Arbeit aus dem phyto-paläontologi-

schen Institute der k. k. Universität in Graz: »Über atavistische Blattformen des Tulpenbaumes«, von Adolf Noé v. Archenegg.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind« (II. Theil), von Prof. Dr. J. Finger an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
2. »Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten« (II. Mittheilung), von Prof. Dr. O. Tumlirz an der k. k. Universität in Czernowitz.
3. »Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung«, von Prof. Em. Czuber an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
4. »Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung«, von A. J. Stodolkiewitz, Gymnasialprofessor in Plotzk (Polen).

Ferner legt der Secretär zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, und zwar:

1. Von Herrn Franz Müller in Siegenfeld, mit der Aufschrift: »Neuerung an Verkehrsmitteln«;
2. von Prof. Dr. A. Wassmuth in Graz mit der Aufschrift: »Über die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium im IV. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung: »Eine neue Phytoptiden-Gattung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine von Herrn Prof. Dr. R. Přibram übersandte Arbeit aus dem

chemischen Laboratorium der Universität zu Czernowitz: »Zur Kenntniss des Resacetophenons«, von A. Wechsler.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben zwei von Herrn Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendete Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Über einige Derivate der Veratrumsäure und des Veratrols«, von Dr. Wilhelm Heinisch.
2. »Über die trockene Destillation des Kalksalzes der Diäthylprotocatechusäure«, von Dr. Wilhelm Heinisch.

Endlich überreicht Herr Hofrath Lieben eine von dem Director der Versuchsanstalt für Photographie, Herrn J. M. Eder, eingesandte Arbeit des Herrn Eduard Valenta: »Über die Löslichkeit des Chlor-, Brom- und Jodsilbers in verschiedenen anorganischen und organischen Lösungsmitteln«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn Adolf Stengel: »Über die Krystallform des Tetramethylbrasilin $[C_{16}H_{10}O_5(CH_3)_4]$«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Die Formbildung des menschlichen Blinddarmes und die *Valvula coli*«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer überreicht eine Mittheilung des Herrn F. Hasenöhrl: »Über das quadratische Reciprocitätsgesetz«

Herr Dr. Eduard Freiherr v. Haerdtl, Professor an der k. k. Universität zu Innsbruck, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Entdeckung der Ursache der Nichtübereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtungen des Mondes«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Adamkiewicz, A., Tafeln zur Orientirung an der Gehirnoberfläche des lebenden Menschen bei chirurgischen Operationen und klinischen Vorlesungen. (Mit deutschem, französischem und englischem Text.) Zweite unveränderte Auflage. Wien, 1894; Folio.

Staggemeier, A., First Part of the General-Maps for the Illustration of Physical Geography. (Contain five tables marked: I—V.) Copenhagen, 1893; Folio.

Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind

(II. Theil)

von

Dr. **Jos. Finger.**

In dem ersten Theile dieser Abhandlung[1] wurden die Beziehungen zwischen den Componenten der Spannung und den Deformationen, sowie auch der Ausdruck für das Potential der elastischen Kräfte lediglich aus zwei Grundannahmen deducirt. Es wurde nämlich vorausgesetzt, dass erstens das in Betracht gezogene Körperelement vor der betrachteten Deformation isotrop ist, und zweitens, dass für die inneren Kräfte, die innerhalb dieses Körperelements wirksam sind, ein Potential existirt, ohne dass jedoch über die Art der zwischen den einzelnen materiellen Punkten dieses Elements wirkenden Kräfte irgend eine Annahme gemacht worden wäre.

Es ergab sich hiedurch, wofern man bei der Bestimmung des Potentials, beziehungsweise der Spannungen von Gliedern absieht, die in Bezug auf die 9 Verschiebungsderivationen von höherer als der dritten, beziehungsweise zweiten Ordnung sind, die Nothwendigkeit, bei jeder isotropen Substanz ausser der Integrationsconstanten A_0 der Potentialfunction noch 6 constante, bloss von dem anfänglichen Zustande des betrachteten

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CIII., Abth. II a., Jänner 1894.

Körperelements abhängige Coëfficienten, also 6 Elasticitätsconstanten in Rechnung zu ziehen. In aller Kürze wurde jedoch bemerkt, dass diese 6 Constanten nicht von einander unabhängig sein müssen, sondern dass zwischen denselben noch gewisse Beziehungen stattfinden können, deren Ermittelung eine Aufgabe der Moleculartheorie ist.

Es soll nunmehr gezeigt werden, dass in der That bei der Beschränkung auf die oberwähnten Glieder sich diese 6 Coëfficienten durch bloss drei Elasticitätsconstanten ausdrücken lassen, wofern man von der üblichen besonderen Annahme ausgeht, dass die zwischen je zwei materiellen Punkten m und μ wirksamen inneren Kräfte entweder attractiv oder repulsiv wirken und lediglich Functionen der variablen Entfernung R dieser Punkte, also auch bestimmte Functionen des Quadrats R^2 dieser Entfernung sind, so dass jedenfalls für diese gegenseitige Einwirkung der beiden materiellen Punkte m und μ ein Potential u existirt, welches sich zudem in der Form

$$u = m\mu F(R^2) \tag{1}$$

ausdrücken lässt, wo F irgend eine, wenn auch unbekannte continuirliche Function und m und μ die Massen der beiden materiellen Punkte bedeuten.

Um dies nachzuweisen, sei vorläufig ein Körper vorausgesetzt, der in seinem anfänglichen Zustande, in welchem Isotropie in jedem Körperelemente stattfinde, in seiner ganzen Ausdehnung homogen ist und dessen Punkte durch irgend welche Ursachen eine endliche homogene Lagenänderung (eine homogene Deformation) erfahren haben. Dieser Annahme zufolge ist, wenn $x'y'z'$ die zur beliebigen Zeit t stattfindenden Coordinaten des Punktes μ, und $\xi\eta\zeta$ die gleichzeitigen Coordinaten des Punktes m in Bezug auf ein an der Bewegung der einzelnen Punkte des Körpers nicht theilnehmendes orthogonales Axensystem, und wenn ferner xyz die anfänglichen Werthe der relativen Coordinaten $x'-\xi, y'-\eta, z'-\zeta$ des Punktes μ bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} x' &= \xi + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z \\ y' &= \eta + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z \\ z' &= \zeta + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wo $a_{11}a_{21}\ldots a_{33}$ gewisse vorläufig unbestimmt gelassene Grössen bedeuten, die von xyz unabhängig sind.

Durch D sei die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & a_{31} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3}$$

und durch $A_{11}A_{21}A_{31}\ldots$ die zu $a_{11}a_{21}a_{31}\ldots$ adjungirten Unterdeterminanten bezeichnet.

Jenes Tetraëder, dessen eine Spitze stets der seine Lage stetig ändernde Punkt m bildet und dessen zu den Axen xyz parallelen, von m ausgehenden Kanten in der anfänglichen Lage die Länge 1 haben, erlangt durch die homogene Deformation (2) zur Zeit t die Lage und Gestalt jenes Tetraëders, dessen Eckpunkte m, μ_1, μ_2, μ_3 in Bezug auf das zu xyz parallele bewegliche Axensystem, dessen Anfangspunkt m ist, die Coordinaten (000), $(a_{11}a_{12}a_{13})$, $(a_{21}a_{22}a_{23})$, $(a_{31}a_{32}a_{33})$ haben, und dessen sechsfaches Volum der Determinante (3) gleicht, und zwar sind die Kanten $\overline{m\mu_1} = R_1$, $\overline{m\mu_2} = R_2$, $\overline{m\mu_3} = R_3$ und ihre gegenseitige Lage durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} R_1^2 &= a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2 = a_x \\ R_2^2 &= a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2 = a_y \\ R_3^2 &= a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2 = a_z \\ R_2R_3 \cos(R_2R_3) &= a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33} = b_x \\ R_3R_1 \cos(R_3R_1) &= a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13} = b_y \\ R_1R_2 \cos(R_1R_2) &= a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23} = b_z \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

bestimmt.

Jene Punkte μ, welche zur Zeit t in einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt der bewegliche Punkt m und deren Radius 1 ist, bilden in der primitiven Lage zufolge (2) ein Ellipsoid, dessen Gleichung in Bezug auf ein zu den früheren Coordinatenaxen paralleles Axensystem mit dem Anfangspunkte m

$$\begin{aligned}(a_{11}x+a_{21}y+a_{31}z)^2+(a_{12}x+a_{22}y+a_{32}z)^2+(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z)^2 = \\ = a_xx^2+a_yy^2+a_zz^2+2b_xyz+2b_yzx+2b_zxy = 1\end{aligned} \tag{5}$$

ist. Dieses Ellipsoid ist den Gleichungen (4) zufolge bloss von der Gestalt, nicht auch von der Lage des Tetraëders $m\mu_1\mu_2\mu_3$ abhängig. Sind ferner abc die reciproken Werthe der Halbaxen dieses Ellipsoids und $F_1 F_2 F_3$ die drei in m zusammenstossenden Grenzflächen jenes Parallelopipeds, dessen Kanten $m\mu_1$, $m\mu_2$, $m\mu_3$ sind und dessen Volum D ist, so ist, wenn σ und s die Summen $a^2+b^2+c^2-3$ und $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-3$ bedeuten,

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= a^2+b^2+c^2-3 = R_1^2+R_2^2+R_3^2-3 = a_x+a_y+a_z-3 = \\ &= a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2+a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2+a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2-3 \\ s &= b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-3 = F_1^2+F_2^2+F_3^2-3 = \\ &= (a_y a_z-b_x^2)+(a_z a_x-b_y^2)+(a_x a_y-b_z^2)-3 = \\ &= A_{11}^2+A_{21}^2+A_{31}^2+A_{12}^2+A_{22}^2+A_{32}^2+A_{13}^2+A_{23}^2+A_{33}^2-3 \\ D &= 1+\nu = abc\end{aligned}\right\} (6)^1$$

wofern ν die cubische Dilatation bezeichnet.

Das der Fläche (5) congruente und derselben conjungirte[1] Ellipsoid, dessen Gleichung in Bezug auf dasselbe Axensystem

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)^2+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)^2+ \\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)^2 = 1 \qquad (7)$$

und dessen Mittelpunkt gleichfalls der Punkt m ist, hängt wesentlich von der Lage des Triëders $m\mu_1\mu_2\mu_3$ ab. Es sind nämlich die mit den drei Höhen N_1, N_2, N_3 dieses Triëders parallelen Kanten $\frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_2}, \frac{1}{N_3}$ des demselben adjungirten[1] Triëders conjugirte Radien des Ellipsoids (7).

Das mit der letzten Fläche (7) coaxiale, derselben adjungirte[1] Ellipsoid, dessen Gleichung bezüglich desselben Axensystems

$$(A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z)^2+(A_{21}x+A_{22}y+A_{23}z)^2+ \\ +(A_{31}x+A_{32}y+A_{33}z)^2 = D^2 \qquad (8)$$

---

[1] Siehe Finger: Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik. Diese Sitzungsber., Bd. CI, S. 1105—1142 (1892).

lautet, ist zugleich zufolge (2) jenes Deformationsellipsoid, in welches zur Zeit t jene Kugelfläche übergeht, deren Mittelpunkt in der primitiven Lage der Punkt m und deren Radius 1 ist. Die Halbaxen dieser Fläche (8) sind abc und die Kanten $R_1 R_2 R_3$ des Triëders $M\mu_1\mu_2\mu_3$ sind conjugirte Radien derselben.

Die durch (2) charakterisirte homogene Deformation lässt sich bekanntlich — abgesehen von der durch $\xi\eta\zeta$ bestimmten fortschreitenden Bewegung, die durch die Bewegung des Mittelpunktes m der Flächen (5), (7), (8) bedingt ist — als zusammengesetzt ansehen *a)* aus einer reinen Deformation, d. i. aus einer Ausdehnung nach den Richtungen der drei Axen der Fläche (5) — den Dilatationshauptaxen — deren Richtungen vorläufig von nun an als die bisher unbestimmt gelassenen Axenrichtungen xyz angenommen seien, und *b)* aus einer Rotation des Körpers um den Punkt m, durch welche nach einer Drehung ϑ das Ellipsoid (5) in die Lage des conjungirten Ellipsoids (7) gelangt, dessen mit dem Deformationsellipsoid (8) gleichgerichteten Axen durch XYZ bezeichnet seien. Sind demgemäss nunmehr durch xyz die anfänglichen Coordinaten des Punktes μ in Bezug auf die Axen des Ellipsoids (5) und durch XYZ die Coordinaten der Lage desselben Punktes μ zur Zeit t in Bezug auf die Axen des Ellipsoids (7) oder (8) bezeichnet und bedeuten $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ die Hauptdilatationen, so ist

$$\left.\begin{aligned} a &= 1+\lambda_1 \\ b &= 1+\lambda_2 \\ c &= 1+\lambda_3 \\ \sigma &= (1+\lambda_1)^2+(1+\lambda_2)^2+(1+\lambda_3)^2-3 \\ s &= (1+\lambda_2)^2(1+\lambda_3)^2+(1+\lambda_3)^2(1+\lambda_1)^2+(1+\lambda_1)^2(1+\lambda_2)^2-3 \\ \nu &= D-1 = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)-1 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

und es reduciren sich die Gleichungen (2) auf folgende einfache Relationen:

$$\left.\begin{aligned} X &= ax = (1+\lambda_1)x \\ Y &= by = (1+\lambda_2)y \\ Z &= cz = (1+\lambda_3)z \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Da nun $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die anfängliche und $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ die schliessliche Entfernung der beiden Punkte m und μ ist, so muss, wenn durch ρ die Differenz

$$\rho = R^2 - r^2 \tag{11}$$

und durch ABC die Grössen

$$\left.\begin{aligned} A &= a^2-1 = 2\lambda_1+\lambda_1^2 \\ B &= b^2-1 = 2\lambda_2+\lambda_2^2 \\ C &= c^2-1 = 2\lambda_3+\lambda_3^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

welche von derselben Grössenordnung sind, wie die Dilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, bezeichnet werden, der Gleichung (10) zufolge

$$\rho = Ax^2+By^2+Cz^2 \tag{13}$$

sein.

Ferner ersieht man aus den Gleichungen (12) und aus den durch (9) dargestellten Werthen von σ, s und ν sofort, dass zwischen diesen drei Grössen und den Grössen ABC folgende Beziehungen stattfinden:

$$\left.\begin{aligned} A+B+C &= \sigma \\ A^2+B^2+C^2 &= \sigma^2+4\sigma-2s \\ BC+CA+AB &= -2\sigma+s \\ A^3+B^3+C^3 &= \sigma^3+6\sigma^2-3s\sigma+3\nu^2+3\sigma-3s+6\nu \\ A^2(B+C)+B^2(C+A)+C^2(A+B) &= \\ &= -2\sigma^2+s\sigma-3\nu^2-3\sigma+3s-6\nu \\ ABC &= \nu^2+\sigma-s+2\nu \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Das Potential der gesammten zur Zeit t auf das Massenelement m einwirkenden inneren Kräfte ist zufolge (1) und (11)

$$\Sigma u = m.\Sigma\mu F(R^2) = m.\Sigma\mu F(r^2+\rho) \tag{15}$$

wobei sich die Summe Σ auf sämmtliche Massentheilchen μ des Körpers erstreckt, die auf m — sei es eine anziehende oder eine abstossende Wirkung ausüben.

Da den Gleichungen (12) und (13) gemäss ρ bezüglich der Hauptdilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ von der ersten Ordnung ist, so ist, wenn man bei der Bildung des Potentials der inneren

Kräfte von nun an von allen Gliedern absieht, die bezüglich dieser Hauptdilatationen, also auch bezüglich der durch (12) bestimmten Grössen A, B, C von höherer Ordnung sind, als der dritten,

$$F(r^2+\rho) = F(r^2)+F'(r^2).\rho+\frac{1}{2}F''(r^2).\rho^2+\frac{1}{6}F'''(r^2).\rho^3,$$

und zwar besteht diese Relation, wie gross auch immer die oberwähnte Drehung des Körpers sein möge, durch welche das Ellipsoid (5) in die Lage (7) gelangt.

Setzt man in die letzte Gleichung den Werth (13) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} F(r^2+\rho) &= F(r^2)+F'(r^2).(Ax^2+By^2+Cz^2) \\ &+\frac{1}{2}F''(r^2).[A^2x^4+B^2y^4+C^2z^4+2BCy^2z^2+2CAz^2x^2+2ABx^2y^2] \\ &+\frac{1}{6}F'''(r^2).[A^3x^6+B^3y^6+C^3z^6+3A^2x^4(By^2+Cz^2)+ \\ &\qquad +3B^2y^4(Cz^2+Ax^2)+3C^2z^4(Ax^2+By^2)+6ABCx^2y^2z^2]. \end{aligned}$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (15) und berücksichtigt man, dass durch die in der anfänglichen Lage des Körpers vorausgesetzte Isotropie der Substanz die gleiche Massenlagerung bezüglich dreier beliebiger orthogonaler Axen des Körpers, also auch bezüglich der von der Rotation ϑ des Körpers unabhängigen Richtungen der drei Axen des Ellipsoids (5) bedungen ist, so erhält man, wofern durch a_0, a_1, a_2, a_3 kürzehalber die auf alle wirksamen Massenelemente μ sich erstreckenden Summen

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \Sigma\frac{\mu}{2}F(r^2) \\ a_1 &= \Sigma[\mu F'(r^2).x^2] = \Sigma[\mu F'(r^2).y^2] = \Sigma[\mu F'(r^2).z^2] \\ a_2 &= \Sigma[\mu F''(r^2).y^2z^2] = \Sigma[\mu F''(r^2).z^2x^2] = \Sigma[\mu F''(r^2).x^2y^2] \\ a_3 &= \Sigma[2\mu F'''(r^2).x^2y^2z^2] \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

bezeichnet werden, so dass in Folge der bedungenen Isotropie auch

$$\Sigma[\mu F''(r^2).x^4] = \Sigma[\mu F''(r^2).y^4] = \Sigma[\mu F''(r^2).z^4] = 3a_2$$

$$\Sigma[\mu F'''(r^2).x^4y^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2).x^4z^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2).y^4x^2] =$$
$$= \Sigma[\mu F'''(r^2).y^4z^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2).z^4x^2] = \Sigma[\mu F'''(r^2).z^4y^2] = \frac{3}{2}a_3$$

$$\Sigma[\mu F'''(r^2).x^6] = \Sigma[\mu F'''(r^2).y^6] = \Sigma[\mu F'''(r^2).z^6] = \frac{15}{2}a_3$$

ist, als das Potential Σu aller auf den materiellen Punkt m zur Zeit t einwirkenden inneren Kräfte einen Ausdruck von der Form

$$\Sigma u = m\left[2a_0 + a_1.\alpha_1 + \frac{1}{2}a_2\alpha_2 + \frac{1}{4}a_3\alpha_3\right],$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= A+B+C \\ \alpha_2 &= 3(A^2+B^2+C^2)+2(BC+CA+AB) \\ \alpha_3 &= 5(A^3+B^3+C^3)+ \\ &\quad +3[A^2(B+C)+B^2(C+A)+C^2(A+B)]+2ABC \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Bildet man, um das Gesammtpotential sämmtlicher innerer Kräfte, die zwischen den Massenpunkten des deformirten Körpers thätig sind, zu ermitteln, auf dieselbe Weise das Potential für jeden einzelnen Punkt m des Punktsystems und summirt die so erhaltenen Werthe, so erhält man, da bei der Bildung dieser Summe die gegenseitige Einwirkung je zweier Punkte zweimal in Rechnung gezogen ist, für dieses Potential U der sämmtlichen inneren Kräfte des Punktsystems den letzten Gleichungen zufolge den Werth

$$U = \frac{1}{2}\Sigma m\left(2a_0 + a_1\alpha_1 + \frac{1}{2}a_2\alpha_2 + \frac{1}{4}a_3\alpha_3\right).$$

Demgemäss ist, wenn δ_0 die primitive Dichtigkeit und dv das anfängliche Volum des Massenelementes m bedeuten, so dass $m = \delta_0.dv$ ist, und wofern durch A_0 A_1 A_2 A_3 jene von der anfänglichen — als isotrop vorausgesetzten — Massenlagerung abhängigen Werthe bezeichnet werden, die durch

$$\frac{A_0}{a_0} = \frac{A_1}{a_1} = \frac{A_2}{a_2} = \frac{A_3}{a_3} = \delta_0 \quad (18)$$

bestimmt sind,

$$U = \int f . dv, \tag{19}$$

wo f die Potentialfunction

$$f = A_0 + \frac{1}{2} A_1 \alpha_1 + \frac{1}{4} A_2 \alpha_2 + \frac{1}{8} A_3 \alpha_3 \tag{20}$$

bedeutet.

Die in dieser Gleichung ausser den constanten, vom anfänglichen Zustande des Körpers abhängigen Grössen A_0, A_1, A_2, A_3 vorkommenden Variablen $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ sind den Gleichungen (17) und (12) zufolge bloss Functionen der Hauptdilatationen $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, und zwar ist α_1 von der ersten, α_2 von der zweiten und α_3 von der dritten Grössenordnung.

Die Substitution von (17) und (12) führt, wenn kürzehalber durch $\alpha\beta\gamma\ \alpha'\beta'\gamma'$ die Summen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \beta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad \gamma = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 \\ \alpha' = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3, \quad \beta' = \lambda_1^2(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2^2(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3^2(\lambda_1 + \lambda_2), \\ \qquad \gamma' = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{array}\right\} \tag{21}$$

bezeichnet werden, zu folgendem Werthe der Potentialfunction:

$$\left.\begin{array}{l} f = A_0 + A_1\left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) + A_2(3\beta + 2\gamma + 3\alpha' + \beta') \\ \qquad + A_3(5\alpha' + 3\beta' + 2\gamma') \end{array}\right\} \tag{22}$$

Es lässt sich aber auch die Potentialfunction f leicht als Function der den Gleichungen (6) gemäss durch die Form des ursprünglich betrachteten Tetraëders $m\mu_1\mu_2\mu_3$ genau bestimmen, jedoch von der Lage desselben vollkommen unabhängigen Grössen s, σ und ν ausdrücken, von welchen σ die um 3 verringerte Summe der Quadrate der drei in m zusammenstossenden Seitenkanten $R_1\ R_2\ R_3$, ferner s die um 3 verringerte vierfache Summe der Quadrate der drei in demselben Punkte zusammenstossenden Seitendreiecke und D das sechsfache Volum dieses Tetraëders bedeuten. Substituirt man nämlich (14) in (17) und diese Werthe in (20), so findet man

$$
\left.\begin{aligned}
f = A_0 + \frac{1}{2} A_1 . \sigma + \frac{1}{4} A_2 . (3\sigma^2 + 8\sigma - 4s) + \\
+ \frac{1}{8} A_3 (5 . \sigma^3 + 24\sigma^2 - 12\sigma s + 8\nu^2 + 8\sigma - 8s + 16\nu)
\end{aligned}\right\} (23)
$$

Die in dieser Gleichung ausser der cubischen Dilatation $\nu = D - 1$ vorkommenden Grössen σ und s lassen sich auch unmittelbar aus den Gliedern der Determinante (3) berechnen, und zwar ist den Gleichungen (6) und (4) gemäss σ die um 3 verringerte Summe der Quadrate dieser sämmtlichen Glieder, beziehungsweise der Coëfficienten von x^2, y^2 und z^2 in der Gleichung des dem Deformationsellipsoid (8) adjungirten Ellipsoids (5), und s ist den Gleichungen (6) und (4) zufolge die um 3 verringerte Summe der Quadrate sämmtlicher Unterdeterminanten von D, beziehungsweise der Coëfficienten von x^2, y^2 und z^2 in der Gleichung des Deformationsellipsoids (8), nämlich

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma &= a_x + a_y + a_z - 3 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + \\
&\qquad + a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 - 3 \\
s &= a_y a_z + a_z a_x + a_x a_y - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 - 3 = \\
&= A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 - 3
\end{aligned}\right\} (24)
$$

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die Deformation des ganzen, im anfänglichen Zustande als isotrop angenommenen Körpers eine homogene sei. Findet diese Voraussetzung nicht statt, so kann bekanntlich dennoch die Deformation eines unendlich kleinen Elementes, dessen anfängliches Volum dv sei, stets als eine homogene Deformation angesehen werden, und zwar müssen, wenn nunmehr xyz die anfänglichen und $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ die schliesslichen Coordinaten irgend eines Punktes m dieses Elements in Bezug auf irgend ein fixes orthogonales Axensystem bedeuten, behufs Erzielung der Übereinstimmung mit den Gleichungen (2), da dieselben nunmehr auf ein paralleles Axensystem zu beziehen sind, dessen Anfangspunkt die anfängliche Lage des Punktes m ist, in (2) statt (x, y, z) die dem benachbarten Punkte μ anfänglich zukommenden Werthe (dx, dy, dz) eingesetzt werden, und es ist ferner, wofern die Bezeichnungsweise des ersten Theiles dieser Abhandlung beibehalten wird, gleichzusetzen:

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11}=1+\frac{\partial\xi}{\partial x}=1+\lambda_x, & a_{21}=\frac{\partial\xi}{\partial y}=\nu_z, & a_{31}=\frac{\partial\xi}{\partial z}=\mu_y \\ a_{12}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=\mu_z, & a_{22}=1+\frac{\partial\eta}{\partial y}=1+\lambda_y, & a_{32}=\frac{\partial\eta}{\partial z}=\nu_x \\ a_{13}=\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\nu_y, & a_{23}=\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\mu_x, & a_{33}=1+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=1+\lambda_z \end{array}\right\} \quad (25)$$

Demgemäss sind die Subdeterminanten von (3)

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}=1+\lambda_y+\lambda_z+(\lambda_y\lambda_z-\mu_x\nu_x) \\ A_{21}=-\mu_z+(\nu_x\nu_y-\lambda_z\mu_z) \\ A_{31}=-\nu_y+(\mu_z\mu_x-\lambda_y\nu_y) \\ A_{12}=-\nu_z+(\mu_x\mu_y-\lambda_z\nu_z) \\ A_{22}=1+\lambda_z+\lambda_x+(\lambda_z\lambda_x-\mu_y\nu_y) \\ A_{32}=-\mu_x+(\nu_y\nu_z-\lambda_x\mu_x) \\ A_{13}=-\mu_y+(\nu_z\nu_x-\lambda_y\mu_y) \\ A_{23}=-\nu_x+(\mu_y\mu_z-\lambda_x\nu_x) \\ A_{33}=1+\lambda_x+\lambda_y+(\lambda_x\lambda_y-\mu_z\nu_z) \end{array}\right\} \quad (26)$$

Setzt man diese Werthe in die früheren Formeln ein, so lässt sich, wofern nur der anfängliche Zustand des Körperelements dv ein isotroper ist, das Potential dU der innerhalb dieses Körperelements wirkenden inneren Kräfte nach der in Betracht gezogenen Deformation mittelst der Gleichung

$$dU=f.dv \quad (27)$$

berechnen, wo für f der Werth aus (22) oder (20), beziehungsweise (23) einzuführen ist. Das Potential dU ist hiebei bis auf Glieder, die bezüglich der Hauptdilatationen von dritter Ordnung sind, genau bestimmt.

Substituirt man die Werthe aus (25) und (26) in die Gleichungen (24) und (3), bezeichnet man ferner kürzehalber durch λ die Summe $\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z$ und durch η die Summe der Quadrate der eingeklammerten Binome in (26), so findet man, wofern man im Übrigen die durch die Formeln (22) des ersten Theiles dieser Abhandlung bestimmte Bezeichnungsweise zur Anwendung bringt,

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= 2\lambda+\beta_1+(\beta_2+\beta_3) \\ s &= 4\lambda+2\beta_1+(\beta_2+\beta_3)+4\gamma_1-2\delta_1+ \\ &\qquad +2\beta_1'+2(\alpha_{21}+\alpha_{31})-2(\gamma_{23}+\gamma_{32})-2\varepsilon_1'+\eta \\ \nu &= D-1 = \lambda+\gamma_1-\delta_1+\gamma_1'+\gamma_2'+\gamma_3'-\gamma' \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lambda_x+\lambda_y+\lambda_z \\ \beta_1 &= \lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2 \\ \beta_2 &= \mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2 \\ \beta_3 &= \nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2 \\ \gamma_1 &= \lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y \\ \delta_1 &= \mu_x\nu_x+\mu_y\nu_y+\mu_z\nu_z \\ \alpha_1' &= \lambda_x^3+\lambda_y^3+\lambda_z^3 \\ \beta_1' &= \lambda_x^2(\lambda_y+\lambda_z)+\lambda_y^2(\lambda_z+\lambda_x)+\lambda_z^2(\lambda_x+\lambda_y) \\ \gamma_1' &= \lambda_x\lambda_y\lambda_z, \quad \gamma_2' = \mu_x\mu_y\mu_z, \quad \gamma_3' = \nu_x\nu_y\nu_z \\ \gamma' &= \lambda_x\mu_x\nu_x+\lambda_y\mu_y\nu_y+\lambda_z\mu_z\nu_z \\ \varepsilon_1' &= \mu_x\nu_x(\lambda_y+\lambda_z)+\mu_y\nu_y(\lambda_z+\lambda_x)+\mu_z\nu_z(\lambda_x+\lambda_y) \\ \alpha_{21} &= \mu_x^2\lambda_x+\mu_y^2\lambda_y+\mu_z^2\lambda_z \\ \alpha_{31} &= \nu_x^2\lambda_x+\nu_y^2\lambda_y+\nu_z^2\lambda_z \\ \beta_{21} &= \mu_x^2(\lambda_y+\lambda_z)+\mu_y^2(\lambda_z+\lambda_x)+\mu_z^2(\lambda_x+\lambda_y) \\ \beta_{31} &= \nu_x^2(\lambda_y+\lambda_y)+\nu_y^2(\lambda_z+\lambda_x)+\nu_z^2(\lambda_x+\lambda_y) \\ \gamma_{23} &= \mu_y\mu_z\nu_x+\mu_z\mu_x\nu_y+\mu_x\mu_y\nu_z \\ \gamma_{32} &= \nu_y\nu_z\mu_x+\nu_z\nu_x\mu_y+\nu_x\nu_y\mu_z \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Durch Einsetzung der Werthe (28) in (14) findet man zunächst, wenn man von nun an solche Glieder, die bezüglich der Verschiebungsderivationen $\lambda_x\mu_x\ldots$ von höherer Ordnung, als der dritten sind, also auch das Glied η vernachlässigt,

$$\begin{aligned} A+B+C &= 2\lambda+\beta_1+\beta_2+\beta_3 \\ A^2+B^2+C^2 &= 4\beta_1+2(\beta_2+\beta_3)+4\delta_1+4\alpha_1'+4(\beta_{21}+\beta_{31})+ \\ &\qquad +4(\gamma_{23}+\gamma_{32})+4\varepsilon_1' \\ BC+CA+AB &= 4\gamma_1-(\beta_2+\beta_3)-2\delta_1+2\beta_1'+ \\ &\qquad +2(\alpha_{21}+\alpha_{31})-2(\gamma_{23}+\gamma_{32})-2\varepsilon_1' \end{aligned}$$

$$A^3+B^3+C^3 = 8\alpha_1'+6(\beta_{21}+\beta_{31})+6(\gamma_{23}+\gamma_{32})+6(\gamma_2'+\gamma_3')+12\varepsilon_1'$$

$$A^2(B+C)+B^2(C+A)+C^2(A+B) = 8\beta_1'+4(\alpha_{21}+\alpha_{31})-$$
$$-2(\beta_{21}+\beta_{31})-6(\gamma_{23}+\gamma_{32})-6(\gamma_2'+\gamma_3')+8\gamma'-4\varepsilon_1'$$

$$ABC = 8\gamma_1'-2(\alpha_{21}+\alpha_{31})+2(\gamma_{23}+\gamma_{32})+2(\gamma_2'+\gamma_3')-4\gamma'.$$

Demgemäss ist den Gleichungen (17) zufolge

$$\frac{1}{2}\alpha_1 = \lambda+\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$$

$$\frac{1}{4}\alpha_2 = 3\beta_1+\beta_2+\beta_3+2\gamma_1+2\delta_1+3\alpha_1'+\beta_1'+$$
$$+(\alpha_{21}+\alpha_{31})+3(\beta_{21}+\beta_{31})+2(\gamma_{23}+\gamma_{32})+2\varepsilon_1'$$

$$\frac{1}{8}\alpha_3 = 5\alpha_1'+3\beta_1'+2\gamma_1'+(\alpha_{21}+\alpha_{31})+3(\beta_{21}+\beta_{31})+$$
$$+2(\gamma_{23}+\gamma_{32})+2(\gamma_2'+\gamma_3')+2\gamma'+6\varepsilon_1'$$

α_1 enthält bloss Glieder erster und zweiter Ordnung, α_2 solche der zweiten und dritten, α_3 dagegen bloss Glieder dritter Ordnung.

Die Potentialfunction f ist, wie die Substitution in (20) lehrt, durch die aus den Verschiebungsderivationen gebildeten Ausdrücke (29) in folgender Weise bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} f = A_0+A_1&\left[\lambda+\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\right]+ \\ &+A_2[3\beta_1+\beta_2+\beta_3+2\gamma_1+2\delta_1+3\alpha_1'+\beta_1'+ \\ &\quad+\alpha_{21}+\alpha_{31}+3(\beta_{21}+\beta_{31})+2(\gamma_{23}+\gamma_{32})+2\varepsilon_1']+ \\ &+A_3[5\alpha_1'+3\beta_1'+2\gamma_1'+\alpha_{21}+\alpha_{31}+3(\beta_{21}+\beta_{31})+ \\ &\quad+2(\gamma_{23}+\gamma_{32})+2(\gamma_2'+\gamma_3')+2\gamma'+6\varepsilon_1'] \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (47) des ersten Theiles, beziehungsweise mit der dieser unmittelbar vorangehenden Gleichung und beachtet überdies den Werth von B_1' aus (40), so ergibt sich unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} 2B_2 &= A_1+2A_2 \\ C_1 &= 2A_2 \\ A_1' &= 3A_2+5A_3 \\ B_{21} &= 3(A_2+A_3) \\ A_{21} &= A_2+A_3 \\ B_1' &= A_2+3A_3 \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Es lassen sich sohin sämmtliche in dem ersten Theile betrachteten Elasticitätsconstanten, wofern man bei der Bestimmung des Potentialwerthes der elastischen Kräfte von allen Gliedern absieht, die bezüglich der Hauptdilatationen von höherer Ordnung sind, als der dritten, und wofern man von der Annahme ausgeht, dass die inneren Kräfte nur anziehende oder abstossende Kräfte sind, welche Functionen der Entfernung der sich anziehenden oder abstossenden Massenpunkte sind, abgesehen von der Potentialconstanten A_0, auf die drei Elasticitätsconstanten A_1, A_2 und A_3 zurückführen.

Würde man auch Glieder vierter Ordnung berücksichtigen, so würde, wie sich leicht zeigen lässt, eine weitere Constante hinzutreten, ausser man würde bezüglich der oberwähnten Function der Entfernung eine besondere Annahme machen. Es unterliegt gar keiner Schwierigkeit, die bisherige Untersuchung in gleicher Weise auf solche Glieder vierter Ordnung auszudehnen.

Die Gleichungen (31) ergeben sich auch unmittelbar sofort aus der Vergleichung des Werthes (22) mit der Gleichung (55) des ersten Theiles.

Die Gleichung (30) für die Potentialfunction lässt sich in mannigfacher Weise umformen, wie dies unter Anderem die Substitution der Werthe (31) in die Gleichungen (47), (50), (57), (58) des ersten Theiles lehrt.

Vernachlässigt man in der Gleichung (30) alle Glieder, welche bezüglich der Verschiebungsderivationen von der dritten Ordnung sind, so erhält man den von C. Neumann deducirten Potentialwerth,[1] der die zwei Elasticitätsconstanten A_1 und A_2 enthält.

Setzt man die in (31) gefundenen Werthe von $2B_2$, $C_1 \ldots$ in die Gleichungen (51) und (54) des ersten Theiles ein, oder berechnet man aus der Potentialfunction (30) mittelst der allgemeinen Gleichungen (20) des ersten Theiles unmittelbar die Spannungscomponenten, so gelangt man bei Berücksichtigung des Werthes (52) für die cubische Dilatation $\nu = D-1$, und wofern man kürzehalber, wie früher, durch $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ die Summen

[1] Carl Neumann, Zur Theorie der Elasticität. (Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1860, Bd. 57, S. 281—318.)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \mu_x + \nu_x \\ \varepsilon_y &= \mu_y + \nu_y \\ \varepsilon_z &= \mu_z + \nu_z \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

bezeichnet, zu folgenden wichtigen Gleichungen, welche bis auf Glieder zweiter Ordnung genau sind:

$$\left.\begin{aligned} D.X_x = {} & A_1 + (2A_1 + 4A_2).\lambda_x + 2A_2.\nu + (A_2 + 3A_3).\nu^2 + \\ & + (A_1 + 2A_2)(\lambda_x^2 + \nu_z^2 + \mu_y^2) - \\ & - 4(A_2 + A_3)[\lambda_y\lambda_z - \varepsilon_x^2 - 3(\lambda_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_y^2)] \\ D.Y_z = {} & (A_1 + 2A_2).\varepsilon_x + (A_1 + 2A_2)(\mu_z\nu_y + \lambda_y\mu_x + \nu_x\lambda_z) - \\ & - 4(A_2 + A_3)[\varepsilon_y\varepsilon_z - \lambda_x\varepsilon_x - 3(\varepsilon_z\varepsilon_y + \lambda_y\varepsilon_x + \varepsilon_x\lambda_z)] \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} X_x = {} & A_1 + 2(2A_2 + A_1).\lambda_x + (2A_2 - A_1).\nu + 3(A_3 - A_2).\nu^2 + \\ & + (2A_2 + A_1).[(\lambda_y + \lambda_z)^2 + \nu_z^2 + \mu_y^2] - \\ & - 4(A_3 + A_2).[\lambda_y\lambda_z - \varepsilon_x^2 - 3(\lambda_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_y^2)] \\ Y_y = {} & A_1 + 2(2A_2 + A_1).\lambda_y + (2A_2 - A_1).\nu + 3(A_3 - A_2).\nu^2 + \\ & + (2A_2 + A_1).[\mu_z^2 + (\lambda_z + \lambda_x)^2 + \nu_x^2] - \\ & - 4(A_3 + A_2).[\lambda_z\lambda_x - \varepsilon_y^2 - 3(\varepsilon_z^2 + \lambda_y^2 + \varepsilon_x^2)] \\ Z_z = {} & A_1 + 2(2A_2 + A_1).\lambda_z + (2A_2 - A_1).\nu + 3(A_3 - A_2).\nu^2 + \\ & + (2A_2 + A_1).[\nu_y^2 + \mu_x^2 + (\lambda_x + \lambda_y)^2] - \\ & - 4(A_3 + A_2).[\lambda_x\lambda_y - \varepsilon_z^2 - 3(\varepsilon_y^2 + \varepsilon_x^2 + \lambda_z^2)] \\ Y_z = Z_y = {} & (2A_2 + A_1).\varepsilon_x + \\ & + (2A_2 + A_1).[\mu_z\nu_y - (\lambda_z + \lambda_x).\mu_x - \nu_x(\lambda_x + \lambda_y)] - \\ & - 4(A_3 + A_2).[\varepsilon_y\varepsilon_z - \lambda_x\varepsilon_x - 3(\varepsilon_z\varepsilon_y + \lambda_y\varepsilon_x + \varepsilon_x\lambda_z)] \\ Z_x = X_z = {} & (2A_2 + A_1)\varepsilon_y + \\ & + (2A_2 + A_1).[-\nu_y(\lambda_y + \lambda_z) + \mu_x\nu_z - (\lambda_x + \lambda_y).\mu_y] - \\ & - 4(A_3 + A_2).[\varepsilon_z\varepsilon_x - \lambda_y\varepsilon_y - 3(\varepsilon_y\lambda_x + \varepsilon_x\varepsilon_z + \lambda_z\varepsilon_y)] \\ X_y = Y_z = {} & (2A_2 + A_1)\varepsilon_z + \\ & + (2A_2 + A_1).[-(\lambda_y + \lambda_z).\mu_z - \nu_z(\lambda_z + \lambda_x) + \mu_y\nu_x] - \\ & - 4(A_3 + A_2).[\varepsilon_x\varepsilon_y - \lambda_z\varepsilon_z - 3(\lambda_x\varepsilon_z + \varepsilon_z\lambda_y + \varepsilon_y\varepsilon_x)] \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Würde man in diesen Gleichungen $A_1 = 0$ setzen und die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, so würde man die

bekannten, von Navier und Poisson gefundenen Grundgleichungen erhalten.

Durch Substitution von (31) in die Gleichungen (56) des ersten Theiles findet man folgende Werthe für die bloss von den Hauptdilatationen abhängigen Hauptspannungen S_1, S_2, S_3:

$$\left.\begin{aligned}
S_1 = & A_1+(2A_2+A_1).[2\lambda_1+(\lambda_2+\lambda_3)^2]+ \\
& +(2A_2-A_1).[\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2]+ \\
& +3(A_3-A_2).(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-4(A_3+A_2).(\lambda_2\lambda_3-3\lambda_1^2) \\
S_2 = & A_1+(2A_2+A_1).[2\lambda_2+(\lambda_3+\lambda_1)^2]+ \\
& +(2A_2-A_1).[\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2]+ \\
& +3(A_3-A_2).(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-4(A_3+A_2)(\lambda_3\lambda_1-3\lambda_2^2) \\
S_3 = & A_1+(2A_2+A_1).[2\lambda_3+(\lambda_1+\lambda_2)^2]+ \\
& +(2A_2-A_1).[\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2]+ \\
& +3(A_3-A_2).(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-4(A_3+A_2)(\lambda_1\lambda_2-3\lambda_3^2)
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Der Grad der Genauigkeit reicht in diesen drei Gleichungen bis zu den Gliedern, die bezüglich der Hauptdilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ von zweiter Ordnung sind.

Aus der früheren Untersuchung ist klar zu ersehen, dass zwar nicht die Gleichung (30), jedoch die Gleichung (22) und (23) den Werth der Potentialfunction f auch für den allgemeineren Fall ausdrückt, in welchem die Drehung, die das betrachtete Körperelement während seiner Deformation erfährt, also auch der Drehungswinkel ϑ in den Gleichungen (30) bis (33) des ersten Theiles, was immer für einen Werth hat, so dass auch einige oder alle Verschiebungsderivationen $\lambda_x \nu_z \ldots$ beliebig grosse Werthe annehmen können, wenn nur die ursprüngliche Annahme der Kleinheit der Hauptdilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ erfüllt ist. Es ist dies jener Fall, auf dessen Wichtigkeit für die Anwendung auf specielle Probleme schon Saint-Venant, Kirchhoff und in neuerer Zeit Todhunter aufmerksam machte, die jedoch bei ihrer Untersuchung dieses Falles bloss unendlich kleine Hauptdilatationen voraussetzen, indem stets schon solche Glieder, die bezüglich dieser Dilatationen von zweiter Ordnung sind, Gliedern erster Ordnung gegenüber

vernachlässigt werden. St. Venant gelangt für diesen Fall[1] zu folgenden aus (4) und (25) leicht deducirbaren Gleichungen für die Dilatation Λ_x in der Richtung der x-Axe und die zugehörige Schiebung M_x

$$\Lambda_x = R_1 - 1 = \sqrt{a_x} - 1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right] = \\ = \frac{1}{2}(a_x - 1)$$

$$M_x = \cos(R_2 R_3) = b_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \left[\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right]$$

und stellt für die lineare Dilatation Λ in jener Richtung, deren ursprüngliche Richtungscosinus l, m, n sind, die aus (2) und (4) resultirende Gleichung auf:

$$\Lambda = \Lambda_x . l^2 + \Lambda_y m^2 + \Lambda_z n^2 + M_x . mn + M_y . nl + M_z . lm .$$

Mit Zuhilfenahme dieses Werthes sucht Kirchhoff[2] unter denselben Voraussetzungen die Componenten der Spannung für ein beliebiges Flächenelement als Functionen der Verschiebungsderivationen zu bestimmen.

Todhunter und Pearson[3] bezweifeln die Richtigkeit der von Kirchhoff aufgestellten Gleichungen, erwähnen jedoch in ihrer kritischen Untersuchung nicht den schwerwiegendsten Irrthum Kirchhoff's, der darin besteht, dass Kirchhoff (wie dies die Vergleichung der Gleichungen auf S. 769[2] mit jener auf S. 766[2] sofort zeigt) die Richtungscosinus der Hauptdilatationsrichtungen in ihrer anfänglichen Lage (die im ersten Theile dieser Abhandlung durch $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z \ldots$ bezeichnet

---

[1] St. Venant, Mémoire sur l'équilibre des corps solides dans les limites de leur élasticité et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leurs points ne sont pas très-petits. Comptes rendus, vol. XXIV (1847), p. 260—263. (Siehe auch Moigno, Statique, p. 670 und Todhunter and Pearson, A History of the Theory of Elasticity (Cambridge, 1886—1893) vol. I, p. 864—867.

[2] Kirchhoff, Über die Bedingungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile. Diese Sitzungsber., Bd. IX (1852), S. 762—773.

[3] Todhunter and Pearson, l. c., vol. II, part II, p. 50—53.

wurden) mit den Richtungscosinus der Hauptdruckaxen, d. i. der Richtungen der Hauptdilatationen in ihrer schliesslichen Lage (die von mir durch α'_x, α'_y, α'_z... bezeichnet wurden) identificirt, wodurch stillschweigend vorausgesetzt ist, dass das betrachtete Körperelement keine Drehung erfahren hat, oder dass mit anderen Worten die stattgehabte Deformation eine reine (rotationslose) Deformation ist, während die ganze Untersuchung geradezu bezweckt, den gegentheiligen Fall einer endlichen Drehung des Körperelements zu behandeln, indem zwar die Hauptdilatationen als unendlich klein, jedoch mit dieser Einschränkung die Verschiebungsderivationen als beliebige endliche Grössen vorausgesetzt sind.

Um die Componenten $X_x X_y$... der Spannung für einen beliebigen Werth des Rotationswinkels ϑ, und zwar mit einer Genauigkeit, die sich bis auf Glieder erstreckt, die bezüglich der Hauptdilatationen, also auch bezüglich irgend einer Dilatation und irgend einer Schiebung von zweiter Ordnung ist, zu bestimmen, müsste man etwa von der bis auf solche Glieder der dritten Ordnung genauen und für einen jeden Werth des Winkels ϑ giltigen Gleichung (23) für die Potentialfunction f ausgehen, deren letztes Glied sich übrigens noch in verschiedener anderer Form darstellen lässt. So ist z. B. die Summe aus den ersten vier Gliedern innerhalb der letzten Klammer

$$5\sigma^3+24\sigma^2-12s\sigma+8\nu^2 = 6\sigma^2-16\nu^2+16\nu^3 \tag{36}$$

und zwar bis auf Glieder dritter Ordnung genau, wie dies die Einsetzung der Werthe (9) sofort lehrt.

Führt man nun den Werth von f aus (23), welcher ausser der Potentialconstanten A_0, die bei den auszuführenden Differentiationen aus der Rechnung hinausfällt, nur die drei Elasticitätsconstanten A_1, A_2, A_3 enthält, in die allgemein giltigen Gleichungen (20) des ersten Theiles ein, so erhält man jene Werthe der Spannungscomponenten, die für einen jeden Werth des Rotationswinkels ϑ, also auch für endliche Werthe der Verschiebungsderivationen λ_x, μ_z, ν_y..., jedoch nur für solche Deformationen giltig sind, für welche man bei der Berechnung der Spannungen von Gliedern absehen kann,

die bezüglich der Dilatationen und der Schiebungen von der dritten oder einer höheren Ordnung sind. Da nämlich die in der Potentialfunction f in (23) vorkommenden drei Variabeln σ, s und ν, wie dies die Gleichungen (9) lehren, von derselben Grössenordnung sind, wie die Hauptdilatation $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, und da f eine rationale ganze Function dieser Variabeln s, σ und ν ist, die bis auf Glieder dritter Ordnung genau ist, so reicht der Grad der Genauigkeit der drei Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \sigma}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial \nu}$ nur bis auf Glieder zweiten Grades, und zwar ist, wenn man den Werth aus der letztgefundenen Gleichung (36) einsetzt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2 (3\sigma+4) + \frac{1}{2} A_3 (3\sigma+2) \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= -A_2 - A_3 \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} &= 2 A_3 (3\nu^2 - 2\nu + 1) \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Beachtet man die strengrichtigen Werthe in (25) und (26), so ersieht man aus den gleichfalls strengrichtigen Gleichungen (6) und (3), wie σ, s und ν durch die Verschiebungsderivationen $\lambda_x\ \nu_z\ \mu_y \ldots$ auszudrücken sind. Es lassen sich also auch $\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_x}, \frac{\partial s}{\partial \lambda_x} \ldots$, sonach auch die in den Gleichungen (20) des ersten Theiles vorkommenden Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_x} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_x} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \lambda_x} + \frac{\partial f}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \lambda_x},$$

ebenso $\frac{\partial f}{\partial \nu_z}, \frac{\partial f}{\partial \mu_y}$ u. s. w. leicht bestimmen und die derart bestimmten Grössen nach Einsetzung der bezüglich der Dilatationen nur bis auf Glieder der zweiten Ordnung genauen Werthe (37) in die allgemeinen Gleichungen (20) des ersten Theiles dieser Abhandlung die Spannungscomponenten berechnen. Man gelangt schliesslich auf diese Weise zu folgenden, für jeden Werth des Drehungswinkels ϑ, also auch für endliche Werthe von $\lambda_x, \nu_z \ldots$ giltigen, jedoch bezüglich der Dilatationen nur bis auf Glieder der zweiten Ordnung genauen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= [A_1+A_2(3\sigma+4)+A_3(3\sigma+2)]\,.\,\frac{a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2}{D} - \\
&\quad -2(A_2+A_3)\,.\,\frac{s+3-(A_{11}^2+A_{21}^2+A_{31}^2)}{D}+2A_3(3\nu^2-2\nu+1) \\
Y_y &= [A_1+A_2(3\sigma+4)+A_3(3\sigma+2)]\,.\,\frac{a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2}{D} - \\
&\quad -2(A_2+A_3)\,.\,\frac{s+3-(A_{12}^2+A_{22}^2+A_{32}^2)}{D}+2A_3(3\nu^2-2\nu+1) \\
Z_z &= [A_1+A_2(3\sigma+4)+A_3(3\sigma+2)]\,.\,\frac{a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2}{D} - \\
&\quad -2(A_2+A_3)\,.\,\frac{s+3-(A_{13}^2+A_{23}^2+A_{33}^2)}{D}+2A_3(3\nu^2-2\nu+1) \\
Y_z = Z_y &= [A_1+A_2(3\sigma+4)+A_3(3\sigma+2)]\,.\,\frac{a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}}{D} + \\
&\quad +2(A_2+A_3)\,.\,\frac{A_{12}A_{13}+A_{22}A_{23}+A_{32}A_{33}}{D} \\
Z_x = X_z &= [A_1+A_2(3\sigma+4)+A_3(3\sigma+2)]\,.\,\frac{a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31}}{D} + \\
&\quad +2(A_2+A_3)\,.\,\frac{A_{13}A_{11}+A_{23}A_{21}+A_{33}A_{31}}{D} \\
X_y = Y_x &= [A_1+A_2(3\sigma+4)+A_3(3\sigma+2)]\,.\,\frac{a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}}{D} + \\
&\quad +2(A_2+A_3)\,.\,\frac{A_{11}A_{12}+A_{21}A_{22}+A_{31}A_{32}}{D}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

In diese Gleichungen sind die durch (25) und (26) bestimmten Werthe von $a_{11}a_{12}\ldots A_{11}A_{12}\ldots$ und die Werthe von σ, s, ν und D aus (6) und (3) einzuführen.

Beachtenswerth ist, dass auch diese Gleichungen (38) nicht mehr Elasticitätsconstanten enthalten, als die in beschränkterem Masse giltigen Gleichungen (34), nämlich nur die drei Elasticitätsconstanten A_1, A_2 und A_3.

Über die innere Reibung der Lösungen

von

Dr. **Gustav Jäger.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. März 1894.)

In der Abhandlung »Über die kinetische Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten«[1] habe ich gezeigt, dass der Reibungscoëfficient durch die Formel

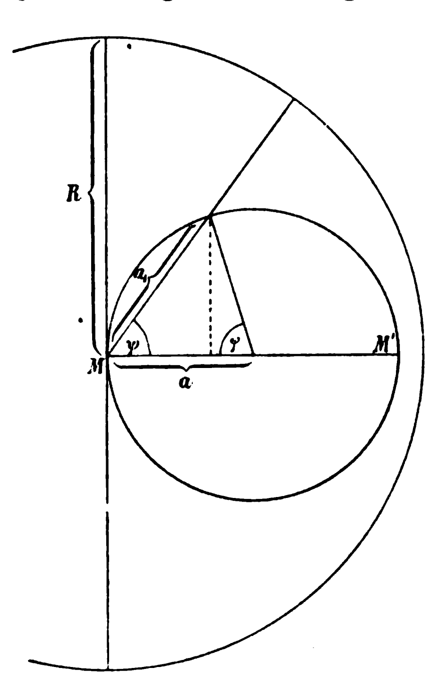
$$\mu = \frac{2r^2 \rho c}{3\lambda}$$

gegeben ist, wobei r der Radius, c die Geschwindigkeit, λ die mittlere Weglänge einer Molekel und ρ die Dichte der Flüssigkeit ist. Um λ zu finden, hatten wir die mittlere Weglänge eines Punktes in einer Kugel zu suchen, welche dem zur Bewegung der Molekel freien Raum eingeschrieben ist. Wir gingen dabei so vor, dass wir annahmen, eine unendlich grosse Zahl von Punkten sei auf der Kugeloberfläche gleichmässig vertheilt, und es kommen auf die Flächeneinheit N_1 Punkte. Dann ist die Zahl sämmtlicher in Betracht kommenden Punkte $4\pi a^2 N_1$. Die Entfernung zweier beliebiger Punkte ist gegeben durch $a\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$, wenn a der Radius der Kugel und φ der Winkel der Radien ist, welche zu den beiden Oberflächenpunkten gehören. Wir nahmen dann weiter an, dass die Gesammtzahl der Wege, welche dieselbe Länge haben, durch die Grösse $2\pi a^2 N_1 \sin\varphi\, d\varphi$ gegeben sei. Das ist aber, wie wir im Folgenden sehen werden, nicht strenge richtig, wesshalb wir den Ausdruck für die mittlere Weglänge von Neuem ableiten wollen.

---

[1] Wien. Ber. CII, S. 253 ff.

Wir müssen annehmen, dass alle Wege, welche der bewegliche Punkt von einem Punkte der Oberfläche der Kugel aus nehmen kann, nach allen Richtungen des Raumes gegen das Innere der Kugel gleich wahrscheinlich sind. Ist daher M (siehe die Figur) der Punkt, für welchen wir den mittleren Weg, den er in der Kugel vom Radius a zurücklegen wird, berechnen wollen, so haben wir sämmtliche Sehnen a_1, welche von M ausgehen, bezüglich ihrer Länge zu addiren und durch die Zahl derselben zu dividiren.



Diese Sehnen müssen gleichmässig im Raume vertheilt sein, mithin die Oberfläche einer Kugel, welche wir um M als Mittelpunkt schlagen, in gleichmässig vertheilten Punkten treffen. Der Radius dieser Kugel sei R, MM' ein Durchmesser der anderen Kugel. Der Winkel ψ, welchen eine beliebige Bewegungsrichtung mit MM' einschliesst, steht dann mit φ in der Beziehung $2\psi + \varphi = \pi$. Nennen wir nun wiederum die Zahl der Radien, welche die Flächeneinheit der Oberfläche der Kugel vom Radius R enthält, N_1, so ist die Gesammtzahl der in Betracht kommenden Radien $2\pi R^2 N_1$. Die Zahl der Radien, welchen ein bestimmtes a_1 zukommt, ist sodann durch $2\pi R^2 N_1 \sin\psi\, d\psi$, die Summe aller Weglängen a_1 mithin durch

$$2\pi R^2 N_1 a_1 \sin\psi\, d\psi = 4\pi R^2 N_1 a \cos\psi \sin\psi\, d\psi$$

gegeben, indem ja

$$a_1 \sin\psi = a \sin\varphi,$$

also

$$a_1 = a \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = a \frac{\sin 2\psi}{\sin \psi} = 2a \cos \psi$$

ist. Integriren wir die Summe der a_1 von $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir die Summe sämmtlicher möglichen Weglängen, welche durch $2\pi R^2 N_1$ dividirt, den mittleren Weg ergibt. Wir erhalten mithin

$$\lambda = \frac{4\pi R^2 N_1 a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin \psi \, d\psi}{2\pi R^2 N_1} = 2a \left[\frac{\sin^2 \psi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a.$$

Berücksichtigen wir nun, dass alle Molekeln in Bewegung sind und führen wir dementsprechend die relative Geschwindigkeit der Molekeln gegen einander, deren Werth $^4/_3 c$ ist, ein, so ergibt sich

$$\lambda = {}^3/_4 a$$

und, wie sich leicht weiter zeigen lässt,

$$\mu = \frac{2r^2pc}{3\lambda} = \frac{8r^2pc}{9a} = \frac{4rpc}{9\left(1-\sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)},$$

wobei v das Volumen der in Betracht kommenden Flüssigkeit und b der in dem Volumen v wirklich mit Materie erfüllte Raum ist. Diese letzte Formel unterscheidet sich von der ursprünglich abgeleiteten nur darin, dass sie den Zahlenfactor $^4/_9$ anstatt $^1/_3$ enthält. Diese beiden Factoren sind aber von derselben Grössenordnung, so dass sich die seinerzeit von uns gemachten Folgerungen vollkommen aufrecht halten lassen. Ja die numerische Rechnung zeigt vielmehr, dass die neue Formel noch günstigere Resultate gibt als die frühere. Wir wollen daher auch fortan unsere Gleichung in der neuen Form gebrauchen.

In der Abhandlung »Das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen«[1] habe ich folgenden Satz gefunden und bewiesen:

[1] Wien. Ber. C, S. 512.

»Die Gesammt-, sowie jede Theilenergie des Lösungsmittels wächst mit der Concentration der Lösung derart, dass für gleich viel Molekeln des Gelösten der Energiezuwachs eine constante Grösse ist.« Das hat nun für das Verhalten des Lösungsmittels denselben Effect, als würde die Temperatur in entsprechender Weise erhöht. Will man daher z. B. das Lösungsmittel zum Gefrieren bringen, so ist die Lösung so weit unter den Gefrierpunkt des Lösungsmittels abzukühlen, als eben die Energieerhöhung infolge des Zusatzes von gelöster Substanz ausmacht. Es gibt uns daher die Gefrierpunktserniedrigung unmittelbar einen Aufschluss über die Energievermehrung im Lösungsmittel. Alle Eigenschaften des Lösungsmittels nun, welche Functionen der Temperatur sind, müssen sich mit wachsender Concentration der Lösung derart ändern, als würde die Temperatur des Lösungsmittels immer um den Betrag der Gefrierpunktserniedrigung erhöht. Dabei ist nicht zu vergessen, dass sich diese Folgerung nur auf verdünnte Lösungen bezieht. Allerdings ist es nicht leicht, für die verschiedenen Eigenschaften der Flüssigkeiten, die Gefrierpunktserniedrigung ausgenommen, unseren Satz auch experimentell zu bestätigen, da die gelöste Substanz in der Regel noch andere Einflüsse hat als die Energieerhöhung des Lösungsmittels, welche die Wirkung der letzteren oft vollständig verdecken können.

Im Folgenden wollen wir nun untersuchen, inwieweit sich die Energieerhöhung des Lösungsmittels auf die innere Reibung verdünnter Lösungen geltend macht. Nehmen wir vorerst an, wir hätten es nur mit diesem Einfluss zu thun, so können wir folgendermassen schliessen. Da der Reibungscoëfficient μ eine Function der Temperatur, also

$$\mu = f(t)$$

ist, so muss der Reibungscoëfficient einer Lösung, deren Gefrierpunktserniedrigung Δ ist,

$$\mu_\Delta = f(t+\Delta)$$

sein. Entwickeln wir diese Function nach der Taylor'schen Reihe, so

$$f(t+\Delta) = f(t) + \Delta f'(t) + \frac{\Delta^2}{2} f''(t) + \ldots, \tag{1}$$

also

$$\mu - \mu_\Delta = -\Delta f'(t) - \frac{\Delta^2}{2} f''(t) - \ldots \qquad (2)$$

Daraus können wir ohneweiters folgern: Sind die sonstigen Einflüsse der gelösten Substanz gegenüber der Energieerhöhung zu vernachlässigen, so ist der Unterschied zwischen der inneren Reibung des Lösungsmittels und der Lösung durch die Gleichung (2) gegeben. Sind z. B. $f'(t), f''(t) \ldots$ nur positive Grössen, was zur Folge hätte, dass μ mit der Temperatur wächst, so muss $\mu_\Delta > \mu$, die innere Reibung der Lösung immer grösser als die des Lösungsmittels sein. Sind hingegen die Differentialquotienten sämmtlich negativ, so würde folgen, dass die innere Reibung der Lösung immer kleiner als die des Lösungsmittels sein muss. Im Allgemeinen werden wir natürlich sowohl positive als negative Differentialquotienten haben. Je nachdem dann das eine oder andere Glied überwiegt, muss die Reibung der Lösung grösser oder kleiner als die des Lösungsmittels sein. Da wir nur verdünnte Lösungen untersuchen, so ist Δ nicht gross, wir können daher unsere unendliche Reihe immer auf die ersten Glieder beschränken.

Betrachten wir nun unsere eingangs erwähnte Formel

$$\mu = \frac{4 r \rho c}{9\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)},$$

welche für eine reine Flüssigkeit gilt, so können wir dieselbe in erster Annäherung für verdünnte Lösungen etwa in der Form

$$\mu = r \rho \varphi(t)$$

schreiben, in dem ja die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln c, sowie das Verhältniss der Volumina $\frac{b}{v}$ Functionen der Temperatur t sind, für welche wir den Einfluss der gelösten Substanz, insoferne er noch ein anderer, als der der Energieerhöhung ist, vernachlässigen können. Auch die Änderung des ρ brauchen wir in zweierlei Beziehung nicht zu berücksichtigen; einmal, weil wir es bloss mit verdünnten Lösungen, deren Dichte

sich also wenig von jener des Lösungsmittels unterscheidet, zu thun haben, dann aber auch bezüglich der Temperaturerhöhung, da die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten eine kleine und die Energieänderung des Lösungsmittels selbst nur einer Temperaturerhöhung um Δ entspricht. Es bleibt uns also nur noch der Einfluss, welchen der Radius r der Molekel der gelösten Substanz auf die innere Reibung ausübt, und der ist allerdings nicht zu vernachlässigen. Bedenken wir nämlich, dass der Vorgang der Lösung seine Ursache in bedeutenden Anziehungskräften hat, welche die Molekeln des Lösungsmittels und der gelösten Substanz auf einander ausüben — es muss ja die Cohäsion des Gelösten vollständig überwunden werden — so werden wir annehmen müssen, dass sich die Molekeln des Gelösten nicht frei in der Lösung bewegen können, sondern dass sie immer von einer Schichte der Molekeln des Lösungsmittels umgeben sind, die sich mit der eingehüllten Molekel in derselben Richtung bewegen, so dass es die Wirkung hat, als hätten die Molekeln des Gelösten einen erheblich grösseren Durchmesser als jene des Lösungsmittels. Nun geht aber aus der Formel für die innere Reibung hervor, dass mit wachsendem Durchmesser der Molekeln der Reibungscoëfficient proportional wächst, so dass μ_Δ durch diesen Einfluss immer grösser ausfallen muss als nach der Gleichung (1) folgen würde. Wir können daher auch Gleichung (2) nicht aufrecht halten, sondern wir müssen sie in die Ungleichung

$$\mu - \mu_\Delta \leqq -\Delta f'(t) - \frac{\Delta^2}{2} f''(t) - \ldots$$

umwandeln. Je kleiner die Geschwindigkeit der Molekeln des Lösungsmittels ist, d. h. je träger sie sich bewegen, umso fester werden sie an den Molekeln des Gelösten haften, umsomehr wird $\mu - \mu_\Delta$ von der rechten Seite unserer Ungleichung abweichen. Dies ist demnach der Fall, je tiefer die Temperatur ist. Mit wachsender Temperatur muss sich hingegen unsere Ungleichung immer mehr einer Gleichung nähern, vorausgesetzt natürlich, dass unsere Lösung so verdünnt ist, dass der sodann noch vorhandene Einfluss der Molekeln des Gelösten auf die innere Reibung vernachlässigt werden kann. Inwieweit dieses

theoretische Resultat mit den Beobachtungen übereinstimmt, wollen wir an einer Reihe wässeriger Lösungen im Folgenden nachweisen.

Um den Reibungscoëfficienten des Wassers als Function der Temperatur darzustellen, benützte ich die Angaben von Sprung.[1] Derselbe berechnete jedoch nicht die absoluten Werthe der inneren Reibung, sondern gibt bloss die auf dieselbe Druckdifferenz reducirten Ausflusszeiten gleicher Volumina der Flüssigkeiten an, welche ein enges Rohr passiren. Was wir also im Folgenden mit μ bezeichnen werden, sind lediglich relative Werthe. Aus den beobachteten μ bei 0°, 10°, 30° und 50° wurde die Formel

$$\mu = 649\cdot 2 - 21\cdot 17t + 0\cdot 4079t^2 - 0\cdot 00326t^3$$

abgeleitet. Aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, welche Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen der inneren Reibung vorkommen.

t	μ berechnet	μ beobachtet
0°	649·2	649·2
5	553·2	551·3
10	475·0	475·0
15	412·4	414·5
20	362·9	365·0
25	324·0	327·6
30	293·2	293·1
35	268·1	264·6
40	246·4	240·8
45	225·4	220·5
50	203·0	202·8

Vollkommen genau gibt also unsere Formel die Beobachtungen nicht wieder, doch genügt sie für unsere Zwecke vollkommen. Setzen wir $\mu = f(t)$, so wird

$$f'(t) = -21\cdot 17 + 0\cdot 8158t - 0\cdot 00978t^2$$
$$f''(t) = 0\cdot 8158 - 0\cdot 01956t$$
$$f'''(t) = -0\cdot 01956$$
$$f^{\mathrm{IV}}(t) = f^{\mathrm{V}}(t) = \ldots\ldots = f^{(n)}(t) = 0,$$

[1] Pogg. Ann., Bd. 159, S. 8 (1876).

mithin

$$\mu - \mu_\Delta \leqq (21\ 17 - 0\cdot 8158\,t + 0\cdot 00978\,t^2)\,\Delta - (0\cdot 4079 - \\ - 0\cdot 00978\,t)\,\Delta^2 + 0\cdot 00326\,\Delta^3$$

Ist Δ sehr klein, d. h. nehmen wir eine verdünnte Lösung, so können wir die rechte Seite unserer Ungleichung auf's erste Glied beschränken, zumal auch der Factor von Δ^2, den wir B nennen wollen, viel kleiner als A, der Factor von Δ, ist. A und B nehmen für die verschiedenen Temperaturen folgende Werthe an:

t	A	B
0°	21·17	0·409
5	17·97	0·359
10	14·97	0·310
15	12·18	0·261
20	9·59	0·212
25	7·20	0·163
30	5·02	0·115
35	3·04	0·066
40	1·27	0·018
45	— 0·30	—0·032
50	— 1·67	—0·081

Ziehen wir also, wie vorausgesetzt, nur verdünnte Lösungen in Betracht, so wird die rechte Seite unserer Gleichung bei 0° immer positiv sein, sodann mit steigender Temperatur immer mehr und mehr abnehmen, zwischen 40° und 50° durch den Nullpunkt gehen und negativ werden. Für sehr verdünnte Lösungen liegt der Nullpunkt etwa bei 44°. Das heisst aber: Nur unterhalb dieser Temperatur, für welche unser Ausdruck 0 wird, kann $\mu_\Delta < \mu$ sein, weil nur unterhalb dieser Temperatur $\mu - \mu_\Delta$ einen positiven Werth annehmen kann. Ferner ist der Betrag, um welchen μ_Δ höchstens kleiner als μ sein kann, durch unsere Ungleichung für jede Temperatur bestimmt. Ich halte es nun für wichtig zu untersuchen, ob thatsächlich unsere theoretischen Folgerungen mit den Beobachtungen übereinstimmen.

Wir haben demnach unser Augenmerk in erster Linie auf jene Lösungen zu richten, deren innere Reibung kleiner als jene

des reinen Wassers ist, da ja von den übrigen ohne weiters unsere Ungleichung erfüllt erscheint. Sprung gibt folgende acht Salze an, für welche er bei niedrigen Temperaturen die Zähigkeit der Lösung geringer als jene des Wassers fand: KCl, KBr, KJ, KNO_3, NH_4Cl, NH_4Br, NH_4NO_3, $KClO_3$. Von diesen Lösungen habe ich alle mit Ausnahme des chlorsauren Kali auf meine Formel geprüft und die diesbezüglichen Resultate in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Das chlorsaure Kali schenkte ich mir desshalb, weil seine Lösungen selbst bei den niedrigen Temperaturen eine nur wenig unter jener des Wassers liegende Zähigkeit zeigen, während dieselbe bei 30° schon grösser als jene des Wassers ist, so dass es zur Bestätigung unserer Regel einer besonderen Berechnung dieser Lösung nicht bedarf.

Die folgenden Tabellen enthalten in der ersten Zeile den Namen, die Formel und das Moleculargewicht des gelösten Salzes, in der zweiten den Procentgehalt, das specifische Gewicht, die im Liter gelöste Zahl der Gramme, sowie der Grammmolekeln (Mol.) und die Gefrierpunktserniedrigung Δ. Dieselbe wurde unter der Voraussetzung berechnet, dass die Salze in der Lösung vollkommen dissociirt sind, und dass nach Raoult eine Grammmolekel im Liter den Gefrierpunkt um 1·85° C. herabsetzt. Die Annahme vollständiger Dissociation ist mit grosser Annäherung desshalb gestattet, weil für ein jedes Salz immer bloss die verdünnteste der von Sprung untersuchten Lösungen in Rechnung gezogen wurde. Die mit D bezeichnete letzte Spalte der Tabellen enthält den berechneten grössten Werth, welchen die Differenz $\mu-\mu_\Delta$ annehmen kann.

Chlorammonium NH_4Cl (53·5).

3·67%, $s = 1·011$, $37·1\,g = 1·386$ Mol. $\Delta = 2°56$.

t	μ_Δ	$\mu-\mu_\Delta$	D
0°	613·8	35·4	51·6
5	532·0	19·3	43·7
10	463·9	11·1	36·2
20	361·8	3·2	23·2
30	292·0	1·1	17·4
40	244·0	—3·2	3·2
50	207·1	—4·3	—3·6

Bromammonium NH_4Br (98).

$15\cdot97\%$, $s = 1\cdot0954$, $174\cdot8 g = 3\cdot56$ Mol. $\Delta = 6°58$.

t	μ_Δ	$\mu-\mu_\Delta$	D
0°	540·9	108·3	122·4
5	477·5	73·8	103·5
10	423·8	51·2	86·2
15	379·0	35·5	69·6
20	340·6	24·4	54·6
25	308·5	19·1	41·2
30	281·0	12·1	28·9
40	237·2	3·6	8·4
50	205·0	— 2·2	— 6·7

Ammoniumnitrat NH_4NO_3 (80).

$5\cdot975\%$, $s = 1\cdot026$, $61\cdot29 g = 1\cdot532$ Mol., $\Delta = 2°84$.

t	μ_Δ	$\mu-\mu_\Delta$	D
10°	452·4	22·6	40·0
20	354·1	10·9	25·6
30	287·9	5·2	13·4
40	239·8	1·0	3·5
50	205·6	— 2·8	— 3·9

Chlorkalium KCl (74·5).

$10\cdot23\%$, $s = 1\cdot068$, $109\cdot2 g = 2\cdot93$ Mol. $\Delta = 5°42$.

t	μ_Δ	$\mu-\mu_\Delta$	D
5°	519·8	31·5	87·7
10	454·8	20·2	75·6
15	405·3	9·2	61·8
20	362·8	2·2	49·3
25	326·4	1·2	37·8
30	299·0	— 5·9	27·4
40	252·5	— 11·7	9·9
50	215·1	— 12·3	3·2

Bromkalium KBr (119).

$14 \cdot 023\%$, $s = 1 \cdot 109$, $155 \cdot 51\, g = 2 \cdot 61$ Mol., $\Delta = 4^\circ 83$.

t	μ_Δ	$\mu - \mu_\Delta$	D
5°	501·1	50·2	78·6
10	439·7	35·3	65·3
20	353·4	11·6	41·7
30	291·3	1·8	22·0
40	243·8	— 3·0	6·0
50	209·1	— 6·3	— 6·0

Jodkalium KJ (166).

$8 \cdot 419\%$, $s = 1 \cdot 0661$, $89 \cdot 8\, g = 1 \cdot 082$ Mol., $\Delta = 2 \cdot 000$.

t	μ_Δ	$\mu - \mu_\Delta$	D
5°	516·1	35·2	34·5
10	450·2	24·8	28·7
15	399·2	15·3	23·4
20	354·8	10·2	18·3
25	316·0	11·6	13·7
30	285·8	7·3	9·8
40	238·3	2·5	2·5
50	203·7	— 0·9	— 3·0

Kaliumnitrat KNO_3 (101).

$6 \cdot 316\%$, $s = 1 \cdot 040$, $65 \cdot 68\, g = 1 \cdot 30$ Mol., $\Delta = 2 \cdot 41$.

t	μ_Δ	$\mu - \mu_\Delta$	D
10°	460·0	15·0	34·2
20	360·5	4·5	21·8
30	290·1	3·0	11·4
40	242·6	— 1·8	2·9
50	206·7	— 3·9	— 3·5

Ein Blick auf unsere Tabellen zeigt uns sofort, dass besonders bei den niedrigeren Temperaturen $\mu - \mu_\Delta$ immer erheblich kleiner als D ist, dass mit wachsender Temperatur diese beiden Grössen einander näher rücken und schliesslich gleich werden. Kommen irgendwo Abweichungen vor, so sind sie immer so unerheblich, dass sie vollständig innerhalb der Fehler-

grenzen liegen. Ist ja unsere Temperaturformel für die innere Reibung des Wassers nur angenähert richtig. Ferner müssen wir noch überlegen, dass auch unsere Lösungen selbst noch lange nicht das Ideal einer verdünnten Lösung repräsentiren. Enthält ja die KBr-Lösung 14% und die NH_4Br-Lösung sogar 16% an gelöster Substanz.

Alle Folgerungen, welche Sprung aus seinen Beobachtungen zieht, finden wir im Einklang mit unserer auf theoretischem Wege ermittelten Ungleichung. Als Typus der oben genannten Salzgruppe führt er das Chlorammonium an und stellt folgende drei Sätze auf:

»1. Bei niedrigen Temperaturen vermindert, bei höheren Temperaturen vergrössert das Chlorammonium die Zähigkeit des Wassers, und zwar beides in umso höherem Grade, als die Lösung concentrirter ist.

2. Die Temperatur, bei welcher Wasser und Salzlösung gleiche Zähigkeit zeigen, liegt umso höher, je geringer die Concentration der Lösung ist.

3. Es fällt das Minimum der Zähigkeit auf eine umso geringere Concentration, je höher die Temperatur ist.«

In der That folgt aus der rechten Seite unserer Ungleichung ohne weiters, dass die Verminderung der Zähigkeit bei niedrigeren Temperaturen, die Vermehrung derselben bei höheren umso grösser sein muss, je grösser Δ, d. h. die Concentration ist.

Bezüglich des zweiten Satzes haben wir zu untersuchen, für welche Temperaturen bei abnehmendem Δ die Differenz der inneren Reibung des Wassers und der Lösung Null wird. Vernachlässigen wir in unserer Ungleichung das Glied mit Δ^3, so finden wir für den vorliegenden Fall

$$(21\cdot 17-0\cdot 8158t+0\cdot 00978t^2)\,\Delta-(0\cdot 4079-0\cdot 00978t)\,\Delta^2 = 0,$$

woraus folgt

$$\Delta = \frac{21\cdot 17-0\cdot 8158t+0\cdot 00978t^2}{0\cdot 4079-0\cdot 00978t} = 51\cdot 9-0\cdot 756\,t+0\cdot 0059t^2,$$

indem wir die höheren Glieder vernachlässigen können. Dieser Ausdruck nimmt mit wachsendem t bis gegen 64° beständig ab, was dem zweiten Satze von Sprung entspricht.

Suchen wir jene Beziehung zwischen t und Δ, für welche μ_Δ ein Minimum wird, so haben wir die Gleichung (1) nach Δ zu differenziren und den Differentialquotienten gleich Null zu setzen. Also

$$\frac{d\mu_\Delta}{d\Delta} = f'(t) + \Delta f''(t) = 0,$$

indem wir die höheren Glieder wieder vernachlässigen können. Führen wir die Zahlenwerthe ein, so ergibt dies

$$\frac{d\mu_\Delta}{d\Delta} = -21\cdot 17 + 0\cdot 8158t - 0\cdot 00978t^2 + \\ + (0\cdot 8158 - 0\cdot 01956t)\Delta = 0.$$

Daraus folgt weiter

$$\Delta = 25\cdot 95 - 0\cdot 3778t + 0\cdot 00293t^2.$$

Auch aus dieser Gleichung ergibt sich eine Abnahme des Δ mit wachsendem t bis gegen 64°, so dass auch der dritte Sprung'sche Satz in unserer Theorie enthalten ist.

Es bestätigt sich also unsere Ansicht von Neuem, dass der Zusatz des Gelösten die Energie des Lösungsmittels in der Weise erhöht, dass es die Wirkung hat, als würde die Temperatur des Lösungsmittels in entsprechender Weise gesteigert.

Von einem ganz anderen Standpunkt aus beurtheilt Arrhenius die innere Reibung der Lösungen. In seiner Abhandlung »Über die innere Reibung verdünnter, wässeriger Lösungen«[1] sagt er: »Bei der Discussion der Verhältnisse, die bei der Elektricitätsleitung in Elektrolyten stattfinden, bin ich zu der Ansicht geführt worden, dass die Moleküle eines Elektrolyten von zwei verschiedenen Arten sind, active und inactive. (Die Moleküle eines Nichtelektrolyten sind dagegen alle inactiv.) Die activen Moleküle sind so constituirt, dass ihre Ionen dem von der Clausius-Williamson'schen Hypothese geforderten freien Bewegungszustand genügen, oder mit anderen Worten, die activen Moleküle sind factisch als dissociirt anzusehen. Da die Reibung nach aller Wahrscheinlichkeit mit der Zusammengesetztheit der reibenden Theile wächst, so dürfte es nicht mehr

[1] Zeitschrift für physik. Chemie, I, S. 285 ff.

befremdend erscheinen, dass active (d. h. in Ionen gespaltete) Moleküle unter Umständen eine kleinere Reibung erleiden, als inactive (nicht gespaltete). Wenn man näher nachsieht, so sind es auch nur diejenigen Salze, die am allerbesten leiten (d. h. die die relativ grösste Anzahl von activen Molekülen enthalten), welche die innere Reibung des Wassers verkleinern. In den Lösungen von diesen Salzen würde also eine so grosse Menge von activen Molekülen vorkommen, dass ihre verringernde Einwirkung auf die innere Reibung die vergrössernde Einwirkung der gleichzeitig vorkommenden inactiven Moleküle überwindet. Eine Stütze für diese Anschauung findet sich darin, dass auch Lösungen von diesen Salzen bei grösseren Concentrationen grössere innere Reibung als das Wasser selbst haben. Bei zunehmender Concentration wächst nämlich die Anzahl der inactiven Moleküle auf Kosten der activen.

Da alle Salze in äusserster Verdünnung in lauter active Moleküle zerfallen, so ist es nicht undenkbar, dass alle Salze (wenigstens diejenigen, deren Ionen ziemlich einfach sind) in äusserst kleinen Zusätzen die innere Reibung des Wassers verkleinern.«

Ich kann mich dieser Anschauung nicht anschliessen. Einmal, weil ich nicht einsehe, wesshalb der Einfluss des Gelösten verschiedener Natur sein soll, wenn die Molekeln als Ionen oder nicht dissociirt auftreten. Die Spaltung der Molekeln in Ionen hat lediglich den Erfolg, dass die Zahl der gelösten Molekeln vergrössert erscheint und daher ein dementsprechender Einfluss auf die verschiedenen Eigenschaften des Lösungsmittels (Gefrierpunktserniedrigung, Dampfspannungserniedrigung, osmotischer Druck etc.) ausgeübt wird. Wie mangelhaft die Unterscheidung von activen und inactiven Molekeln für den Fall der inneren Reibung ist, zeigt eine Anmerkung, welche Arrhenius in seiner Abhandlung S. 298 anbringt. Er sagt daselbst: »Ich habe gefunden, dass Lösungen in Äthylalkohol von kleinen Mengen von Methylalkohol, Aceton oder Äthyläther eine geringere innere Reibung als der Äthylalkohol selbst haben.« Nach unserer Betrachtungsweise kann uns ein derartiges Resultat nicht überraschen, da unsere Theorie mit der Dissociation gar nichts zu thun hat.

In zweiter Linie ist für mich das Verhalten der inneren Reibung der Lösungen bei höheren Temperaturen massgebend, Arrhenius Theorie nicht anzunehmen. Wären thatsächlich die sogenannten activen Molekeln die Ursache der Verminderung der inneren Reibung, so müsste das umso mehr der Fall sein, je höher die Temperatur der Lösung ist, da ja der Grad der Dissociation mit wachsender Temperatur zunimmt. Nun zeigt sich aber im Gegentheil, dass schon bei 50° die innere Reibung einer jeden Lösung grösser ist als jene des reinen Wassers bei derselben Temperatur.

Damit erscheint mir der Vorzug meiner Anschauungsweise zur Genüge klar gelegt.

Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten

(II. Mittheilung)

von

Prof. Dr. **O. Tumlirz** in Czernowitz.

(Mit 1 Textfigur.)

Es wurde schon in meiner ersten Mittheilung[1] hervorgehoben, dass, wenn eine unterkühlte Flüssigkeit durch einen festen Krystall zum Erstarren gebracht wird, die Gleichgewichtsstörung zu ihrer Ausbreitung Zeit braucht. Ich habe nun diese zeitliche Ausbreitung, besonders in ihrer Abhängigkeit von dem Grade der Unterkühlung, d. i. von der Differenz zwischen der Temperatur der unterkühlten Flüssigkeit und ihrem Schmelzpunkt, näher ins Auge gefasst, um auf diesem Wege die Natur der Unterkühlung näher kennen zu lernen.

Was die Wahl der Substanzen anbelangt, so sollen zunächst solche Substanzen untersucht werden, welche kein Krystallwasser enthalten, weil bei den krystallwasserhältigen Substanzen das Krystallwasser die Erscheinung in einer uns noch unbekannten Weise complicirt. Da das Wasser die nächstliegende Substanz ist, so habe ich zuerst die Erstarrungsgeschwindigkeit des unterkühlten Wassers gemessen.

Der Apparat bestand im Wesentlichen aus einer dünnwandigen Glasröhre, welche 595 *mm* lang, 18 *mm* weit und an dem einen Ende zugeschmolzen war. Der Stopfen hatte zwei Bohrungen; in der einen sass ein langes, in Zehntelgrade getheiltes und wohlgeprüftes Thermometer, dessen Gefäss sich in der Mitte der Wassersäule befand. Um die Hundertstel noch

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. C, Abth II. a, December 1891, S. 1219.

sicher schätzen zu können, wurde vor dem Thermometer eine Linse von 235 *mm* Brennweite so aufgestellt, dass das Thermometer sich gerade in der Brennebene befand, und hinter die Linse ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr gebracht. Die zweite Bohrung des Stopfens diente dazu, um in das unterkühlte Wasser, ohne mit dem Stopfen zu rühren, das die Unterkühlung auslösende Eisstückchen fallen zu lassen. Bedeckt war das Wasser mit einer ungefähr 4 *mm* dicken Schichte Terpentinöl.

Die beschriebene Glasröhre sass in dem Stopfen einer dickwandigen Glasröhre, welche um einige Centimeter länger und 44 *mm* weit war. Diese weitere Glasröhre war unten verschlossen und ganz mit Terpentinöl gefüllt. Der Zweck dieser Vorrichtung war der, sowohl die Temperatur der Wassersäule viel gleichmässiger zu machen, als auch die Wassersäule während des Versuches vor einer Erwärmung durch den Athem zu schützen. Die weitere Röhre war in einem eisernen Träger festgeklemmt.

An der Glasröhre, welche das Wasser enthielt, befanden sich zwei feine, kreisförmige Marken, deren Ebenen zu der Röhrenachse senkrecht waren. Die erste Marke befand sich 4 *cm* unter dem Wasserspiegel und die zweite am Ende der Röhre, so dass der Abstand = 501·0 *mm* war. Fällt nämlich auf die Oberfläche des unterkühlten Wassers ein sehr kleines Eisstückchen, so tritt dort die Erstarrung ein. Es ist nun sehr schwer, den Zeitpunkt zu bestimmen, in dem gerade die Erstarrung beginnt, verfolgt man aber die Fortpflanzung der Erstarrung, so ist es sehr leicht, den Zeitpunkt zu bestimmen, in dem die Erstarrung durch eine solche Marke hindurchtritt.

Zur Messung der Zeit benützte ich in Ermangelung eines Secundenpendels ein gut gehendes Metronom, welches so eingestellt wurde, dass die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schlägen (wie eine lange Beobachtungsreihe ergab) = 0·9869 Sekunden war.

Die Unterkühlung wurde ausgeführt in einem kleinen exponirt liegenden Zimmer meines Laboratoriums, welches den ganzen Winter hindurch nicht geheizt wurde. Die Zimmertemperatur nahm, als das Frostwetter eintrat, stetig, aber ausser-

ordentlich langsam ab, so dass sie, namentlich am Vormittag, durch einige Stunden hindurch constant war.

Ich hätte gern die Untersuchung bis —10° C. ausgedehnt, aber leider erstarrte das Wasser zweimal bei etwas weniger als —6° C. von selbst. Dieser Umstand ist mir ganz räthselhaft, da ich früher wiederholt Wasser in Glaskolben bis ungefähr —10° C. unterkühlen konnte, worauf dann allerdings die Erstarrung von selbst eintrat. Möglicherweise ist daran die Beschaffenheit des Glases schuld.

In der folgenden Tabelle bedeuten t die Temperatur in Celsiusgraden, Z die Zeit in Sekunden, während welcher die Erstarrung von der ersten Marke bis zur zweiten fortschritt, und V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ausgedrückt in Millimeter und Sekunden.

t	Z	V	t	Z	V
—0·74	1372	0·37	—2·71	86·8	5·77
—1·12	347·5	1·44	—2·90	71	7·06
—1·40	228	2·20	—3·20	67·1	7·47
—1·54	181·6	2·76	—3·49	49	10·23
—1·62	171·7	2·92	—3·64	44·4	11·28
—2·00	151	3·32	—4·14	29·6	16 93
—2·40	111·5	4·49	—4 20	27·6	18·15
—2·54	95·7	5·24	—4·60	22·7	22·07
—2·67	89 8	5·58			

Eine einfache empirische Formel, welche sich den Versuchswerthen in genügender Weise anschliesst, ist

$$V = (a+bt+ct^2).t^2,$$

wo

$$a = 1\cdot 3561, \quad b = 0\cdot 3766, \quad c = 0\cdot 06726$$

ist und für t die negativen Werthe einzusetzen sind:

Die Versuche führen uns also zu dem Resultate: Die Geschwindigkeit, mit welcher die Erstarrung in dem

unterkühlten Wasser fortschreitet, nimmt mit dem Grade der Unterkühlung stetig und sehr rasch zu.

Es muss erwähnt werden, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erstarrung auch bei einer und derselben Temperatur etwas schwanken kann, und zwar hängt dies von der Art und Weise ab, wie sich die Krystalle aneinanderreihen. In vielen Fällen schritt die Erstarrung in einer Schraubenfläche fort und dann war die Fortpflanzungsgeschwindigkeit etwas kleiner. Bei dem ersten der angeführten Versuche ($t = -0{\cdot}74°$ C.) bildeten die Krystalle eine Art Kette, welche anfangs schraubenförmig gewunden war, dann gerade verlief und sich schliesslich wieder krümmte. Dementsprechend variirte auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit während des ganzen Versuches.

Dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erstarrung mit der Unterkühlung rasch zunimmt, steht mit der in meiner ersten Mittheilung durchgeführten Theorie in gutem Einklang. Nach dieser Theorie besteht eine unterkühlte Flüssigkeit aus lauter Elementarkrystallen, welche gegeneinander alle möglichen Orientirungen haben und welche die Übergangsstufe von dem flüssigen Zustand zu den festen Krystallen bilden. Wird das Wasser von 0° auf $-t°$ C. unterkühlt und ist $d\mu$ die Masse eines solchen Elementarkrystalles, so hat derselbe bei der Unterkühlung die Wärmemenge

$$d\mu \int_{-t}^{0} C dt,$$

oder, wenn wir berücksichtigen, dass hier C sehr nahe $= 1$ ist, die Wärmemenge

$$t d\mu$$

abgegeben. Würde das Wasser auf normalem Wege bei 0° C. zu Eis erstarren, dann würde das Massenelement $d\mu$ die Wärmemenge $\Lambda d\mu$ abgeben, wo Λ die Erstarrungswärme bedeutet. Es hat also der Elementarkrystall in dem unterkühlten Wasser um

$$(\Lambda - t) d\mu$$

mehr Wärme, als in dem festen Eis von 0° C. Die Auslösung der Unterkühlung durch ein Eisstückchen erfolgt nun in der

Weise, dass die anliegenden Elementarkrystalle gleichgerichtet werden. Indem die der Arbeit der richtenden Kräfte gleiche lebendige Kraft sich in Wärme verwandelt, werden, wie in der früheren Abhandlung ausführlich auseinandergesetzt wurde, die gerichteten Elementarkrystalle auf die Temperatur des Schmelzpunktes gehoben, wodurch zwischen ihnen und den noch ungerichteten Elementarkrystallen eine Temperaturdifferenz entsteht, welche t° C. beträgt und zur Folge hat, dass die gerichteten Elementarkrystalle so lange Wärme verlieren, bis sie fest sind.

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Erstarrung fortschreitet, wird also von der Geschwindigkeit abhängen, mit welcher aus dem unterkühlten Wasser neue Krystalle entstehen, und diese Geschwindigkeit wird wieder abhängen von der Geschwindigkeit, mit welcher die Elementarkrystalle gerichtet werden und von der Raschheit, mit welcher dieselben dann ihre Wärme abgeben.

Ist dm die Masse einer Schichte, welche zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten der Röhre liegt, so wird darin bei der Auslösung der Unterkühlung die Menge

$$-\frac{C}{\Lambda}\,t\,dm, \qquad \text{oder einfach:} \qquad -\frac{t}{\Lambda}\,dm$$

erstarren. Die Menge der erstarrten Krystalle ist also der Unterkühlung $-t^\circ$ proportional. Da durch diese Krystalle die Unterkühlung in der nächsten Schichte ausgelöst wird, so ist die Zahl der richtenden Kräfte proportional der Unterkühlung. Ferner werden diese Kräfte gewiss desto grösser sein, je tiefer die Unterkühlung ist. Denn da die Elementarkrystalle aus dem vollkommen flüssigen Zustand in den vollkommen festen durch allmälige Abgabe der Wärme $\Lambda d\mu$ stetig übergehen, so werden sie dem festen Zustand desto näher liegen, je mehr sie Wärme abgegeben haben, also je grösser die Unterkühlung ist. Ferner kommt in Betracht, dass die Wärmeabgabe der gerichteten Elementarkrystalle desto rascher erfolgt, je grösser die Temperaturdifferenz derselben gegen die noch nicht alterirte unterkühlte Flüssigkeit ist, und schliesslich ist auch die Wärme, welche die gerichteten Elementarkrystalle noch abzugeben

haben, um vollkommen fest zu werden, desto kleiner, je mehr sie schon früher abgegeben hatten, d. h. je tiefer die Unterkühlung ist. Alles zusammengefasst, sehen wir, dass vier Umstände, welche alle in demselben Sinne wirken, die Erstarrung desto rascher herbeiführen, je tiefer die Unterkühlung ist.

Im Anschlusse an das Vorhergehende möchte ich hier noch auf das zurückkommen, was ich in meiner früheren Arbeit (§. 10) über den amorphen Zustand gesagt habe, und möchte daran einige Bemerkungen knüpfen.

Ich habe dort gesagt, dass, wenn eine flüssige Substanz den Grenzzustand der Unterkühlung erreicht hat und dann noch weiter abgekühlt wird, wir daraus einen festen amorphen Körper erhalten. Wir wollen jetzt zunächst die thermische Volumsänderung des Schwefels bei dem constanten Druck einer Atmosphäre betrachten. Der natürliche krystallisirte Schwefel dehnt sich nach Kopp (Liebig's Annalen 93, 1855) sehr ungleichmässig aus, indem die Ausdehnung für steigende Temperaturen, insbesonders in der Nähe des Schmelzpunktes, rasch zunimmt. Kopp gab zwischen $t = 0°$ und $t = 90°$ C. die Formel

$$V_t = 1+0\cdot00010458t+0\cdot0000026588t^2-0\cdot000000014673t^3.$$

Ist das Volumen des festen Schwefels bei 0° C. = 1, so ist es bei 115° C.

$$= 1\cdot0956.$$

Beim Schmelzen erfährt das Volumen eine Vergrösserung, so dass das Volumen des flüssigen Schwefels bei 115° C.

$$= 1\cdot1504$$

ist. Was die Ausdehnung des flüssigen Schwefels anbelangt, so fand Kopp dieselbe innerhalb des Temperaturintervalles 126·0—151·6° C. als gleichförmig, so dass bei $t°$ das Volumen durch

$$V_t' = 1\cdot1504+0\cdot000527(t-115)$$

dargestellt wird. Viel genauer wurde die Ausdehnung des flüssigen Schwefels von Despretz (Compt. rend. VII.) unter-

sucht. Derselbe fand den Ausdehnungscoëfficienten

zwischen	110	und	130° C.	$= 0 \cdot 000622$
»	110	»	150	$= 0 \cdot 000581$
»	110	»	200	$= 0 \cdot 000454$
»	110	»	250	$= 0 \cdot 000428$,

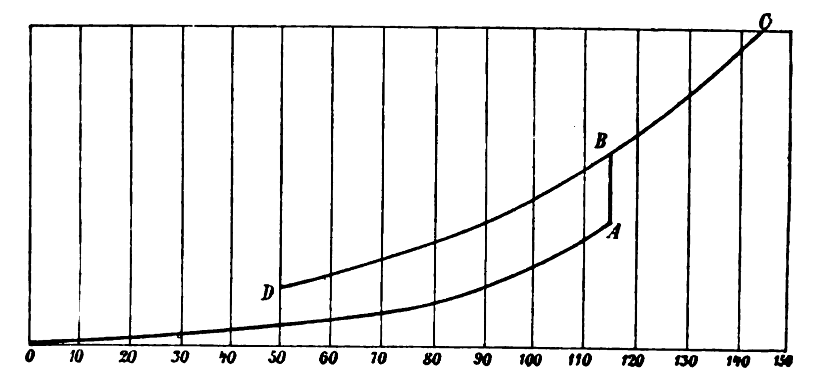
was sich durch die Formel

$$\text{Ausdehnungscoëfficient} = 0 \cdot 001033 - 0 \cdot 0000035\, t$$

darstellen lässt. Es hat demnach der flüssige Schwefel bei t°C. das Volumen

$$V_t' = 1 \cdot 04993 + 0 \cdot 001085\, t - 0 \cdot 00000184\, t^2.$$

In der beistehenden Figur stellt die Curve zwischen 0° und 115° (bis A) die Ausdehnung des festen und die Curve BC



die Ausdehnung des flüssigen Schwefels dar. Wenn wir nun den flüssigen Schwefel wieder abkühlen und dafür sorgen, dass er den unterkühlten Zustand sehr leicht annehmen kann (indem wir ihn z. B. in die Form kleiner Tröpfchen bringen), so wird das Volumen längs der Curve CBD abnehmen und es entsteht die Frage, ob diese Curve nicht einmal die Ausdehnungscurve des festen Schwefels schneiden wird. In einem solchen Schnittpunkt hätten dann der feste und der unterkühlte Schwefel denselben Druck, dasselbe Volumen und dieselbe Temperatur.

Wir erhalten diesen Punkt aus der Gleichung

$$V_t = V_t'$$

oder

$$0 = 0{\cdot}04993 + 0{\cdot}00098042\,t - 0{\cdot}0000044988\,t^2 + \\ + 0{\cdot}000000014673\,t^3,$$

welche die reelle Wurzel

$$t = -41{\cdot}81$$

hat.

Diese Temperater liegt sehr tief unter der Grenze der Unterkühlung, welche ich bei 75° C. gefunden habe (a. a. O., S. 1227). Bei der Unterkühlung von 115° bis —41·81° C. gibt die Masseneinheit des Schwefels die Wärme

$$\int_{-41{\cdot}81}^{115} C.dt$$

ab, wo C die specifische Wärme bedeutet. Nach den Messungen von Person ist die mittlere specifische Wärme des flüssigen Schwefels zwischen 119° und 147° C. gleich 0·2346. Wenden wir hier diese Zahl an, so erhalten wir die abgegebene Wärme gleich

$$0{\cdot}2346 \times 156{\cdot}81 = 36{\cdot}79 \text{ cal.}$$

Die latente Schmelzwärme des Schwefels ist nach Person gleich

$$\Lambda = 9{\cdot}368;$$

es ist also die abgegebene Wärme 3·927mal so gross als die Schmelzwärme. Nach unserer Anschauung von der Constitution einer unterkühlten Flüssigkeit muss demnach der unterkühlte Schwefel bei der Temperatur —41·81° C. schon längst in seinen kleinsten Theilchen vollkommen fest sein.

Um nun über den Zustand des unterkühlten Schwefels bei dieser Temperatur noch weiter Aufschluss zu erhalten, wollen wir die Frage erledigen, wie gross der Unterschied der Energien des festen und unterkühlten Schwefels bei dieser Temperatur ist. Erwärmen wir den natürlichen krystallisirten Schwefel, immer bei dem constanten Druck einer Atmosphäre, bis zum Schmelzpunkt, bringen wir ihn dann durch allmäliges Schmelzen in den Zustand des flüssigen Schwefels und kühlen wir ihn schliesslich bis —41·81° C. wieder ab, so wird die von Aussen

im Ganzen zugeführte Arbeit wegen des constanten Druckes gleich Null sein. Demnach ist der Energieunterschied lediglich gleich der gesammten von aussen zugeführten Wärme, also pro Masseneinheit gleich

$$A\int_{-41\cdot 81}^{115} c dt + A\Lambda - A\int_{-41\cdot 81}^{115} C dt = A\Lambda - A\int_{-41\cdot 81}^{115} (C-c) dt,$$

wo A das mechanische Äquivalent der Wärme und c die specifische Wärme des festen Schwefels bedeutet.

Für die specifische Wärme des festen Schwefels fanden Dulong und Petit die Zahl 0·188.

Regnault's frühere Versuche (mit geschmolzenem und erstarrtem Schwefel) lieferten 0·20259. Später erkannte derselbe den Einfluss der verschiedenen Zustände und besonders die Schwierigkeit, den Werth für den zwei- und eingliederigen Schwefel zu bekommen. Er erhielt für

eben vorher geschmolzenen Schwefel.......0·1844
geschmolzen, nach 2 Monaten.............0·1803
» » 2 Jahren..............0·1764
natürlich krystallisirten Schwefel..........0·1776 (0·1764).

Die Temperaturgrenzen waren 15° und 97° C.

Bunsen fand mit dem Eiscalorimeter 0·1712.

Person wählte für sein empirisches Gesetz

$$\Lambda = (C-c)(\tau + 160),$$

in welchem τ den Schmelzpunkt (115°) bedeutet, für c die Zahl 0·20259 und berechnete daraus

$$\Lambda = 0\cdot 03201 \times 275 = 8\cdot 803,$$

was der experimentell bestimmten Zahl 9·368 ziemlich nahe kommt. Hätte er aber die Regnault'schen Zahlen 0·1776 und 0·1764 oder den Bunsen'schen Werth 0·1712 benützt, so hätte er beziehungsweise die Zahlen 15·68, 16·00, 17·43 erhalten, welche mit dem experimentellen Ergebnisse entschieden nicht stimmen.

In dem Integral

$$\int_{-41\cdot 81}^{115} (C-c)\,dt$$

ist $C-c$ eine Function der Temperatur. Da uns diese Function nicht bekannt ist, so wollen wir $C-c$ vorläufig als constant annehmen und das Integral gleich

$$(C-c)(115+41\cdot 81) = (C-c)\times 156\cdot 81$$

setzen. Für $C = 0\cdot 2346$ und $c = 0\cdot 1776$, $0\cdot 1764$, $0\cdot 1712$ ergeben sich beziehungsweise die Werthe

$$8\cdot 938, \qquad 9\cdot 126, \qquad 9\cdot 942.$$

Vergleichen wir diese Zahlen mit dem experimentell gefundenen Werthe $\Lambda = 9\cdot 368$, so können wir sagen, dass bei der Temperatur —41·81° C. der Unterschied der Energien, nämlich

$$A\Lambda - A\int_{-41\cdot 81}^{115} (C-c)\,dt$$

entweder $= 0$ oder doch sehr klein ist. Wir erhalten also das folgende Resultat:

Wenn wir natürlichen krystallisirten Schwefel und unterkühlten flüssigen Schwefel bei dem constanten Druck einer Atmosphäre bis —41·81° C. abkühlen, so erhalten beide das gleiche specifische Volumen und entweder gleiche oder doch sehr nahe gleiche Werthe der Energie.

Man könnte in Folge dieses Ergebnisses versucht sein, anzunehmen, dass bei —41·81° C. die Zustände vollständig gleich sind, oder dass der flüssige Schwefel durch Unterkühlung bis —41·81° C. allmälig in den Zustand des natürlichen krystallisirten Schwefels gebracht werden kann. Wäre diese Annahme richtig, dann wäre es möglich, nachdem der flüssige Schwefel bei der Unterkühlung die Temperatur —41·81° C. erreicht hat, durch allmälige Wärmezufuhr die Zustände des festen natürlichen Schwefels bis zum Schmelzpunkt zu erhalten, kurz, es wäre ein vollständiger Kreisprocess möglich und es müsste die bekannte Gleichung

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

erfüllt sein. Diese Gleichung gibt aber

$$\Lambda = (273+115)\int_{-41\cdot 81}^{115} \frac{C-c}{273+t}\,dt.$$

Da nun die Gleichung

$$\Lambda = \int_{-41\cdot 81}^{115} (C-c)\,dt$$

entweder vollständig oder doch nahezu erfüllt ist, so müsste die Gleichung

$$\int_{-41\cdot 81}^{115} \frac{C-c}{273+115}\,dt = \int_{-41\cdot 81}^{115} \frac{C-c}{273+t}\,dt$$

entweder vollständig oder doch nahezu erfüllt sein, was nicht richtig ist.

Wir können also durch Unterkühlung nie die Zustände des natürlichen krystallisirten Schwefels erreichen, der aus dem flüssigen Schwefel durch die normale Erstarrung entsteht. Wird flüssiger Schwefel auf dem Wege der Unterkühlung fest, dann wird er amorph.

Ebenso wie den Schwefel könnte man auch andere Substanzen, wie Phosphor, Chlorcalcium, phosphorsaures Natron, unterschwefligsaures Natron etc. untersuchen, aber man erhält bei allen diesen Substanzen den Schnittpunkt der zwei erwähnten Curven bei Temperaturen, welche zwischen —100° und —200° C., also viel zu weit von jenen Temperaturintervallen liegen, in welchen die Ausdehnungsverhältnisse bestimmt worden sind. Aus diesem Grunde haben diese Temperaturzahlen gar keine Sicherheit. Auch beim Wasser ist es nicht möglich, aus den bekannten Ausdehnungsverhältnissen auf jene bei sehr tiefen Temperaturen zu schliessen.

X. SITZUNG VOM 12. APRIL 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1893) des 102. Bandes, Abtheilung III der Sitzungsberichte vor, womit nun der Druck dieses Bandes in allen drei Abtheilungen vollendet ist.

Das Präsidium der Mathematischen Gesellschaft an der kaiserl. Universität in Moskau spricht den Dank aus für die Begrüssung dieser Gesellschaft zu ihrer 25jährigen Gründungsfeier.

Das c. M. Herr Director Th. Fuchs in Wien übersendet eine Abhandlung: »Über eine fossile *Halimeda* aus dem eocänen Sandsteine von Greifenstein«.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt weitere Fortsetzungen seiner neuesten Mondarbeiten.

Das w. M. Prof. Sigm. Exner legt eine Abhandlung von Herrn A. Kiesel in Wiesbaden vor, betitelt: »Untersuchungen zur Physiologie des facettirten Auges«.

XI. SITZUNG VOM 19. APRIL 1894.

Herr Prof. Dr. Filippo Zamboni, Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Bezeichnung »Sterne«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine im anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Otto v. Aufschnaiter, betitelt: »Die Muskelhaut des menschlichen Magens«.

Das w. M. Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. Konrad Natterer: »Chemische Untersuchungen im östlichen Mittelmeer« (IV. Abhandlung) als ein Ergebniss der IV., während des Sommers 1893 im ägäischen Meer stattgefundenen Tiefsee-Expedition S. M. Schiffes »Pola« (Schlussbericht).

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben drei weitere Arbeiten aus seinem Laboratorium, und zwar:

1. »Über die Oxydation normaler fetter Säuren«, von Robert Margulies.
2. »Über eine Synthese von Chinolin«, von Dr. Victor Kulisch.
3. »Über elektrolytische Bestimmung der Halogene«, von Dr. G. Vortmann.

SITZUNGSBERICHTE

DER

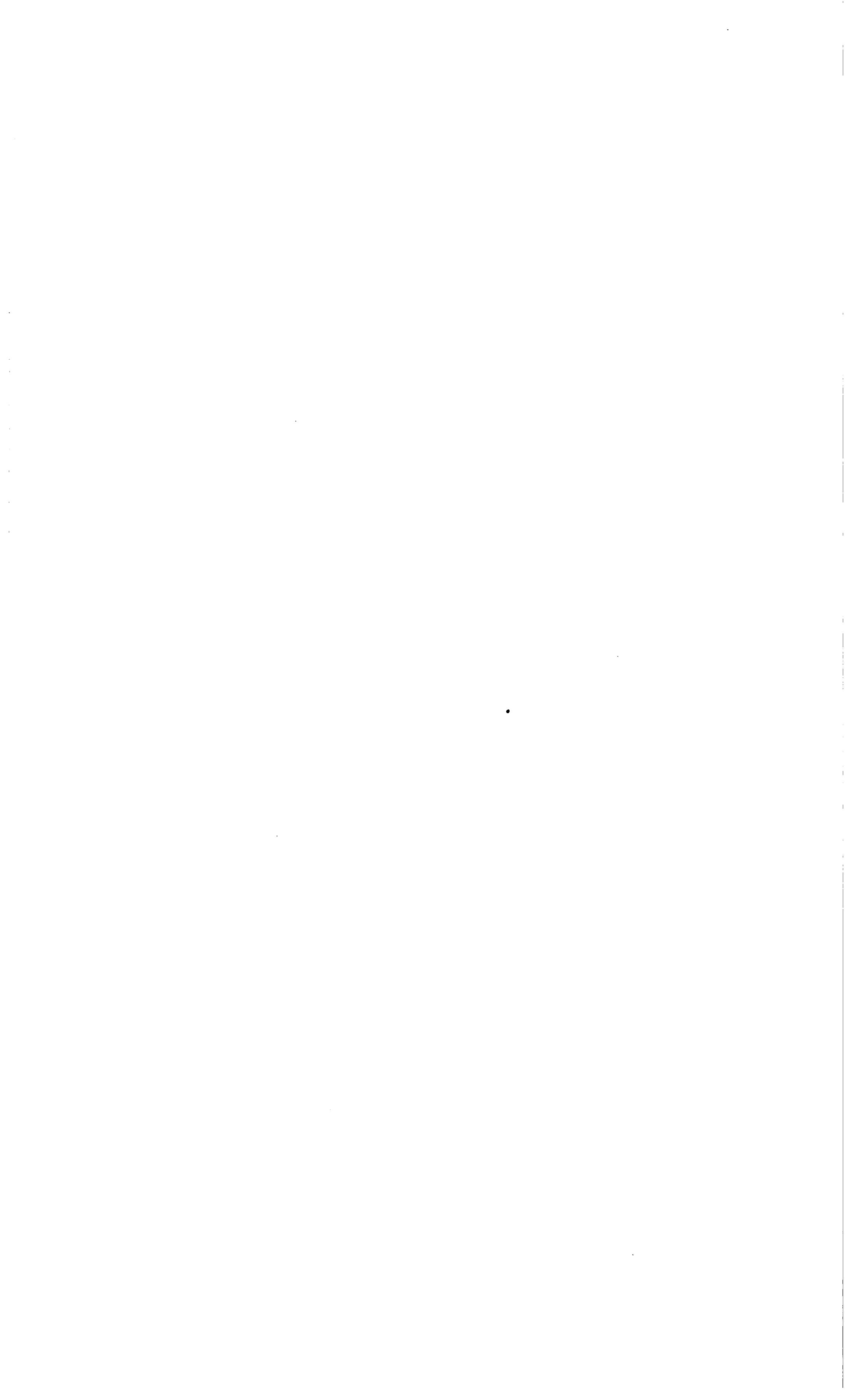
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XII. SITZUNG VOM 4. MAI 1894

Der Secretär legt das erschienene Heft III (März 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine Abhandlung von Prof. Dr. G. Jaumann in Prag: »Zur Kenntniss des Ablaufes der Lichtemission«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. F. Streintz: »Über die thermochemischen Vorgänge im Secundärelemente«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung: »Zur Theorie der Entwicklung der jetzigen Floren der Erde aus der Tertiärflora«.

Das c. M. Herr emerit. Prof. M. Willkomm übersendet zwei Arbeiten von Dr. Wilhelm Sigmund in Prag, betitelt:

1. »Einfluss des Magnetismus auf das Pflanzenwachsthum« (Vorläufige Mittheilung);
2. »Über die Wirkung gasförmiger, flüssiger und fester Körper auf die Keimung«.

Herr P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten, übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Folgerungen aus Amagat's Versuchen«.

Herr Max Jüllig, dipl. Ingenieur und Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Über die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes«.

Herr Alfred J. Ritter v. Dutczyński in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Beschreibung und Begründung einer Neuerung an Bremsen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht eine Mittheilung: »Über die Herkunft der die Chordascheide der Haie begrenzenden äusseren Elastica«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei von Herrn Professor Dr. Guido Goldschmiedt übersendete Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Über das Scoparin.« (II. Abhandlung), von G. Goldschmiedt und F. v. Hemmelmayr.
2. »Notiz über das Verhalten des Trimethylgallussauren Calciums bei der trockenen Destillation«, von stud. phil. Hugo Arnstein.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Synthese des Isochinolins und seiner Derivate« I., von Dr. C. Pomeranz.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung von Herrn Regierungsrath Director Dr. J. M. Eder und E. Valenta in Wien unter dem Titel: »Absorptionsspectren von farblosen und gefärbten Gläsern mit Berücksichtigung des Ultraviolett«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn F. Fleissner ausgeführte Arbeit: »Über den Einfluss verdünnter Salzsäure auf Chinabasen.«

XIII. SITZUNG VOM 10. MAI 1894.

Die Schriftleitung der 66. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zeigt an, dass diese Versammlung vom 24. bis 30. September l. J. in Wien tagen wird und laden die Mitglieder der kaiserlichen Akademie zur Theilnahme an derselben ein.

Herr Prof. Em. Czuber an der k. k. technischen Hochschule in Wien übersendet eine von dem verewigten w. M. Herrn Hofrath Prof. Emil Weyr entworfene und ihm vor dessen Ableben zur Ausfertigung übertragene Arbeit: »Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig in Wien übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz:

1. »Über die Einwirkung des Stickoxydes auf einige Metalle«, von Prof. F. Emich.
2. »Über Stickstoffverbindungen des Mangans«, von O. Prelinger.

Ferner übersendet Herr Hofrath Ludwig eine von den Herren Prof. Dr. J. Mauthner und Prof. Dr. W. Suida ausgeführte Arbeit: »Beiträge zur Kenntniss des Cholesterins (II. Abhandlung)«.

Herr Prof. Dr. G. Haberlandt in Graz übersendet »Anatomisch-physiologische Untersuchungen über das tropische Laubblatt. II. Über wassersecernirende und -absorbirende Organe«.

Herr Prof. Dr. R. v. Lendenfeld in Czernowitz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Eine neue *Pachastrella*«.

Der Secretär legt zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Karl Moser in Wien vor, welche folgende Aufschriften führen:

1. »Chemische Mittel zur Vertilgung der Reblaus und anderer schädlicher Insecten.«
2. »Selbstwirkender Sicherheitsbrems-Klotz bei minderem Kraftverbrauch.«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Einige Bemerkungen zum quadratischen Reciprocitätsgesetze«.

Der k. u. k. Linienschiffslieutenant Herr August Gratzl überreicht im Auftrage des k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums (Marine-Section) einen Bericht über die im Sommer 1892 auf dem französischen Transportavisodampfer »Manche« unter dem Commando des Linienschiffscapitäns Amédée Bienaymé unternommene Reise von Edinburgh nach Jan Mayen, Spitzbergen und Tromsö, welche den Besuch der ehemaligen österreichischen arktischen Beobachtungsstation im Wilczekthale auf Jan Mayen und die wissenschaftliche Erforschung eines Theiles von Spitzbergen zum Zwecke hatte.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Haberlandt G., Eine botanische Tropenreise, indo-malayische Vegetationsbilder und Reiseskizzen. (Mit 51 Abbildungen.) Leipzig, 1893; 8°.

— Über die Ernährung der Keimlinge und die Bedeutung des Endosperms bei viviparen Mangrovepflanzen. Leyden, 1893; 8°.

Einige Bemerkungen zum quadratischen Reciprocitätsgesetze

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Da

$$[2\alpha] = 2[\alpha] + \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

ist, je nachdem

$$\alpha - [\alpha] < \frac{1}{2}$$

ist oder nicht, so ist die durch das verallgemeinerte Gaussische Lemma definirte charakteristische Zahl (m, n) einer ganzen Zahl m in Bezug auf eine zu derselben theilerfremde ungerade Zahl n durch die Gleichung

$$(m, n) = \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left\{ \left[\frac{2xm}{n}\right] - 2\left[\frac{xm}{n}\right] \right\} \qquad \text{I.)}$$

gegeben, welche sofort zu der wiederholt benützten Relation

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2xm}{n}\right]} \qquad \text{II.)}$$

führt. Auf dieser Darstellung des Legendre-Jacobi'schen Symbols beruht u. A. der dritte Gaussische Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes für zwei ungerade Prim-

zahlen, welchen die Herren L. Kronecker[1] und E. Schering[2] wesentlich vereinfachten, indem sie auf dem Gaussischen Gedankengange fussend, in verschiedener Weise zeigten, dass das Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$ durch das interessante Kronecker'sche Vorzeichenproduct darstellbar ist. Die Factoren dieses, sowie mehrerer anderer von mir[3] zum Beweise des Reciprocitätsgesetzes benutzten Producte sind alternirende Functionen der ganzen Zahlen m und n, wesshalb die aus ihnen gebildeten Ausdrücke unmittelbar die Reciprocitätseigenschaft des Symbols erkennen lassen; man kann aber auch durch Benützung von Zeichenproducten, welche die erwähnte Eigenschaft nicht besitzen, auf einem nicht minder einfachen Wege zum Fundamentaltheorem in der Theorie der quadratischen Reste gelangen, was meines Wissens bisher noch nicht gezeigt wurde.

Der oben angeführte Ausdruck für das Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$ führt nun ungemein leicht zu einem derartigen Beweise, welcher zunächst in den folgenden Zeilen mitgetheilt werden soll; hierauf werden aus der im Anfange angegebenen Darstellung der charakteristischen Zahl zwei von Herrn E. Schering in seiner im ersten Bande der Acta mathematica enthaltenen bemerkenswerthen Abhandlung »Zur Theorie der quadratischen Reste« aufgestellte Theoreme, welche von Herrn H. Schmidt bei seinem dritten Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes[4] neuerdings abgeleitet wurden, in sehr einfacher Weise erschlossen.

---

1 »Über den dritten Gaussischen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste«. Sitzungsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884. — »Bemerkung zu Herrn Ernst Schering's Mittheilung«. A. e. a. O., 1885.

2 »Über den dritten Gaussischen Beweis des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste«. A. e. a. O., 1885

3 »Über das quadratische Reciprocitätsgesetz«. Diese Sitzungsberichte, 90. Band. — »Über das Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$«. A. e. a. O., 92. Band.

4 »Drei neue Beweise des Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der quadratischen Reste«. Journal für die reine und angewandte Mathematik von L. Fuchs, 112. Band.

Zum Schlusse wird ein von Herrn J. Schröder[1] im vierten Hefte des dritten Bandes der Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg bewiesener arithmetischer Satz durch ein äusserst einfaches Verfahren abgeleitet und vervollständigt.

1. Beachtet man, dass

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2xm}{n}\right] = \sum_{x,\,y=1}^{x=\frac{n-1}{2},\; y=m-1} \varepsilon\left(\frac{2xm}{yn}\right)$$

und demnach gleich der Anzahl der ganzzahligen positiven Werthepaare x, y ist, für welche $yn-2xm$ negativ wird, so kann man die Relation II auch in folgender Gestalt schreiben

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \text{sign.} \prod_{x,y} \left(\frac{y}{m} - \frac{2x}{n}\right) \qquad \text{III.)}$$
$$\left(x = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2};\; y = 1, 2, \ldots, m-1\right)$$

oder auch, falls m, wie in den folgenden Entwicklungen vorausgesetzt wird, ungerade ist

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \text{sign.} \prod_{x,y} \left(\frac{2x}{n} - \frac{y}{m}\right) \qquad \text{IV.)}$$
$$\left(x = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2};\; y = 1, 2, \ldots, m-1\right),$$

da in diesem Falle die Anzahl der Factoren des auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Productes gerade ist.

Die letzte Gleichung liefert, wie hier nebenbei bemerkt werden mag, unmittelbar die von Herrn E. Lucas[2] für zwei ungerade Primzahlen und von mir[3] allgemein bewiesene Relation

---

[1] »Einige Sätze über Theileranzahlen, sowie einige Anwendungen der Geometrie auf die Zahlentheorie«.

[2] »Sur la loi de réciprocité des residus quadratiques«. Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Nouvelle série, t. I, 1890.

[3] »Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol«. Diese Sitzungsberichte, 100. Band.

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\sum\limits_{y=1}^{y=m-1}\left[\frac{yn}{2m}\right]}.$$

Schreibt man die Formel IV.) in der Gestalt

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \text{sign.} \prod_{x,y} \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y}{m}\right)\left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}\right)$$

$$\left(x = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2};\ y = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)$$

$$= \text{sign.} \prod_{x,y} \left(\frac{x}{n} - \frac{2y}{m}\right). \qquad \text{V.)}$$

$$. \text{ sign.} \prod_{\xi,y} \left(\frac{2\xi}{n} - \frac{2y-1}{m}\right)\left(\frac{2\xi-1}{n} - \frac{2y}{m}\right)$$

$$\left(x = 1, 2, \ldots, n-1;\ \xi = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2};\ y = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right),$$

so ergibt sich aus derselben nach III.) sofort die Relation

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right) \text{sign.} \prod_{x,y} \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}\right)\left(\frac{2x-1}{n} - \frac{2y}{m}\right)$$

$$\left(x = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2};\ y = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)$$

durch welche das quadratische Reciprocitätsgesetz ausgesprochen wird.

Berücksichtigt man, dass die eine der zwei Differenzen

$$\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}, \qquad \frac{2x-1}{n} - \frac{2y}{m}$$

in das Negative der anderen übergeht, wenn man $2x$, $2y-1$ durch $n-(2x-1)$, $m-2y$, beziehungsweise $2x-1$, $2y$ durch $n-2x$, $m-(2y-1)$ ersetzt, so erkennt man, dass

$$\text{sign.} \prod_{x,y} \left(\frac{2x}{n} - \frac{2y-1}{m}\right)\left(\frac{2x-1}{n} - \frac{2y}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}$$

$$\left(x = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2};\ y = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)$$

ist, wodurch die Reciprocitätsgleichung in die gewöhnliche Form übergeführt wird.

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar die Relation

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{xm}{n}+\frac{1}{2}\right] \equiv \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{2m}\right] \pmod{2},$$

welche wegen der bekannten Formel

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{xm}{n}+\frac{1}{2}\right] \equiv 0 \pmod{2}$$

zu der von Herrn Busche[1] ohne Beweis mitgetheilten und von den Herren A. Stern[2] und L. Kronecker[3] bewiesenen Beziehung

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{2m}\right] \equiv \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} \pmod{2}$$

führt.

Schreibt man in dem auf der rechten Seite des ersten Theiles der Doppelgleichung V.) vorkommenden Ausdrucke $\frac{2x}{n}-\frac{2y}{m}$ für $2x:n-(2x-1)$ und für $2y:m-(2y-1)$, so entsteht die Beziehung

$$\text{VI.)}\quad \left(\frac{m}{n}\right) = \operatorname{sign.} \prod_{x,y} \left(\frac{2y-1}{m}-\frac{2x-1}{n}\right)\left(\frac{2x}{n}-\frac{2y-1}{m}\right)$$
$$\left(x=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2};\; y=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}\right),$$

---

[1] Festschrift, herausgegeben von der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Leipzig, 1890.

[2] »Zur Theorie der Function *Ex*«. Journal für die reine und angewandte Mathematik von Kronecker, 106. Band.

[3] »Bemerkungen über die von Gauss mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x«. A. e. a. O.

welche zeigt, dass

$$\text{sign.}\prod_{x,y}\left(\frac{x}{n}-\frac{y}{m}\right)\left(\frac{2y-1}{m}-\frac{2x-1}{n}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}$$

$$\left(x=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2};\ y=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}\right),$$

oder also

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xn}{m}\right]\equiv\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}+\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(2x-1)n}{2m}+\frac{1}{2}\right]\ (\text{mod. } 2)$$

ist, welche Relation einen neuerlichen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes enthält.

Wird die Gleichung VI.) in der Gestalt

$$\left(\frac{m}{n}\right)=\text{sign.}\prod_{x,y}\left(\frac{y}{m}-\frac{2x-1}{n}\right).\text{sign.}\prod_{x,y}\left(\frac{2\eta}{m}-\frac{2x-1}{n}\right)\left(\frac{2x}{n}-\frac{2\eta-1}{m}\right)$$

$$\left(x=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2};\ \eta=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2};\ y=1,2,\ldots,m-1\right)$$

geschrieben, so ersieht man unmittelbar, dass

$$\left(\frac{m}{n}\right)=\text{sign.}\prod_{x,y}\left(\frac{y}{m}-\frac{2x-1}{n}\right)\quad\left(y=1,2,\ldots,m-1;\ x=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}\right)$$

$$=\text{sign.}\prod_{x,y}\left(\frac{2x-1}{n}-\frac{y}{m}\right)\quad\left(x=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2};\ y=1,2,\ldots,m-1\right)$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(2x-1)n}{m}\right]}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{x=m-1}\left[\frac{xn}{2m}+\frac{1}{2}\right]}$$

ist, welche Relationen auf einem dem oben eingeschlagenen analogen Wege zum Fundamentaltheoreme der Theorie der quadratischen Reste führen würden.

Die letzten Entwicklungen zeigen deutlich den innigen Zusammenhang, welcher zwischen einer Reihe von bekannten Darstellungen des Legendre-Jacobi'schen Symbols besteht.

2. Vereinigt man alle Glieder des auf der rechten Seite der Gleichung I.) stehenden Ausdruckes, in denen der grösste gemeinsame Theiler von x und n gleich δ ist, so ist deren Summe offenbar gleich

$$(m, \delta')' = \sum_{\lambda} \left\{ \left[\frac{2 r_\lambda m}{\delta'}\right] - 2 \left[\frac{r_\lambda m}{\delta'}\right] \right\},$$

wo

$$\delta\delta' = n$$

und die Summation nach r_λ über alle dem Intervalle $1 \ldots \frac{\delta'}{2}$ angehörigen, zu δ' theilerfremden ganzen Zahlen auszudehnen ist. Die Relation I verwandelt sich daher sofort in die folgende von den Herren Schering und Schmidt ermittelte Beziehung

$$(m, n) = \sum_{\delta} (m, \delta)',$$

in welcher die Summation nach δ über alle die Einheit übersteigenden Theiler von n zu erstrecken ist, da x in I.) $\frac{n}{2}$ nicht überschreiten kann.

Bei ungeradem δ' folgt aus der Gleichung

$$2 r_\lambda m = \delta' \left[\frac{2 r_\lambda m}{\delta'}\right] + \varepsilon_\lambda \qquad (0 \leqq \varepsilon_\lambda < \delta'),$$

dass für ein gerades $\left[\frac{2 r_\lambda m}{\delta'}\right]$ die Beziehung

$$\varepsilon_\lambda = 2 r_\mu$$

stattfindet, während bei einem ungeraden $\left[\frac{2r_\lambda m}{\delta'}\right]$

$$\delta' - \varepsilon_\lambda = 2r_\mu$$

ist, so dass also allgemein

$$2r_\lambda m \equiv (-1)^{\left[\frac{2r_\lambda m}{\delta'}\right]} 2r_\mu \quad (\text{mod. } \delta') \qquad \text{VII.)}$$

wird. Da aus der Verbindung dieser mit der Congruenz

$$2r_\sigma m \equiv (-1)^{\left[\frac{2r_\sigma m}{\delta'}\right]} 2r_\mu \quad (\text{mod. } \delta')$$

sich die absurde Congruenz

$$r_\lambda \pm r_\sigma \equiv 0 \quad (\text{mod. } \delta')$$

ergeben würde, so folgt aus VII.) die Beziehung

$$m^{\frac{\varphi(\delta')}{2}} \equiv (-1)^{\sum\limits_\lambda \left[\frac{2r_\lambda m}{\delta'}\right]} \quad (\text{mod. } \delta')$$

und daher nach dem verallgemeinerten Fermat'schen Satze einerseits für ein mindestens zwei Primtheiler besitzendes δ'

$$\sum_\lambda \left[\frac{2r_\lambda m}{\delta'}\right] \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

anderseits für jeden ganzzahligen positiven Werth von α

$$\sum_\lambda \left[\frac{2r'_\lambda m}{p^\alpha}\right] \equiv \sum_\mu \left[\frac{2r_\mu m}{p}\right] \quad (\text{mod. } 2),$$

wenn p eine Primzahl ist und die Zahlen r'_λ, r_μ alle durch p nicht theilbaren ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots \frac{p^\alpha}{2}$, beziehungsweise $1 \ldots \frac{p}{2}$ durchlaufen.

Es ist demnach die charakteristische Zahl (m, n) nach dem Modul 2 der Anzahl derjenigen Primtheiler von n congruent, welche bei der Darstellung von n durch ein Product von Prim-

zahlpotenzen mit einem ungeraden Exponenten versehen sind und von denen überdies m quadratischer Nichtrest ist. Dies ist im Wesentlichen der zweite von den oben erwähnten Schering-Schmidt'schen Sätzen.

3. Herr J. Schröder hat in dem anfänglich citirten Aufsatze folgenden Satz durch Specialisirung aus einem allgemeineren Theoreme gewonnen.

Bezeichnet $\psi_{\nu r+s}(a, b)$ die Anzahl derjenigen Theiler von a, welche grösser als b sind und einen complementären Divisor der Form $\nu r+s$ besitzen, ist ferner $\chi\left(\frac{n-\lambda r}{s}\right)$ die Anzahl derjenigen ganzzahligen nicht negativen Werthe von λ, für welche $\frac{n-\lambda r}{s}$ eine positive ganze Zahl ist, so besteht die Relation

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=\left[\frac{n}{r}\right]} \psi_{\nu r+s}(n-r\rho, \rho) = \chi\left(\frac{n-\lambda r}{s}\right).$$

Dieser Satz lässt sich ungemein einfach erhärten. Die Function $\psi_{r\nu+s}(n-r\rho, \rho)$ kann nach ihrer Definition auch als die Anzahl derjenigen ρ überschreitenden ganzen Zahlen t aufgefasst werden, welche die Gleichung

$$n = r(\nu t+\rho)+ts$$

befriedigen; die auf der linken Seite der Schröder'schen Relation stehende Summe ist demnach die Anzahl derjenigen Zerlegungen von n in die zwei Elemente r und s, bei denen der Coëfficient von s von Null verschieden ist oder also gleich der Gesammtanzahl der Zerlegungen von $n-t$ in die genannten Elemente. Dieselbe ist aber nach einem bekannten Satze aus den Elementen der Zahlentheorie gleich $\left[\frac{n}{rs}-\frac{1}{r}\right]+\eta$, wo η den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem $n-s-rs\left[\frac{n}{rs}-\frac{1}{r}\right]$ aus den Zahlen r und s additiv erzeugt werden kann, oder nicht. Man hat daher unmittelbar die Gleichung

$$\sum_{r=0}^{\rho=\left[\frac{n}{r}\right]} \psi_{r\nu+s}(n-r\rho, \rho) = \left[\frac{n}{rs} - \frac{1}{r}\right] + \eta.$$

Die von Herrn Schröder angeführten speciellen Fälle $s = 1$, $r = s = 1$, $r = 1$, welche er auch auf geometrischem Wege beweist, und deren zweiter schon vordem von Herrn Lerch ermittelt wurde, ergeben sich unmittelbar aus dieser Formel, da in diesen Fällen offenbar $\eta = 1$ ist.

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

von

Prof. **Emanuel Czuber.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. April 1894.)

Die folgenden Mittheilungen suchen die Anwendung eines neuen Begriffes in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, zunächst zwischen drei Variabeln, zu zeigen, der sich aus naturgemässer Fortentwicklung eines Gedankens ergibt, welchen wir in einer früheren Abhandlung [1] für gewöhnliche Differentialgleichungen ausgeführt haben, und geeignet scheint, die Anschaulichkeit der geometrischen Interpretation oben genannter Gleichungen zu fördern. Es handelt sich um Folgendes. Einem von zwei wesentlichen Parametern abhängigen System von Flächen ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zugeordnet; wenn man in dieser die Differentialquotienten p, q als Parameter auffasst, so stellt sie wieder ein System von ∞^2 Flächen dar, welches wir das abgeleitete System des ersten nennen. Der Zusammenhang beider Systeme soll nun in zweifacher Richtung verwerthet werden. Im ersten Abschnitte wird nach allgemeinen Bemerkungen ein Gedankengang skizzirt, welcher zeigt, wie man mit Hilfe jenes Begriffes die vollständigen von Darboux [2] gefundenen Bedingungen gewinnen kann, denen die singuläre Lösung einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung zu

[1] Über Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen. Diese Sitzungsber., Bd. 102, Abth. II. a.

[2] Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mém. prés. par div. savants à l'Acad. des sciences, t. XXVII. 2me sér.

genügen hat. Der zweite Abschnitt befasst sich mit der Anwendung des Begriffes des abgeleiteten Systems auf die Behandlung gewisser Formen partieller Differentialgleichungen.

Übrigens lassen sich die nachfolgenden Betrachtungen und ihre Resultate unter Benützung des Sprachgebrauches, wie er für den mehrdimensionalen Raum ausgebildet worden ist, ohne Schwierigkeit auf partielle Differentialgleichungen mit beliebig vielen Variabeln ausdehnen.

I.

1. Durch die Gleichung

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1}$$

worin a, b unabhängige veränderliche Parameter bedeuten, sind ∞^4 Elemente[1] des Raumes R_3 bestimmt, deren Coordinaten x, y, z, p, q der Gleichung genügen, welche aus (1) und den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q = 0$$

mittelst Elimination von a, b erhalten wird und heissen möge

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{2}$$

Die beiden Darstellungen, welche diesen ∞^4 Elementen durch die Gleichung (1) einerseits und die Gleichung (2) anderseits gegeben sind, unterscheiden sich wesentlich von einander, und zwar in folgender Weise.

In (1) sind je ∞^2 Träger[2] x, y, z zu einer Fläche, die durch ein festes Werthepaar a, b charakterisirt ist, derart zusammengefasst, dass die zugehörigen Elemente eine Elementmannigfaltigkeit bilden, d. h. dass jede zwei benachbarte Elemente vereinigt liegen, oder der Pfaff'schen Gleichung

$$dz - pdx - qdy = 0 \tag{3}$$

genügen.

---

[1] Für diesen und andere im Folgenden angewandte Begriffe vergl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. II, Kap. 4.

[2] Wir bezeichnen den Punkt x, y, z als den Träger, p, q als die Stellungscoëfficienten des Elementes x, y, z, p, q.

In (2) sind je ∞^2 Träger x, y, z zu einer Fläche, die durch ein festes Werthepaar p, q charakterisirt ist, derart verbunden, dass die zugehörigen Elemente parallel liegen.

Der Übergang von der ersten Anordnung zur zweiten erfordert analytisch Differentiations- und Eliminationsprocesse; geometrisch wird, wenn die Anordnung (1) gegeben ist, ein Individuum des Flächensystems (2) erhalten, indem man an die Flächen des Systems (1) alle möglichen Tangentialebenen einer bestimmten Stellung p, q legt; ihre Berührungspunkte haben als Ort eine einzelne Fläche von (2).

Der Übergang von der zweiten als gegeben vorausgesetzten Anordnung zur ersten wird als Integration der Differentialgleichung (2), die Gleichung (1) im Sinne von Lagrange als ein vollständiges Integral von (2) bezeichnet; allgemein gefasst, geht das Problem der Integration dahin, aus der durch die Gleichung (2) gegebenen Schaar von ∞^4 Elementen alle Elementmannigfaltigkeiten zweifach unendlicher Ausdehnung zu finden; der Ort der Träger einer solchen Mannigfaltigkeit wird eine Integralfläche genannt.

In den folgenden Betrachtungen wollen wir den Zusammenhang der beiden Flächensysteme (1) und (2) kurz dadurch ausdrücken, dass wir das System (1) als das ursprüngliche, (2) als das abgeleitete bezeichnen.

Um ein einfaches Beispiel anzuführen, sei das ursprüngliche System jene Schaar von Kugeln, welche über den zur z-Axe parallelen Sehnen einer gegebenen Kugel vom Radius r und dem Mittelpunkte O als Durchmessern beschrieben werden; ihre Gleichung ist

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2 = r^2-a^2-b^2;$$

eliminirt man zwischen dieser und den beiden Gleichungen

$$x-a+pz = 0$$

$$y-b+qz = 0$$

die Parameter a, b, so erhält man als Gleichung des abgeleiteten Systems

$$x^2+y^2+(1+2p^2+2q^2)z^2+2pxz+2qyz = r^2;$$

es ist dies ein System von concentrischen Ellipsoiden, welche den Kreis $z = 0$, $x^2+y^2 = r^2$ gemein haben.

2. Durch einen Punkt x, y, z von R_3 gehen ∞^1 Flächen des Systems (1), ihre Tangentialebenen in dem gedachten Punkte hüllen einen Kegel (T) ein und bestimmen mit dem Punkte zusammen jene ∞^1 Elemente, welche ihn zum gemeinsamen Träger haben.

Durch denselben Punkt gehen aber auch ∞^1 Flächen des Systems (2) und die eben erwähnten Tangentialebenen vermitteln eine im Allgemeinen eindeutige Zuordnung der Flächen aus (1) und (2).

Einer Ebene E, deren Stellungscoëfficienten p, q sein mögen, entspricht eine bestimmte Fläche aus dem System (2); der Schnitt beider ist eine Curve (C), der Ort der Träger aller Elemente, deren gemeinsame Ebene E ist, mit anderen Worten gesagt, der Ort der Berührungspunkte aller die Ebene E tangirenden Integralflächen der Differentialgleichung (2).

Man kann diesen Zusammenhang auch in folgender Weise ausdrücken. Jeder Fläche des Systems (2) ist eine Stellung p, q im Raume R_3 zugeordnet, und jede Ebene dieser Stellung schneidet die Fläche im Allgemeinen nach einer Curve (C), dem Ort der Berührungspunkte aller die Ebene tangirenden Integralflächen. Geschieht es, dass die Ebene die ihr zugeordnete Fläche berührt, so reducirt sich die Curve (C) auf einen Punkt; wir werden später gerade auf diesen Fall zurückzuweisen haben.

3. Existirt eine Fläche

$$\Sigma(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

von solcher Art, dass durch jeden ihrer Punkte eine Fläche des Systems (1) geht, welche mit ihr daselbst gemeinsame Tangentialebene hat, so soll die Fläche Σ als Einhüllende des Systems (1) definirt werden.

Man kann (4) aus (1) hervorgehen lassen, indem man hier für a, b passend gewählte Functionen von x, y, z einträgt; welchen Bedingungen diese zu genügen haben, ergibt sich aus der eben aufgestellten Definition von Σ. Ist nämlich x, y, z ein Punkt von Σ, und $V(a, b) = 0$ die durch ihn gehende Fläche

des Systems (1) von der in der Definition bezeichneten Art, so muss ihre Tangentialebene

$$(\xi-x)\frac{\partial V}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial V}{\partial y}+(\zeta-z)\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

zusammenfallen mit der Tangentialebene an Σ, deren Gleichung lautet

$$(\xi-x)\left[\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}\right]+(\eta-y)\left[\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}\right]+$$

$$+(\zeta-z)\left[\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z}\right]=0;$$

dazu ist nothwendig, dass

$$\frac{\partial V}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b}=0 \tag{5}$$

und diese Bedingungen müssen für alle Punkte von Σ erfüllt sein; durch sie werden also a, b als Functionen von x, y, z derart bestimmt, dass sie (1) in (4) verwandeln.

4. Wir beweisen nun den Satz: Besitzt das ursprüngliche System (1) eine Einhüllende, so ist dieselbe zugleich Einhüllende des abgeleiteten Systems (2).

Es sei Σ die Einhüllende von (1); man wähle auf ihr drei unendlich benachbarte Punkte $M(x, y, z)$, $M_1(x+d_1x, \ldots)$, $M_2(x+d_2x, \ldots)$, jedoch so, dass

$$\begin{vmatrix} d_1x & d_1y \\ d_2x & d_2y \end{vmatrix} \lesseqgtr 0;$$

dann bestimmen diese Punkte eine Ebene, die Tangentialebene an Σ in den genannten Punkten, zugleich Tangentialebene an diejenigen Flächen des Systems (1), welche Σ in den Punkten M, M_1, M_2 berühren; nennt man p, q die Stellungscoëfficienten dieser Ebene, so sind M, M_1, M_2 zugleich drei unendlich benachbarte Punkte der durch p, q charakterisirten Fläche des Systems (2), folglich hat auch diese Fläche an der betrachteten Stelle mit Σ eine gemeinsame Tangentialebene und daher ist Σ auch Einhüllende des Systems (2).

In dem Beispiele am Schlusse des Art. 1 war das ursprüngliche System eine Schaar von ∞^2 Kugeln, das abgeleitete eine Schaar von ∞^2 concentrischen Ellipsoiden; beide Systeme werden durch das Rotationsellipsoid

$$x^2+y^2+2z^2 = 2r^2$$

eingehüllt.

5. Dem Satze in Art. 4 steht der folgende gegenüber: Hat das abgeleitete System (2) eine Einhüllende, so ist diese im Allgemeinen nicht zugleich Einhüllende des ursprünglichen Systems (1).

Es sei Σ' die Einhüllende des Systems (2); man wähle auf ihr einen Punkt $M(x, y, z)$ und bestimme die Tangentialebene, deren Stellungscoëfficienten mit P, Q bezeichnet seien. Durch den Punkt M gehen ∞^1 Flächen des Systems (1) und die Stellungscoëfficienten ihrer Tangentialebenen daselbst erfüllen die Gleichung (2); von P, Q wird diese Gleichung im Allgemeinen nicht erfüllt, daher hat keine der Flächen aus (1) mit Σ' eine gemeinschaftliche Tangentialebene, infolge dessen ist Σ' nicht auch Einhüllende des Systems (1).

Nur wenn die Function F gewissen Bedingungen, die nun entwickelt werden sollen, genügt, ist der Satz 4 auch in seiner Umkehrung richtig. Die Gleichung von Σ' geht dem Art. 3 zufolge aus

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2}$$

hervor, wenn man p, q durch jene Ausdrücke in x, y, z ersetzt, welche sich dafür aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \tag{6}$$

ergeben; nachdem dies geschehen, erhält man für P, Q die Werthe

$$P = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad Q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

nur wenn diese die Gleichung (2) befriedigen, ist Σ' auch Einhüllende des Systems (1); mit anderen Worten, die aus (6)

für p, q hervorgehenden Bestimmungen müssen mit P, Q zusammenfallen, oder es muss

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

sein.

Man kann das Ergebniss in dem Satze aussprechen: Soll das abgeleitete System eine Einhüllende haben und soll diese auch das ursprüngliche System einhüllen, so muss F eine solche Function der fünf Variabeln x, y, z, p, q sein, dass es Werthe dieser Variabeln gibt, welche den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

zugleich genügen; diese Werthe bestimmen die Elementmannigfaltigkeit, welche die gemeinsame Einhüllende darstellt.

Damit sind die vollständigen Bedingungen für die Existenz einer singulären Lösung der Differentialgleichung (2) gefunden.

6. Aus dem Satze zu Beginn des vorigen Artikels, dass nämlich die Einhüllende des abgeleiten Systems, wenn eine solche existirt, im Allgemeinen nicht auch Einhüllende des ursprünglichen Systems ist, folgt, dass eine vorgelegte Differentialgleichung im Allgemeinen ein singuläres Integral nicht besitzt. Darboux hat hiefür einen analytischen Beweis gegeben, indem er zeigt, dass die Gleichungen (8), obwohl sie nicht unabhängig von einander sind, da sie sich aus Differentialquotienten einer und derselben Function zusammensetzen, doch im Allgemeinen nicht zugleich bestehen können. Hat nämlich die Differentialgleichung statt der auf Null reducirten die Form

$$F(x, y, z, p, q) = c, \tag{9}$$

wobei c zunächst eine Constante bedeutet, und bestimmt man aus ihr und den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \tag{10}$$

z, p, q als Functionen von x, y und c, so müssen durch diese Ausdrücke, wenn die Gleichung (9) ein singuläres Integral haben soll, die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

identisch erfüllt werden. Denkt man sich jetzt unter c eine beliebige Function von x, y, z, so erfahren die Gleichungen (10) keine Änderung und die Ausdrücke für z, p, q, die aus (9) und (10) jetzt gezogen werden, bleiben ebenso zusammengesetzt aus x, y, c wie vordem; dagegen wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x} + p\frac{\partial c}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y} + q\frac{\partial c}{\partial z}$$

und es müssten also die Gleichungen

$$\frac{\partial c}{\partial x} + p\frac{\partial c}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} + q\frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

identisch erfüllt sein, wie man auch c als Function von x, y, z festsetzen möge. Aus der Ungereimtheit dieses Ergebnisses ist zu schliessen, dass (9), (10) und (11) im Allgemeinen nicht nebeneinander bestehen können.

7. Wir geben nachstehend noch eine zweite neue Ableitung der Bedingungsgleichungen (8), welche von einem anderen Gesichtspunkte ausgeht.

So lange man unter p, q die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ versteht, stellt die Gleichung (2) dasselbe System von ∞^4 Elementen dar, wie die Gleichung (1), aus welcher sie in der in Art. 1 beschriebenen Weise hervorgegangen ist. Betrachtet man dagegen p, q als veränderliche Parameter, so ist durch die Gleichung (2) ein anderes System von ∞^4 Elementen bestimmt, und die Coordinaten $x, y, z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ jedes dieser Elemente erfüllen die Gleichung, welche man erhält durch Elimination von p, q zwischen

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2}$$

und den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathfrak{p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathfrak{q} = 0. \tag{12}$$

Es kann nun die Frage aufgeworfen werden, ob es zwischen den beiden Elementensystemen, welche die Gleichung (2) in dieser zweifachen Auffassung darstellt, gemeinsame Elemente gibt. Da für solche Elemente $\mathfrak{p} = p$ und $\mathfrak{q} = q$ sein muss, so hat man zu ihrer Bestimmung die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}p = 0, \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}q = 0. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Weil sich hieraus z, p, q als Functionen der unabhängig verbleibenden Variabeln x, y ergeben, so gibt es der gemeinsamen Elemente ∞^2, der Ort ihrer Träger x, y, z ist eine Fläche, deren Gleichung durch Elimination von p, q zwischen den drei Gleichungen (13) erhalten wird.

Diese Fläche ist aber eine Integralfläche der Differentialgleichung (2) nur dann, wenn die durch (13) repräsentirten Elemente eine Elementmannigfaltigkeit bilden, d. h. wenn sie die genannte Fläche berühren. Nun kann diese Fläche durch die erste der Gleichungen (13) dargestellt werden, wenn man darin p, q durch die Ausdrücke in x, y, z ersetzt sich denkt, welche die beiden letzten Gleichungen liefern; die Stellungscoëfficienten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ ihrer Tangentialebene im Punkte x, y, z ergeben sich unter diesem Gesichtspunkte aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \left\{\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}\right\}\mathfrak{P} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} + \left\{\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}\right\}\mathfrak{Q} = 0;$$

die hieraus gerechneten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ sollen mit den für den nämlichen Punkt x, y, z aus (13) resultirenden Werthen p, q übereinstimmen, also $\mathfrak{P} = p$, $\mathfrak{Q} = q$ sein; führt man dies ein, so reduciren sich die letzten Gleichungen vermöge (13) auf

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial z}p\right)+\frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial z}p\right)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}q\right)+\frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial z}q\right)=0$$

und diese werden identisch erfüllt nur dann, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial p}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q}=0. \tag{14}$$

Die gemeinsamen Elemente der beiden durch die Gleichung (2) in ihrer doppelten Auffassung dargestellten Systeme von ∞^4 Elementen, durch die Gleichungen (13) bestimmt, bilden nur dann eine Elementmannigfaltigkeit, wenn sie auch den Gleichungen (14) genügen. Diese Gleichungen besagen aber nichts anderes, als dass die Träger dieser Elemente auf der Einhüllenden des abgeleiteten Systems liegen müssen.

Man hätte zu den gemeinsamen Elementen der beiden Systeme auch durch folgende Betrachtung gelangen können. Zu der Fläche

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

des abgeleiteten Systems gehört eine Schaar paralleler Ebenen

$$px+qy-z=M,$$

deren jede die ihr zugeordnete Curve (C) auf dieser Fläche hat. Die Curve reducirt sich auf einen Punkt, wenn Ebene und Fläche einander berühren, und augenscheinlich stellt eine solche Ebene mit ihrem Berührungspunkte ein beiden Systemen gemeinsames Element dar; dies tritt nun ein, wenn die Stellungscoëfficienten der Tangentialebene an die Fläche, d. i.

$$-\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial z}, \qquad -\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}$$

mit den Stellungscoëfficienten der Ebenenschaar übereinstimmen, wenn also

$$p=-\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial z}, \qquad q=-\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0$$

in Übereinstimmung mit (13).

II.

8. Wir eröffnen die Reihe der besonderen Formen von Differentialgleichungen, an welchen der eben entwickelte Gedankengang zur Anwendung gebracht werden soll, mit der Gleichung

$$F(p, q) = 0. \tag{15}$$

In dem vorliegenden Falle existirt ein abgeleitetes Flächensystem nicht; durch jeden Punkt von R_3 gehen ∞^1 Ebenen, deren Stellungscoëfficienten die Gleichung (15) befriedigen und jeder Punkt einer solchen Ebene in Verbindung mit ihr selbst bildet ein Element der Gleichung; letztere definirt also wie die allgemeine Gleichung (2) ∞^4 Elemente, nämlich ∞^1 Stellungen, zu jeder ∞^1 Ebenen, in jeder Ebene ∞^2 Elemente. Die Kegel (T), zu den einzelnen Punkten von R_3 gehörig, sind gleich und gleichliegend. Aus alledem folgt, dass das durch (15) bestimmte Elementensystem allen Translationen von R_3 gegenüber invariant bleibt; wenn daher $V(x, y, z) = 0$ irgend ein Integral dieser Gleichung ist, so ist auch

$$V(x-a, y-b, z-c) = 0 \tag{16}$$

ein solches, wobei a, b, c willkürliche Constanten bedeuten. Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass die vorliegende Gleichung ein singuläres Integral nicht besitzt, denn die Gruppe der Translationen des Raumes hat keine Invariante.

Man kann das System der Elemente construiren, indem man den Kegel der Strahlen

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{-1}$$

bestimmt — seine Gleichung ist

$$F\left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}\right) = 0$$

— und zu jeder seiner Erzeugenden das System normaler Ebenen legt. Ist die Gleichung (15) insbesondere linear, also

$$Ap+Bq=C, \tag{17}$$

so geht jener Kegel in die Ebene

$$Ax+By+Cz=0$$

über und das System der Elemente ist durch alle zu ihr normalen Ebenen bestimmt.

Wählt man aus der Schaar von ∞^2 Ebenen, welche solcher Art durch (15), respective (17) dargestellt sind, nach irgend einem der Stetigkeit unterliegenden Gesetze ∞^1 Ebenen aus, so hüllen sie eine developpable Fläche ein, im Falle (17) insbesondere eine Cylinderfläche; diese Fläche ist eine Integralfläche nach dem üblichen Sprachgebrauche, aber mit der besonderen Massgabe, dass jede Tangentialebene mit jedem in ihr enthaltenen Punkte zusammen ein Element der Gleichung bildet.

9. Geometrisch gleichwerthig sind die drei Formen

$$F(x, p, q)=0 \tag{18a}$$

$$F(y, p, q)=0 \tag{18b}$$

$$F(z, p, q)=0 \tag{18c}$$

Das durch die erste dargestellte abgeleitete System besteht in einer Schaar zur yz-Ebene paralleler Ebenen. Die zu den Punkten einer solchen gehörigen Kegel (T) sind gleich und gleichliegend, weil durch die nämliche Gleichung (18a), in welcher x constant zu denken ist, charakterisirt. Infolge dessen ist das durch diese Gleichung bestimmte System von ∞^4 Elementen allen Translationen parallel zur yz-Ebene gegenüber invariant, so dass, wenn $V(x, y, z)=0$ irgend ein Integral der Gleichung ist, auch die mit den willkürlichen Constanten b, c gebildete Gleichung

$$V(x, y-b, z-c)=0 \tag{19a}$$

ein Integral vorstellt. Daraus schliesst man weiter, dass, sofern die Gleichung ein singuläres Integral besitzt, dieses nur in

einer oder mehreren zur yz-Ebene parallelen Ebenen bestehen kann.

Jede Ebene, deren Stellungscoëfficienten p, q sind, enthält ∞^1 Elemente, ihre Träger haben ein und dasselbe x, der Gleichung (18a) entnommen, liegen daher in einer Geraden parallel zur yz-Ebene. Man kann sich nun eine stetige Folge von ∞^1 Ebenen ausgewählt denken, welche einer Geraden in der yz-Ebene parallel sind und die eingehüllte Cylinderfläche gerade längs der ihnen durch die Gleichung (18a) zugeordneten Geraden berühren; dann ist diese Cylinderfläche eine Integralfläche. Die allgemeine Form der Gleichung einer zur yz-Ebene parallelen Cylinderfläche ist

$$x = \varphi(y + Cz)$$

und setzt man vorübergehend $y + Cz = u$, so folgt daraus

$$1 = C\frac{dx}{du}p, \qquad 0 = \frac{dx}{du}(1 + Cq)$$

und weiter

$$p = \frac{1}{C\frac{dx}{du}}, \qquad q = -\frac{1}{C};$$

dies führt (18a) über in

$$F\left(x, \frac{1}{C\frac{dx}{du}}, -\frac{1}{C}\right) = 0, \tag{20a}$$

d. i. in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung; ist $V(x, u, B) = 0$ ihr Integral, so ist $V(x, y + Cz, B) = 0$ und somit auch

$$V(x, y - b + C(z - c), B) = 0 \tag{21a}$$

ein Integral von (18a); B, C sind ebenso wie b, c willkürliche Constanten.

Ganz ähnliche Erwägungen gelten für die Gleichungen (18b) und (18c). Setzt man, um ein Integral der ersten zu erhalten,

$$y = \psi(z + Ax) \qquad z + Ax = v,$$

so folgt daraus

$$0 = \frac{dy}{dv}(p+A), \qquad 1 = \frac{dy}{dv} q$$

und es tritt an die Stelle von (18*b*) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$F\left(y, -A, \frac{1}{\frac{dy}{dv}}\right) = 0; \tag{20b}$$

ist $V(y, v, C) = 0$ ihr Integral, so ist $V(y, z+Ax, C) = 0$ und auch

$$V(y, z-c+A(x-a), C) = 0 \tag{21b}$$

ein Integral von (18*b*).

Um (18*c*) zu integriren, setze man

$$z = \chi(x+By), \qquad x+By = w,$$

woraus

$$p = \frac{dz}{dw}, \qquad q = B\frac{dz}{dw};$$

hat man dann das Integral von

$$F\left(z, \frac{dz}{dw}, B\frac{dz}{dw}\right) = 0 \tag{20c}$$

in der Form $V(x, w, A) = 0$ erhalten, so ist $V(z, x+By, A) = 0$ und auch

$$V(z, x-a+B(y-b), A) = 0 \tag{21c}$$

ein Integral von (18*c*).

10. Die im vorigen Artikel behandelten drei Formen sind im Grunde genommen specielle Fälle der Gleichung

$$F(z-\alpha x-\beta y, p, q) = 0. \tag{22}$$

Das durch sie bestimmte abgeleitete System bildet nämlich eine Schaar zu $z = \alpha x+\beta y$ paralleler Ebenen und lässt alle Translationen parallel zu dieser Ebene zu. Ist also $V(x, y, z) = 0$ ein Integral dieser Gleichung, so ist auch

$$V(x-a, y-b, z-a\alpha-b\beta) = 0 \tag{23}$$

ein Integral, wenn a, b willkürliche Constanten bedeuten.

Man kann die vorliegende Gleichung auf eine der speciellen Formen, nämlich (18*c*), zurückführen durch die Substitution

$$x = X, \quad y = Y, \quad z - \alpha x - \beta y = Z;$$

bezeichnet man die Ableitungen von Z nach X, Y, respective mit P, Q, so hat man

$$p = P + \alpha, \qquad q = Q + \beta$$

und es geht (22) über in

$$F(Z, P+\alpha, Q+\beta) = 0; \tag{24}$$

nach dem oben entwickelten Vorgange kann nun ein Integral dieser Gleichung ermittelt werden.

Die Gleichung

$$z = \alpha x + \beta y + pq \tag{22*}$$

beispielsweise, welche unter diese Form fällt, verwandelt sich zunächst in

$$Z = (P+\alpha)(Q+\beta);$$

mit $X + BY = W$ führt dies zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$Z = \left(\frac{dZ}{dW} + \alpha\right)\left(B\frac{dZ}{dW} + \beta\right) \tag{24*}$$

und nach Trennung der Variabeln zu

$$dW = \frac{2\,BdZ}{-(\alpha B + \beta) + \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4BZ}};$$

Integration gibt

$$W + A = \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4BZ} +$$
$$+ (\alpha B - \beta) l . \left[-(\alpha B + \beta) + \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4BZ}\right],$$

demnach ist

$$x + By + A = \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4B(z - \alpha x - \beta y)} +$$
$$+ (\alpha B + \beta) l . \left[-(\alpha B + \beta) + \sqrt{(\alpha B - \beta)^2 + 4B(z - \alpha x - \beta y)}\right]$$

ein Integral der Gleichung (22*) und man erkennt leicht, dass es im Wesen unverändert bleibt, wenn man x, y, z der Reihe nach durch $x - a$, $y - b$, $z - a\alpha - b\beta$ ersetzt.

11. Eine weitere Gruppe von Differentialgleichungen, welche geometrisch gleiche Interpretation zulassen, bilden die Formen

$$F(y, z, p, q) = 0 \qquad (25a)$$

$$F(z, x, p, q) = 0 \qquad (25b)$$

$$F(x, y, p, q) = 0 \qquad (25c)$$

Das abgeleitete System, welches die erste bestimmt, ist eine Schaar zur x-Axe paralleler Cylinder, in allen Punkten jeder Erzeugenden eines solchen Cylinders sind die zugehörigen Kegel (T) gleich und gleichliegend; daraus folgt, dass das durch die Gleichung bestimmte Elementensystem die Translationen parallel zur x-Axe zulässt, so dass, wenn $V(x, y, z) = 0$ irgend ein Integral dieser Gleichung ist, auch

$$V(x-a, y, z) = 0 \qquad (26a)$$

ein Integral vorstellt, wenn a eine willkürliche Constante bedeutet. Ist ein singuläres Integral vorhanden, so kann es nur einer zur x-Axe parallelen Cylinderfläche entsprechen.

Ähnliche Bemerkungen gelten bezüglich der beiden anderen Gleichungen und man kann jedem ihrer Integrale die Form

$$V(x, y-b, z) = 0 \qquad (26b)$$

beziehungsweise

$$V(x, y, z-c) = 0 \qquad (26c)$$

ertheilen.

12. Die obigen drei Gleichungen sind wieder specielle Fälle einer allgemeinen Differentialgleichung, nämlich

$$F(z-\alpha x, z-\beta y, p, q) = 0, \qquad (27)$$

deren Elementensystem invariant bleibt bei den Translationen parallel zur Geraden

$$\alpha x = \beta y = z; \qquad (28)$$

wenn daher $V(x, y, z) = 0$ ein Integral dieser Gleichung ist, so kann ihm mittelst der willkürlichen Constanten a die Form

$$V\left(x-\frac{a}{\alpha},\ y-\frac{a}{\beta},\ z-a\right)=0 \qquad (29)$$

verliehen werden.

Man kann die Gleichung (27) durch Einführung neuer Variabeln auf den Fall (25 *c*) zurückführen; als neue unabhängige Veränderliche wähle man

$$X=z-\alpha x, \qquad Y=z-\beta y,$$

als neue abhängige Variable eine dem Abstande des Punktes x, y, z von der zu (28) normalen Ebene $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+z=0$ proportionale Grösse, setze also

$$Z=\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+z;$$

die Auflösung dieser drei Gleichungen nach den ursprünglichen Variabeln gibt

$$x=\frac{-\frac{X}{\alpha^2}+\frac{Y}{\beta^2}+Z}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+1\right)}, \qquad y=\frac{\frac{X}{\alpha^2}-\frac{Y}{\beta^2}+Z}{\beta\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+1\right)},$$

$$z=\frac{\frac{X}{\alpha^2}+\frac{Y}{\beta^2}+Z}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+1};$$

führt man auf dieser Grundlage die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial X}=p\frac{\partial x}{\partial X}+q\frac{\partial y}{\partial X},$$

$$\frac{\partial z}{\partial Y}=p\frac{\partial x}{\partial Y}+q\frac{\partial y}{\partial Y}$$

aus und bezeichnet mit P, Q die partiellen Differentialquotienten von Z nach X, Y, so ergibt sich nach einiger Rechnung

$$p = \frac{\beta(1+\alpha^2)P}{P+Q}, \qquad q = \frac{\alpha(1+\beta^2)Q}{P+Q}$$

und somit heisst die Gleichung (27) in den neuen Variabeln

$$F\left(X,\ Y,\ \frac{\beta(1+\alpha^2)P}{Q+P},\ \frac{\alpha(1+\beta^2)Q}{P+Q}\right) = 0 \qquad (27^*)$$

und dies ist conform mit ($25c$).

Als Beispiel diene die Gleichung

$$\frac{(z-\alpha x)^\mu}{(z-\beta y)^\nu} = \frac{p}{q};$$

durch Anwendung der entwickelten Substitution geht sie über in

$$\frac{X^\mu}{Y^\nu} = \frac{\beta(1+\alpha^2)P}{\alpha(1+\beta^2)Q}$$

oder

$$\frac{\alpha X^\mu}{1+\alpha^2 P} = \frac{\beta Y^\nu}{1+\beta^2 Q};$$

bezeichnet man den willkürlichen gemeinsamen Werth dieser Verhältnisse mit A, so ergibt sich

$$P = \frac{X^\mu}{\alpha A} - \frac{1}{\alpha^2}, \qquad Q = \frac{Y^\nu}{\beta A} - \frac{1}{\beta^2}$$

und durch Integration der Gleichung $dZ = PdX + QdY$, wenn man gleich wieder die ursprünglichen Variabeln einführt, zunächst

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{y}{\beta} + z = \frac{(z-\alpha x)^{\mu+1}}{\alpha(\mu+1)A} + \frac{(z-\beta y)^{\nu+1}}{\beta(\nu+1)A} - \frac{z-\alpha x}{\alpha^2} - \frac{z-\beta y}{\beta^2} + B,$$

nach Ausführung aller Reductionen, und wenn man schliesslich für die willkürlichen Constanten A, B neue C_1, C_2 einführt mittelst der Gleichungen

$$A\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + 1\right) = C_1, \qquad AB = -C_2,$$

so ergibt sich als Integral die Gleichung

$$C_1 z + C_2 = \frac{(z-\alpha x)^{\mu+1}}{\alpha(\mu+1)} + \frac{(z-\beta y)^{\nu+1}}{\beta(\nu+1)},$$

an der man ohneweiters erkennt, dass sie im Wesen ungeändert bleibt bei der durch (29) angedeuteten Transformation.

13. Die bisher behandelten Gleichungsformen bieten die einfachsten Beispiele solcher Differentialgleichungen dar, in deren Integralen überschüssige Constanten auftreten können.[1] Vollständige Integrale der Gleichungen (15), dann (18) und (22), endlich (25) und (27), in den Formen (16), beziehungsweise (19) und (23), schliesslich (26) und (29) geschrieben, enthalten der Reihe nach fünf, vier, drei willkürliche Constanten. Trotzdem aber umfasst ein solches Integral nur dieselben ∞^4 Elemente, welche durch die betreffende Differentialgleichung definirt sind, diese aber in mehrfacher Zählung. Es gibt sich dieser Umstand dadurch zu erkennen, dass die Constanten, welche man wegen der Verschiebbarkeit des Elementensystems (nach ∞^2, ∞^1, respective ∞^0 Richtungen) im Integral anbringen kann, schliesslich doch nur eine Abänderung an den eigentlichen Integrationsconstanten herbeiführen, also strenge genommen keine wirkliche Verallgemeinerung des Integrals bewirken.

14. Schliesslich möge noch die verallgemeinerte Clairaut'sche Gleichung

$$z = px + qy + f(p, q) \tag{30}$$

von den hier entwickelten Gesichtspunkten aus betrachtet werden. Das abgeleitete System, welches sie darstellt, ist eine Schaar von ∞^2 Ebenen; jede Ebene dieser Schaar stellt in Verbindung mit jedem ihrer Punkte ein Element der Gleichung dar, ist daher eine Integralfläche; infolge dessen bedeutet die Gleichung (30), wenn man in ihr p, q als willkürliche Constanten auffasst, ein vollständiges Integral eben dieser Gleichung,

---

[1] Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 475 f. — Mansion, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, S. 23.

wenn man sie als Differentialgleichung deutet; es ist also das zu (30) gehörige ursprüngliche Flächensystem durch

$$z = ax + by + f(a, b) \tag{31}$$

darstellbar.

Auch die folgende Schlussweise kann bei der Gleichung angewendet werden. Bringt man, unter p, q bestimmte Werthe sich denkend, die durch (30) dargestellte Fläche des abgeleiteten Systems mit irgend einer Ebene derselben Stellung, z. B.

$$z = px + qy + C \tag{32}$$

zum Schnitt, so erhält man eine unendlich ferne Gerade, die gemeinsame Stellung von (30) und (32); diese Gerade ist die zur Ebene (32) gehörige Curve (C); im Allgemeinen wird also eine Ebene nur in den Punkten ihrer unendlich fernen Geraden von Integralflächen berührt. Nur wenn $C = f(p, q)$, fallen die Ebenen (30) und (32) in eine zusammen und jeder Punkt dieser Ebene wird Berührungspunkt einer sie tangirenden Integralfläche, infolge dessen ist die Ebene selbst auch eine Integralfläche; die Curve (C) ist in diesem Falle unbestimmt insoferne, als jede in der Ebene gezogene Linie als solche angesehen werden kann.

Wenn man, den in Art. 7 entwickelten Vorgang befolgend, die dort mit (13), (14) bezifferten Gleichungen bildet, so lauten sie wie folgt:

$$z = px + qy + f(p, q),$$

$$p - p = 0, \qquad q - q = 0,$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad y + \frac{\partial f}{\partial q} = 0;$$

der Umstand, dass die Gleichungen der zweiten Zeile identisch, d. h. durch alle Werthe von x, y, z, p, q erfüllt sind, bedeutet, dass alle Elemente des abgeleiteten Systems zugleich Elemente des ursprünglichen Systems sind; eliminirt man also p, q zwischen den übrig bleibenden drei Gleichungen, so erhält man eine Integralfläche, das singuläre Integral als Einhüllende des abgeleiteten und zugleich des ursprünglichen Systems.

Die Clairaut'sche Gleichung ist der analytische Ansatz für ein Problem, das eine Fläche zu bestimmen verlangt aus einer Eigenschaft ihrer Tangentialebene, die von der Lage des Berührungspunktes in der Ebene unabhängig und daher von allen ihren Punkten gleichmässig erfüllt ist. Bringt man nämlich die Gleichung der Tangentialebene im Punkte x, y, z der unbekannten Fläche

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

auf die Form

$$\zeta = p\xi + q\eta + z - px - qy, \tag{33}$$

so nimmt man wahr, dass der Abschnitt dieser Ebene auf der z-Axe, nämlich $z - px - qy$, im Allgemeinen abhängig ist von x, y, z, p, q, also von der Stellung der Ebene und der Lage des Berührungspunktes; soll er nur von der Stellung abhängig sein, so muss er sich auf eine Function von p, q allein, z. B. $f(p, q)$ reduciren, so dass

$$z - px - qy = f(p, q) \tag{34}$$

wird. In der That erkennt man, nachdem dies in (33) eingetragen worden, dass jeder Punkt der Ebene (33) in (34) an Stelle von x, y, z gesetzt werden kann. Die Gleichung (34), welche ein derartiges Problem charakterisirt, ist aber die oben als Clairaut'sche bezeichnete.

Verlangt man beispielsweise eine Fläche zu finden derart, dass der aus dem Ursprunge nach dem Berührungspunkte der Tangentialebene gezogene Strahl mit dieser einen gegebenen Winkel arc sin k bildet, so wird diese Forderung ausgedrückt sein durch

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k$$

und hieraus ergibt sich als Abschnitt der Tangentialebene auf der z-Axe

$$z - px - qy = k\sqrt{(1 + p^2 + q^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$$

ein Ausdruck, der von p, q und x, y, z abhängt.

Wird dagegen nach einer Fläche gefragt, deren Tangentialebenen einen gegebenen Abstand r vom Ursprunge haben, so drückt sich diese Forderung in der Gleichung

$$\frac{z-px-qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=r$$

aus und der Abschnitt der Tangentialebene auf der z-Axe

$$z-px-qy=r\sqrt{1+p^2+q^2}$$

ist von p, q allein abhängig.

Zur Kenntniss des Ablaufes der Lichtemission

von

G. Jaumann.

(Mit 3 Textfiguren.)

Im Folgenden wird der Nachweis erbracht 1., dass die emittirenden Schwingungen der leuchtenden Körper eine nachweisbare und messbare Dämpfung aufweisen und 2., dass sie nicht durch zufällige Impulse, sondern durch den continuirlichen Einfluss eines periodischen Vorganges excitirt werden.

1. Dämpfung der Emission und continuirliche Spectren.

Man betrachtet gegenwärtig ein continuirliches Spectrum wie den Grenzfall eines Linienspectrums, in welchem die Zahl der Linien unendlich gross ist. Nach Newton sind unendlich viele verschiedene Farben im weissen Licht vorhanden. Thatsächlich kann man aus diesen Farben wieder weisses Licht zusammensetzen.

Es ist nun unwahrscheinlich, dass es die beste Art ist, den Emissionsvorgang darzustellen, wenn man angibt, der weissglühende Körper sende unendlich viele Schwingungen aus. Man dürfte desshalb zu einer so complicirten Darstellung gekommen sein, weil es der Natur dieses Vorganges überhaupt nicht angemessen ist, das emittirte Licht als eine Summe von periodischen Schwingungen darzustellen. Um hingegen den Dispersionsvorgang zu verstehen, ist Newton's Darstellung die beste.

Die verschiedenen Farben eines Spectrums werden für incohärent gehalten. Dies ist ein Umstand, welcher schwerlich jemals direct bewiesen werden kann. Wohl aber kann das

Gegentheil, falls es zutrifft, indirect bewiesen werden. Wenn die Farben eines continuirlichen Spectrums cohärent sind, so lassen sie sich zusammensetzen. Das Ergebniss dieser Integration kann die untersuchte Lichtwelle als eine einfache, wenn auch nicht periodische Function darstellen. Wäre nun die Emission der so resultirenden unperiodischen Welle an sich aus anderen Gesichtspunkten verständlich, so könnte man hoffen, damit zu einem Aufschluss über die Natur der Emission gekommen zu sein und wird dann auch die Voraussetzung zugeben, dass die verschiedenen Farben des betrachteten continuirlichen Spectrums cohärent sind.

Die Intensität der Farben eines continuirlichen Spectrums ist eine Function der Schwingungsperiode u.[1] Bezeichne da die Amplitude einer solchen Schwingung, d. h. die Wurzel aus der Intensität der gesammten Strahlung zwischen den Perioden u und $(u+du)$, so wird gelten

$$da = f(u)du.$$

Die Theilschwingung selbst stellt sich durch

$$da \sin ut = f(u)du \sin ut,$$

worin t die Zeit bedeutet, dar. Sind alle diese Schwingungen cohärent und gleichphasig, so werden sie sich zu einer resultirenden Schwingung zusammensetzen, welche gegeben ist durch das Integral

$$\varphi(t) = \int_0^\infty f(u) \sin ut \, du, \tag{1}$$

welches über das ganze Spectrum zu erstrecken ist. $\varphi(t)$ stellt dann die wahre Emission dar.

In dieser Richtung kann man jedoch nicht weiter kommen. Es fehlt an experimentellen Bestimmungen der $f(u)$, da nur sehr wenig bolometrische Messungen vorliegen und diese nicht für solche continuirliche Spectren, welche man für einfach halten konnte.

---

[1] Als Schwingungsperiode wird hier bezeichnet der Quotient $\frac{2\pi}{\tau}$, worin τ die Schwingungsdauer bedeutet.

Man muss den umgekehrten Weg einschlagen, nämlich von einer Voraussetzung über die Natur der Emission, also der Function $\varphi(t)$ ausgehen. Am nächsten liegt nun die Vermuthung, dass die Emission unter starker Dämpfung erfolge.

Die emittirende Schwingung wird dann wie alle gedämpften Schwingungen das Gesetz befolgen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= Ae^{-\varkappa t}\sin pt \\ \text{worin}\quad p^2 &= n_1^2 - \varkappa^2 \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

und $\varkappa$ die Dämpfungsconstante, ferner n_1 die Periode der ungedämpften Schwingung bedeutet.

Diese Schwingung $\varphi(t)$ dauert von $t = 0$ bis $t = \infty$ ehe sie verlöscht. Eine solche Schwingung lässt sich nach dem Fourier'schen Theorem nicht in eine discrete, wenn auch unendliche Reihe von Sinusschwingungen zerlegen, sondern nur in ein Continuum derselben. Die Amplitudenvertheilung in diesem continuirlichen Spectrum findet man mittelst des Fourier'schen Integrals:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin tn\, dn \int_0^\infty \varphi(t) \sin nt\, dt.$$

Es ist hiebei vorausgesetzt, dass die Partialschwingungen gleichphasig mit der resultirenden Schwingung sind, welche Voraussetzung nothwendig ist, wenn man verlangt, dass das Spectrum im infrarothen und ultravioletten Theile (für $n = 0$ und $n = \infty$) verschwindende Intensität habe.

Durch den Vergleich des Fourier'schen Integrals mit Gleichung 1) ergibt sich, dass die gesuchte Amplitudenvertheilung sich darstellt durch:

$$f(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(t) \sin nt\, dt.$$

Man erhält endlich nach Einführung der in Gleichung 2) ausgesprochenen Annahme über die Natur der Function $\varphi(t)$ und Ausführung der Integration:

$$f(n) = \frac{4}{\pi} A\varkappa p \cdot \frac{n}{(\varkappa^2 + p^2 + n^2)^2 - 4p^2n^2}. \qquad 3)$$

Die Periode U, für welche $f(u)$ ein Maximum aufweist, bestimmt sich durch

$$U^4 - \frac{2}{3}(p^2 - \varkappa^2)\,U^2 - \frac{1}{3}(p^2 + \varkappa^2)^2 = 0$$

Es existirt also innerhalb des Integrationsbereiches $u = 0$ bis $u = \infty$ nur ein Maximum der $f(u)$. Dieses Maximum liegt stets zwischen $u_1 = \sqrt{p^2 + \varkappa^2}$ und p, und rückt für abnehmende Dämpfungen (beim Anglühen) näher an u_1 heran. Fig. 1 stellt diese Verhältnisse dar.

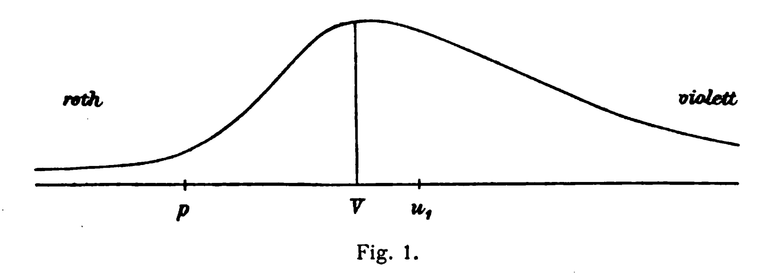


Fig. 1.

Wenn die Dämpfung nicht fast aperiodisch ist, so ist die Verschiebung des Maximums aus der ungedämpften Periode u_1 also $(u_1 - U)$ stets von zweiter Ordnung unmerklich klein.

Der Übergang von einer ungedämpften Sinusschwingung zu dieser Zerlegung einer gedämpften Schwingung entspricht so sehr dem Übergang von einer scharfen Spectrallinie in eine verbreiterte Spectrallinie, dass anzunehmen ist:

Die Verbreiterung der Spectrallinien erklärt sich durch eine Dämpfung, welche die emittirende Schwingung erfährt.

Eine verbreiterte Linie ist im wesentlichen ein continuirliches Spectrum. Das Spectrum der meisten weissglühenden Körper dürfte bestehen aus einer Überdeckung mehrerer verbreiterter Linien.[1]

---

[1] Von früheren Erklärungen der Verbreiterung der Spectrallinien sind folgende zu erwähnen:

Zöllner (Pogg. Ann., 1871) nimmt an, dass die Gase immer continuirliche Spectren aussenden, deren Intensität in allen Theilen unmerklich klein ist, ausser

Die Emission eines festen oder flüssigen glühenden Körpers oder eines verdichteten Gases unterliegt also einer Dämpfung. Der Werth der Dämpfungsconstanten $\varkappa$ einer emittirten Schwingung lässt sich mit derselben Sicherheit angeben, mit welcher man die Intensitätsvertheilung in der verbreiterten Linie kennt.

Beispielsweise sei die Dämpfungsconstante für die Magnesiumlinie von der Wellenlänge $\lambda = 2852$ angegeben. Dieselbe verbreitert sich unter Umständen so sehr, dass noch bei der Wellenlänge 2950 die Lichtstärke den vierten Theil der maximalen Lichtstärke, die Amplitude $f(u)$ also die Hälfte der maximalen Amplitude $f(U)$ ausmacht. Mit diesen Zahlen berechnet sich aus Gleichung 3) die Dämpfungsconstante zu:

$$\varkappa = 10^{13}.19^{\mathrm{sec}^{-1}},$$

d. h. die Amplitude der emittirenden Schwingung sinkt schon während fünf Schwingungen im Verhältniss $e:1$ ab.

Einen noch extremeren Fall von Dämpfung zeigt die Wasserstoffemission unter höherem Druck. Die für gewöhnlich beobachtbaren Verbreiterungen von Spectrallinien sind jedoch

---

in den Spectrallinien des Gases. Bei grösserer Dichte des Gases wird das continuirliche Spectrum merklich. Diese Meinung ist nicht unrichtig, aber im Grunde genommen inhaltslos.

Lippich, (Pogg. Ann., 1870) bringt die Verbreiterung der Linien vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie mit der Abweichung vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze in Beziehung.

Kayser (Winkelmann's Handb. der Phys., 1894) erklärt sie vom Standpunkt der Moleculartheorie durch die secundären Wirkungen des bei grösserer Dichte häufigeren Zusammenstosses der Moleküle.

Lockyer schliesst auf Dissociation der Elemente, aus der Verbreiterung ihrer Spectrallinien.

Ebert (Wied. Ann., 1889) erklärt die Verbreiterung durch die schwingende Bewegung der Moleküle in der Visirlinie und das Doppler'sche Princip.

Es wurde auch die Ansicht ausgesprochen, dass es sich bei Verbreiterung von Duplets um eine Abweichung zufolge der grossen Amplitude der ausgesendeten Lichter handle, nach Art der Combinationstöne.

Das Fourier'sche Theorem wurde meines Wissens nur von Stoney (Phil. Mag., 1871) auf Spectralprobleme bezogen, aber ohne Erfolg, da er demselben nichts entnahm als die Vermuthung, dass in dem Spectrum harmonische Schwingungen vorhanden sein müssten, was nicht der Fall ist.

sehr klein, man erkennt, dass erst nach 50 bis 100 Schwingungen die Amplitude von e auf 1 absinkt.

2. Periode der Excitation. Die Banden und Serien.

Wenn die emittirende Schwingung gedämpft ist, so muss bei fortdauerndem Leuchten eine Ursache vorhanden sein, welche diese emittirende Schwingung von Zeit zu Zeit wieder excitirt. Diese Excitation könnte nun in ganz zufälligen und unregelmässigen Pausen, oder aber periodisch erfolgen.

Wir wollen letzteres annehmen und zusehen, zu welchen Folgerungen dies führt.

Wenn die Excitation periodisch ist, so gewinnt der Emissionsvorgang, obgleich er gedämpft ist, wieder eine Periode, nämlich die der Excitation.

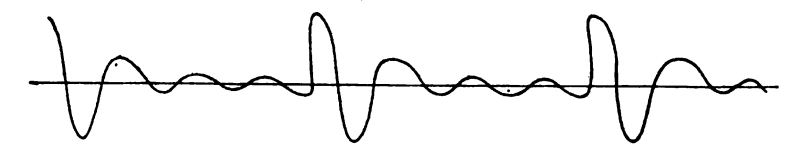


Fig. 2.

Fig. 2 stellt eine derartige Schwingung dar.

Nun als eine periodische Function zerlegt sich die Schwingung am Prisma nach Fourier in eine Summe von discreten Sinusschwingungen, deren Perioden ganzzahlige Vielfache der Functionsperiode, hier der Excitationsperiode, sind.

Eine periodisch excitirte Emission sendet also ein Linienspectrum aus. Die Schwingungszahlen dieser Linien stellen alle ganzzahligen Vielfachen der Excitationszahl dar.

Die Excitationszahl pro Secunde ist nun jedenfalls viel kleiner als die Schwingungszahl der emittirenden Schwingung, da viele gedämpfte Schwingungen der Emission vorübergehen werden, ehe wieder eine Excitation erfolgt. Desshalb liegen auch die Vielfachen der Excitationszahl einander sehr nahe und das ausgesendete Spectrum wird durch zahlreiche, der Schwingungszahl nach äquidistante Linien fein gestreift erscheinen.

Die Differenz der Schwingungszahlen zweier dieser Linien ist gleich der Excitationszahl pro Secunde.

Damit ist noch nichts über die Stärke dieser Linien ausgesagt. Aus der Convergenz der Fourier'schen Reihe ergibt sich, dass sie im äussersten Ultraviolett immer schwächer werden müssen. Im Infrarothen brauchen sie aber nicht etwa stärker zu sein als im sichtbaren Spectrum. Sie können dort auch schwächer sein oder ganz verschwinden. Ferner brauchen auch dort, wo sie stark sind, nicht alle zu erscheinen, sondern es können irgend welche gesetzmässige Auslassungen zwischen ihnen vorkommen, indem die Amplitude der so ausfallenden Schwingungen sich durch die Natur der dargestellten periodischen Function als gleich Null bestimmt.

Wie diese Amplitudenvertheilung sich nun im gegebenen Falle bestimmt, ist leicht vorauszusehen. Je länger das Excitationsintervall ist, desto feiner gestreift wird das Spectrum sein und wenn die Zeit zwischen zwei Excitationen so lang ist, dass die emittirende Schwingung Zeit hat, fast ganz abzuklingen, so wird das Spectrum fast genau continuirlich sein und eine nach dem Gesetz des vorigen Capitels vertheilte Lichtintensität aufweisen.

Bei grösseren Excitationszahlen wird es discontinuirlich, gestreift, sein, im Wesentlichen aber dieselbe Intensitätsvertheilung aufweisen. Es wird eine Spectralbande respective eine Spectralserie darstellen.

Die Schwingungszahlen n aller Linien einer Bande bestimmen sich nach Deslandres (Compt. rend. 1889, 1890) durch das Gesetz

$$n = a \pm b\varkappa^2,$$

worin a und b Constante und $\varkappa$ die ganzen Zahlen darstellt. Die Differenz je zweier Schwingungszahlen sind also ganzzahlige Vielfache der Constanten b und desshalb ist diese die Excitationszahl pro Secunde. Die ganze oft aus hunderten von Linien bestehende Bande wird emittirt durch eine einfache, gedämpfte, periodisch excitirte Sinusschwingung.

Deslandres stellt z. B. die Schwingungszahlen der 63 Linien der Bande $\lambda = 3914 \cdot 6 - 3827 \cdot 4$ am negativen Pol des Funkens in Stickstoff von normalem Druck dar durch

$$\frac{1}{3} 10^{-12} n \doteq 255 \cdot 45 + 0 \cdot 001534 (\varkappa - 1)^2.$$

Es treten somit für diese Schwingung während 255450 Emissionsschwingungen etwas über anderthalb (genau 1·534) Excitationen ein.

Eine Leuchtgasbande bei $\lambda = 3891 \cdot 5 - 4033 \cdot 8$, welche 20 Linien aufweist, stellt Deslandres dar durch

$$\frac{1}{3} 10^{-12} n = 257 \cdot 04 - 0 \cdot 02078 (\varkappa - 1)^2.$$

Hier kommen also auf ungefähr dieselbe Zahl emittirender Schwingungen, nämlich auf 257040 nicht weniger als 20·78 Excitationen.

Dabei kann man aus der Lichtvertheilung in einer solchen Bande auch die Dämpfung der emittirenden Schwingung abschätzen, sowie im vorigen Capitel gezeigt wurde.

Die Linie Nr. 11 $\lambda = 3936 \cdot 4$ der erwähnten Leuchtgasbande ist die lichtstärkste. Nach beiden Seiten nimmt die Lichtstärke ab. Sie dürfte ungefähr bei der Linie Nr. 5 $\lambda = 3902 \cdot 4$ den vierten Theil erreicht haben.

Hieraus berechnet sich die Dämpfungsconstante zu

$$\varkappa = 10^{13} . 3 . 9 \, \mathrm{sec}^{-1}$$

Das Leuchtgas emittirt also eine Schwingung von der Wellenlänge 0·000394 *mm*, welche so gedämpft ist, dass ihre Amplitude nach je 21 Schwingungen im Verhältniss von *e* : 1 absinkt und welche nach je 12360 Schwingungen neu excitirt wird.

3. Abweichungen von der Intensitätsvertheilung und vom Deslandres'schen Gesetz.

Die Intensitätsvertheilung in den Banden, seltener in den verbreiterten Linien ist unter Umständen eine einseitige. Ich

bringe dies vorläufig in Zusammenhang mit dem Auftreten von Schwingungsduplets und Triplets, welches directbeobachtbar ist. Es sind dies simultane Schwingungen von gegebenem Amplituden verhältniss. Verbreitern sich beide, so entsteht eine einseitige Intensitätsvertheilung nach Fig. 3, welche die Intensitätsvertheilung der Componenten des Duplets gestrichelt, die resultirende Vertheilung voll ausgezogen darstellt.

Balmer (Wied. Ann., 1885) stellt die Serien genauer durch

$$n = a + b\varkappa^{-2}$$

dar, während Kayser und Runge (Abhandl. d. Berl. Akad., 1890, 1891, 1892) mit der Formel

$$n = a + b\varkappa^{-2} + c\varkappa^{-4}$$

noch bessere Übereinstimmung erzielen. Mit erster Annäherung stimmt diese Formel mit der Deslandres'schen überein, nur muss man die Zählung am anderen Ende der Serie beginnen.

In voller Genauigkeit gilt also die Deslandres'sche Formel nicht. Es folgt hieraus, dass die Excitation zwar mit erster Annäherung periodisch genannt werden kann, es aber nicht

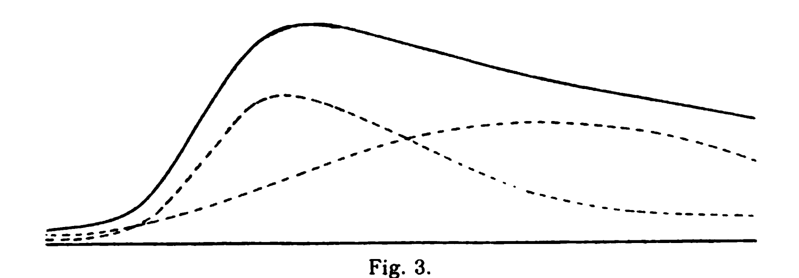


Fig. 3.

völlig ist. Da aber doch eine grosse Gesetzmässigkeit der Excitation vorhanden sein muss um die Streifung nach dem Gesetz von Kayser und Runge zu bewirken, so drängt sich mir die Vermuthung auf, dass die Excitation nicht durch periodische Anstösse, sondern durch den continuirlichen Einfluss einer excitirenden Schwingung bewirkt wird, welche fast periodisch ist, aber desshalb nicht völlig periodisch, weil sie selbst gedämpft ist.

Als Bild vergleiche man die Schwingung einer Stimmgabel, welche durch einen Fiedelbogen angestrichen wird, der nicht gleichförmig, sondern gedämpft sinusförmig bewegt wird.

Ist die excitirende Schwingung gedämpft, so braucht sie selbst wieder eine excitirende Ursache und diese Excitation zweiter Stufe kann entweder durch einen zufälligen gelegentlichen Anlass erfolgen, oder selbst wieder periodisch sein. In letzterem Falle wird ausgesendet werden statt einer Serie von Linien eine Serie von Banden wie dies beispielsweise bei der Bandengruppe von Stickstoff bei $\lambda = 5000$—2800 der Fall ist.

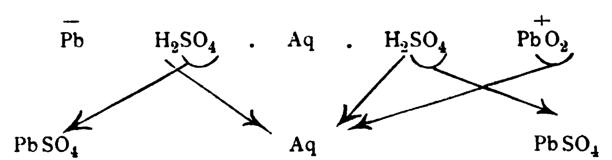
Über die thermochemischen Vorgänge im Secundär-Elemente

von

Franz Streintz.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Graz.

Die chemische Energie in einem Secundärelemente kommt dadurch zu Stande, dass auf Kosten der im Elektrolyte befindlichen Schwefelsäure an beiden Platten Bleisulfat ausgeschieden wird. Wendet man die von Pfaundler[1] für die Processe in einigen constanten Ketten gewählte übersichtliche Darstellung an, so erhält man als Ausdruck für die gemachte Behauptung das nachstehende Schema:



Dabei wird auf begleitende Nebenerscheinungen, bestehend in der Bildung der Verbindung H_2PbO_3, in der Absorption von H durch die negative Platte und endlich in der Ausscheidung von freien Gasen,[2] keine Rücksicht genommen. Ferner ist vorausgesetzt, dass bei der Entladung sämmtliche Säure zur Salzbildung verbraucht wird.

Um die chemische Energie zu berechnen, zerlegt man sich vortheilhaft den Entladungsvorgang in drei Phasen.

---

[1] Pfaundler, Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik, III, S. 578, 1888—1890.

[2] Streintz und Neumann, Wied. Ann., 41, 1890, S. 111 enthält die vollständigen Gleichungen.

In der ersten Phase wird durch die Thätigkeit der Jonen $2H^{\cdot}$ und SO_4'' Wasser zerlegt; für diesen Vorgang gilt die Gleichung

$$H_2O = H_2 + O - 684\,K^{1} \qquad (1)$$

Der Sauerstoff erscheint an der negativen Platte, dieselbe oxydirend; der Wasserstoff reducirt das an der positiven Platte befindliche Superoxyd in Monoxyd unter Bildung von Wasser; es ergibt sich

$$\overset{-}{Pb} + O = PbO + 503K; \ldots \overset{+}{Pb}O_2 + H_2 = PbO + H_2O + aK; \qquad (2)$$

da die Metalloxyde neben freier Säure nicht bestehen können, so tritt in der dritten Phase Sulfatbildung ein; die thermochemische Gleichung ist für beide Elektroden dieselbe und lautet:

$$\overset{-}{Pb}O + H_2SO_4\,aq = PbSO_4 + Aq + 234K_1; \ldots \overset{+}{Pb}O + H_2SO_4\,aq = \\ = PbSO_4 + Aq + 234K. \qquad (3)$$

Durch Addition der Gleichungen in (1), (2) und (3) erhält man für die chemische Energie

$$E_c = \overset{-}{Pb} + 2\,H_2SO_4\,aq + \overset{+}{Pb}O_2 = 2\,PbSO_4 + Aq + (a + 287)\,K. \qquad (I)$$

Bei Elementen mit grösserem Gehalt an Säure ist die jeweilige Verdünnungswärme derselben durch das bei der Entladung gebildete Wasser als additives Glied hinzuzufügen; auch wird die Lösungswärme des Bleisulfates in der Schwefelsäure zu berücksichtigen sein.

Sieht man von diesen Umständen zunächst ab, so beschränkt sich das thermochemische Problem auf die Aufgabe, die unbekannte Wärmetönung a direct oder indirect zu ermitteln oder mit andern Worten, das Bleisuperoxyd in irgend eine stabile Verbindung, deren potentielle chemische Energie bekannt ist,

---

[1] Die in der Abhandlung vorkommenden thermochemischen Angaben und Bezeichnungen sind dem Lehrbuch der allgemeinen Chemie (II. Band, 1893) von Ostwald entnommen. — Die Arbeit, welche gegen den Atmosphärendruck durch Entstehung von 1·5 Grammmolekülen Knallgas geleistet wird, wurde nicht berücksichtigt, da die Gase in der zweiten Phase wieder verschwinden.

unter Beobachtung der bei der Reaction auftretenden Wärme überzuführen.

Hiezu erschien ein Versuch geeignet, der in Vorlesungen über Experimentalchemie vorgeführt wird. In einem Kolben hängt ein Mousselinbeutelchen, das pulverförmiges Superoxyd enthält; leitet man einen lebhaften Strom von Schwefeldioxyd in denselben ein, so entsteht Bleisulfat unter so beträchtlicher Erhitzung der Substanz, dass das einhüllende Gewebe verbrennt. Bezeichnet man die entwickelte Wärme mit c, so ergibt sich

$$PbO_2 + SO_2 = PbSO_4 + c\,K, \tag{4}$$

wobei noch die Arbeit beim Verschwinden des Gases zu berücksichtigen wäre.

Sollen brauchbare Messungen dieser Reactionswärme angestellt werden, so musste vor Allem das organische Gewebe durch ein neutrales Behältniss für das Pulver ersetzt werden. Zu diesem Behufe dienten der Reihe nach Körbchen aus feinstmaschigem Platinnetz, Glaswolle, Glimmerplättchen.

Einige orientirende Versuche ergaben, dass der Gasstrom von SO_2 nur geringe Mengen der Substanz umzusetzen im Stande ist; infolge dessen waren die zu erwartenden absoluten Wärmemengen klein; man musste demnach zum empfindlichsten Instrumente, dem Eiscalorimeter greifen.

Leider stellte es sich heraus, dass die Intensität der Reaction bei der niedrigen Temperatur (der Gasstrom war selbstverständlich vor seinem Eintritte in das Reagirglas des Calorimeters auf 0° gekühlt worden) ganz bedeutend geschwächt wird. Es musste daher eine Vorwärmung der Substanz vorgenommen werden durch eine kleine Platinspirale, der auf galvanischem Wege eine genau gemessene Wärmemenge zugeführt wurde. Trotzdem blieb auch nunmehr der überwiegende Theil des Pulvers unverändert. Der Quecksilberfaden im Capillarrohr des Calorimeters hatte jedoch grössere Bewegungen vollzogen, so dass noch Hoffnung vorhanden war, es werde sich durch Wägungen vor und nach dem Versuche der Werth c ermitteln lassen. Die Resultate standen jedoch in keiner Übereinstimmung unter einander, so dass sich die Vermuthung aufdrängte, es sei durch die galvanische Erwärmung

ein veränderlicher Bruchtheil des Superoxydes in Monoxyd übergegangen.

Es war daher ein anderer Weg einzuschlagen, welcher auch schliesslich zum Ziele führte. Aus Versuchen ergab sich, dass schwefelige Säure (H_2SO_3 aq) allein nicht im Stande ist, PbO_2 zu verändern. Concentrirte Salzsäure jedoch zerstört das Superoxyd unter Bildung von Bleichlorid ($PbCl_2$) Bleitetrachlorid ($PbCl_4$) und unter Entwicklung von freiem Chlor nach der Formel

$$PbO_2 + 4HCl = \underbrace{PbCl_2 + Cl_2}_{PbCl_4} + 2H_2O.$$

Einzeln ist somit keine von beiden Säuren für den gewünschten Zweck zu verwerthen; wohl aber, wenn man aus ihnen eine entsprechende Mischung herstellt. Dann wird das Blei an SO_4, das Chlor an H gebunden, entsprechend der Gleichung

$$\underbrace{PbCl_2 + Cl_2}_{PbCl_4} + H_2SO_3 + 2H_2O = PbSO_4 + 4HCl + H_2O.$$[1]

Da der in der Mischung enthaltene Chlorwasserstoff keiner Veränderung durch den Process unterliegt, das Entstehen von einem Molekül Wasser aber mit Rücksicht auf den Überschuss von Wasser in der Lösung nicht in Betracht kommt, so kann man für beide neben einander verlaufenden Reactionen die thermochemische Gleichung aufstellen

$$PbO_2 + H_2SO_3\,aq = PbSO_4 + Aq + c'.K.$$

Mit Zuhilfenahme des Werthes

$$SO_2 + Aq = H_2SO_3\,aq + 77\,K$$

ergibt sich

$$c - c' = 77\,K. \tag{5}$$

Gasförmiges SO_2 tritt nicht auf; der Atmosphärendruck leistet somit keine Arbeit, noch wird eine solche gegen ihn verrichtet.

---

[1] Es ist nicht ausgeschlossen, dass ein Theil des Bleies an Cl_2 gebunden bleibt. Da jedoch die Neutralisirungswärme des Chlorbleies (223 K) jener des Sulfates (234 K) nahezu gleichkommt, so ist dadurch eine Fehlerquelle nicht zu befürchten.

Um nun an Stelle von a in der Gleichung für die chemische Energie den experimentell auszumittelnden Werth c' zu erhalten, verfährt man folgendermassen. Es war

$$PbO_2+H_2 = PbO+H_2O+aK.$$

Bezeichnet man die Wärme, welche entwickelt wird, wenn Monoxyd in Superoxyd übergeführt wird mit b, also

$$PbO_2 = PbO+O-bK,$$

so gibt die Differenz dieser beiden Gleichungen die Bildungswärme des Wassers, d. h.

$$a+b = 684\,K, \tag{6}$$

ferner lässt sich Gleichung (4) in die Form bringen

$$PbO+O+SO_2 = PbSO_4+(c+b)\,K$$

und da

$$SO_2+O = SO_3+301\,K,$$

so ergibt sich

$$PbO+SO_3 = PbSO_4+(c+b-301)\,K.$$

Die Wärmetönung dieses Vorganges ist zu 644 K bestimmt worden; daraus folgt

$$c+b = 945\,K. \tag{7}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5), (6) und (7) können also a, b, c und c' berechnet werden, sobald eine dieser vier Grössen bekannt ist. Sollen a, b oder c für sich bestimmt werden, dann kommt noch die durch die Gase geleistete Arbeit entsprechend zu berücksichtigen. Hingegen ist bei Einführung des Werthes c' in die Gleichung für die chemische Energie an den Zahlen, welche sich für $(a+b)$ und für $(b+c)$ ergaben, keine Correction in diesem Sinne vorzunehmen. Es lehrt dies eine einfache Überlegung. Die Gleichung lautet nunmehr

$$E_c = Pb+2H_2SO_4aq+PbO_2 = 2PbSO_4+Aq+(103+c')K. \tag{II}$$

Zur Bestimmung von c' war zunächst wieder das Eiscalorimeter ausersehen. Allein der Nachtheil einer nicht vollkommen verlaufenden Reaction trat auch hier ein und zudem war es misslich, dass man wegen der Einrichtung dieses Instrumentes nicht in der Lage war, den Verlauf des Processes mit den Augen zu verfolgen. Ich bediente mich daher einer

Einrichtung, welche von Nernst[1] mit Erfolg angewendet wurde. Ein kleines dünnwandiges Becherglas mit etwa 300 cm^3 Fassungsraum, dessen Rand abgesprengt war, stand auf drei Korkschneiden in einem weiten Batterieglas, das mit einem Holzdeckel versehen war. Der Holzdeckel enthielt zwei Ausschnitte; der eine diente dazu, die gewogenen Mengen Superoxyd einzuführen und war für gewöhnlich bedeckt; der andere seitliche hielt ein in Zehntelgrade getheiltes Thermometer, dessen Kugel bis nahe an den Boden des Becherglases reichte.

In das Becherglas wurden ungefähr 200 cm^3 der Mischung von Salzsäure und schwefeliger Säure gegossen. Um die entsprechende Mischung zu erhalten, gingen einige orientirende Versuche voraus, die ergaben, dass die bei gewöhnlicher Temperatur durch Absorption des SO_2 von Wasser hergestellte schwefelige Säure zum glatten Verlauf der Reaction nicht kräftig genug sei. Es wurde daher das Gas, das sich beim Erhitzen von Kupferspänen mit concentrirter Schwefelsäure entwickelte, zunächst in einem Schlangenrohr, welches von schmelzendem Schnee umgeben war, gekühlt und dann in einen gleichfalls gekühlten Glaskolben mit destillirtem Wasser so lange eingeleitet, bis dieses zu erstarren begann, d. h. bis sich das feste Hydrat ($SO_2 . 7 H_2O$) ausschied. Auf diesem Wege erhielt man Säure von 12 bis 13 Gewichtsprocenten. 40 Volumtheile davon wurden dann mit 30 Volumtheilen reiner concentrirter Salzsäure von 38·2 Gewichtsprocenten vermischt. Wenn man nun in diese Mischung das pulverförmige PbO_2 tauchte, so ging der Process der Überführung in $PbSO_4$ allerdings sehr rasch von statten, es wurden aber Nebel von SO_2 ausgestossen, was vermieden werden musste. Dies war dadurch zu erreichen, dass man 150 bis 160 cm^3 der Mischung die auf ungefähr 200 cm^3 ergänzende Menge Wasser zusetzte.

Das Bleisuperoxyd war aus einer Lösung von Bleiacetat und Kalilauge durch Einleiten von Chlor gefällt, dann durch Dekantation ausgewaschen, bis das Waschwasser weder Chlor- noch Bleireaction zeigte. Mit Salpetersäure gekocht gab es kein Blei ab, war somit frei von Oxyd. Es wurde, nachdem es sorg-

---

[1] Nernst, Theoretische Chemie, S. 468, 1893.

fältig bei einer Temperatur, die 100° nicht überstieg, getrocknet war, feingepulvert in einer Platinschale aufbewahrt, welche in einem Exsiccator stand.

Die Bestimmungen geschahen in der Weise, dass zunächst eine Wägung der Platinschale vorgenommen wurde. Dann entnahm man mittelst eines kleinen Glaslöffels der Schale eine Quantität Superoxyd und brachte dieselbe in ein Körbchen aus feinstmaschigem Platinnetz, dessen Drähte einen Durchmesser von 0·06 *mm* besassen. Zur Herstellung des Körbchens wurden an den vier nach aufwärts gebogenen Ecken des quadratischen Netzes Platindrähte eingehackt, welche ober der Mitte dieses vereint um einen stärkeren Platindraht, der zum Theil in ein Glasrohr eingeschmolzen war, geschlungen wurden. Das Glasrohr diente als Stiel, mit der Flüssigkeit in Berührung kam nur Platin. Eine Wägung der Schale nach dem Versuche gab die Menge des verbrauchten PbO_2 an. Nach Ablauf von einer Minute war die Lösung milchig und am Boden des Becherglases begann sich schneeig weisses Sulfat niederzuschlagen. Das Körbchen hatte nunmehr durch weitere drei bis vier Minuten als Rührvorrichtung zu dienen.

Es handelte sich nun darum, die Wasserwerthe der verschiedenen Bestandtheile, an welche Wärme durch den chemischen Vorgang abgegeben worden war, zu ermitteln. Der Wasserwerth des in die Mischung tauchenden Thermometerstückes wurde aus dem Volumen desselben zu 0·62 *g*, jener des Platinkörbchens aus dem Gewichte des Metalles zu 0·10 *g*, endlich der des Becherglases bis zu der Höhe, die das Niveau der Flüssigkeit einnahm, aus einer Wägung des Gefässes, dessen Rand nach Beendigung aller Versuche bis zu dieser Niveaufläche abgesprengt war, zu 6·65 *g* bestimmt worden. Zur Ermittelung des Wasserwerthes der Mischung in der nach jedem einzelnen Versuche vorhandenen Zusammensetzung bediente man sich des Calorifers von Andrews, dessen Wärmeinhalt zwischen zwei festen Marken wiederholt bestimmt und im Mittel zu 11·20 *K* gefunden wurde. Die jeweilige Mischung wurde hiezu vorher auf 10° C. abgekühlt, so dass man, da die Erwärmung durch den Calorifer zwischen 6°3 und 6°5 betrug und die Zimmertemperatur bei 18° lag, bei stets steigendem Thermometer

beobachtete. Zur Anbringung der nöthigen Correcturen für den Temperaturgewinn waren die den entsprechenden Zeiten zukommenden Temperaturen zu verzeichnen.

Ganz in gleicher Weise musste verfahren werden, wenn an Stelle des Calorifers die Erwärmung das im Körbchen befindliche pulverförmige PbO_2 besorgte; 3 *g* der Substanz erhöhten die Temperatur der Mischung um 5°5 C.

Das zu den Messungen verwendete Thermometer wurde in dem Intervalle, innerhalb dessen die Ablesungen geschahen, mit einem Normalthermometer aus Jenenser Glas im Wasserbade verglichen. Darauf ermittelte man die Fundamentalpunkte des letzteren und calibrirte es nach dem Rudberg'schen Verfahren durch Ablösen und Verschieben von Quecksilberfäden in der Länge von 50°, 30°3 und 41°6. Die so erhaltenen Correctionen wurden auf die Angaben des Versuchsthermometers übertragen.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse der durchgeführten sechs Versuche zusammengestellt; sie befinden sich in genügender Übereinstimmung. Die erste Columne enthält die Menge des umgesetzten Superoxydes in Grammen, die zweite die durch den Process hervorgerufene Temperaturerhöhung der Mischung. In der dritten ist die procentuelle Zusammensetzung von 100 cm^3 Säure, in der vierten die durch den Calorifer erzeugte Steigerung der Temperatur angegeben; in der letzten Columne endlich befinden sich die auf ein Grammmolekül PbO_2 (238·2 *g*) bezogenen Resultate in rationellen Calorien.

PbO_2	$\tau - t$	Concentration der Säuremischung	$\tau' - t'$	c'
1. 2·5081	4°60	12·2 *g* HCl 4·3 *g* SO_2	6°40	773·1
2. 2·2214	4·05	13·1 *g* HCl 4·5 *g* SO_2	6·48	759·2
3. 2·8639	5·27	12·2 *g* HCl 5·1 *g* SO_2	6·43	771·8
4. 3·0235	5·55	12·2 *g* HCl 5·1 *g* SO_2	6·38	767·4
5. 3·0178	5·47	12·2 *g* HCl 5·1 *g* SO_2	6·34	771·1
6. 2·9278	5·26	12·2 *g* HCl 5·1 *g* SO_2	6·36	761·4

Die grössten Abweichungen von einander liefern die Versuche 1 und 2, sie betragen $1 \cdot 8^0/_0$. Als Mittelwerth ergibt sich

$$c' = 767 \cdot 3.$$

Man erhält somit nachstehende thermochemische Daten:

$$\left.\begin{array}{r} PbO_2 + H_2SO_3\, aq = PbSO_4 + Aq + 767\, K \\ PbO_2 + SO_2^* = PbSO_4 + 844\, K \\ PbO_2 + H_2^* = PbO + H_2O + 583\, K \\ PbO_2 = PbO + O^* - 101\, K \end{array}\right\} \quad (8)$$

* Gas.

Es darf nicht verschwiegen werden, dass die Resultate in (8) mit einem Fehler behaftet sind. Das im Wasser unlösliche Bleisulfat löst sich nämlich theilweise in Salzsäure von der angewendeten Concentration. In der Zahl 767 ist daher auch die Lösungswärme eines Bruchtheiles des entstandenen $PbSO_4$ in HCl enthalten.[1]

Für die thermochemische Energie des Secundärelementes ergibt sich die Gleichung

$$E_c = PbO_2 + 2\, H_2SO_4\, aq + Pb = 2\, PbSO_4\, Aq + 870\, K. \quad \text{(III)}$$

Nimmt man die Constante des Faraday'schen Gesetzes zu 96540 Coulomb an, erwägt man ferner, dass der Einheit der elektrischen Energie $0 \cdot 00239\, K$ entsprechen, so kommen unter Berücksichtigung, dass Blei ein zweiwerthiges Metall ist, $461 \cdot 5\, K$ auf ein Volt. Die aus den thermochemischen Grössen berechnete elektromotorische Kraft des Elementes folgt daraus zu

$$1 \cdot 885 \text{ Volt.}$$

Wie schon eingangs erwähnt, liegt der vorliegenden Berechnung die Annahme zu Grunde, dass sämmtliche im Elektrolyte enthaltene Säure zur Bildung des Salzes verbraucht wird.

In der Untersuchung, welche über die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft vom Säuregehalte angestellt wurde,[2]

---

[1] Man vergleiche übrigens die Anmerkung auf Seite 288.

[2] Streintz, Wied. Ann., 46, S. 458, 1892.

zeigte es sich, dass das Element, dessen Säure die geringste von den verwendeten Concentrationen (spec. Gew. 1·055) hatte, die elektromotorische Kraft 1·900 Volt besass.

Mit Rücksicht auf die mannigfaltigen Fehler, welche sich der thermochemischen Rechnung gemäss aus fremdem und eigenem Beobachtungsmaterial ergeben, wird man dieses nahe Zusammentreffen der Werthe für die elektromotorische Kraft zum Theile einem günstigen Zufalle zuzuschreiben haben. Immerhin aber dürfte diese Mittheilung als ein Kriterium dafür anzusehen sein, dass sich die Processe im Secundärelemente in der geschilderten, verhältnissmässig einfachen Weise abspielen.

XIV. SITZUNG VOM 25. MAI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1894) des 103. Bandes, Abtheilung II. b, der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. F. Exner übersendet eine im physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn M. v. Smoluchowski, betitelt: »Akustische Untersuchungen über die Elasticität weicher Körper«.

Ferner übersendet Herr Prof. F. Exner eine in demselben Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Bruno Piesch, betitelt: »Änderung des elektrischen Widerstandes wässeriger Lösungen und der galvanischen Polarisation mit dem Drucke«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Dr. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien von dem Assistenten daselbst, dipl. Chemiker Carl Mangold, betitelt: »Einige Beiträge zur Kenntniss der Ricinusöl-, Ricinelaïdin- und Ricinstearolsäure«.

Der Secretär legt eine von Prof. J. V. Janovsky und Herrn K. Hanofsky in Reichenberg eingesendete Abhandlung vor, betitelt: »Analyse des Maffersdorfer Sauerbrunnens«.

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine ichthyologische Abhandlung unter dem Titel: »Ichthyologische Beiträge« (XVII.) und beschreibt in der-

selben einige neue Arten, deren Mehrzahl von Dr. Holub in Südafrika entdeckt wurden.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun überreicht eine Abhandlung von Dr. Eugen v. Halácsy in Wien, betitelt: »Beitrag zur Flora von Aetolien und Acarnanien«.

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, überreicht eine Abhandlung betitelt: »Ein Beitrag zur Kenntniss der 26-tägigen Periode des Erdmagnetismus«.

Herr Prof. Dr. J. Schaffer, Assistent am histologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine zweite vorläufige Mittheilung über den feineren Bau der Thymus, betitelt: »Über die Thymusanlage bei Petromyzon Planeri«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Chiru C., Canalisation des Rivières et les Irrigations. (Avec la charte hydrographique de la Roumanie.) — (Abhandlung in rumänischer Sprache.) Bukarest, 1893; 8°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XV. SITZUNG VOM 7. JUNI 1894.

In Verhinderung des Herrn Vicepräsidenten übernimmt Herr k. und k. Intendant Hofrath Ritter v. Hauer den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—II (Jänner und Februar 1894) des 103. Bandes, Abtheilung II. a, der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner übersendet im Auftrage Ihrer königlichen Hoheit der durchlauchtigsten Frau Prinzessin Therese in Baiern eine »Vorläufige Mittheilung über einige neue Fischarten aus den Seen von Mexico«.

Herr Prof. Dr. V. Hilber an der k. k. Universität in Graz übersendet die Ergebnisse seiner im Auftrage der kaiserl. Akademie 1893 unternommenen Reise als vorläufige Mittheilung unter dem Titel: »Reise in Nordgriechenland und Makedonien«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über das Spectrum des Kaliums, Natriums und Cadmiums bei verschiedenen Temperaturen«, von Regierungsrath Director Dr. J. M. Eder und Herrn E. Valenta in Wien.
2. »Zur Einwirkung der Anilinbasen auf Benzoin«, von Dr. Br. Lachowicz in Lemberg.

Ferner legt der Secretär zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, und zwar:

1. Von den Herren Adam Walcz und Henryk Olechowski in Lemberg, welches angeblich die Skizze einer Abhandlung über eine technische Erfindung enthält;
2. von Herrn Carl Moser in Wien mit der Aufschrift: »Selbstwirkende Regulatorbremse«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übergibt unter dem Titel: »Vergleichende physiologische Untersuchungen über die Keimung europäischer und tropischer Arten von *Viscum* und *Loranthus*« die vierte »pflanzenphysiologische Mittheilung aus Buitenzorg«.

Herr Prof. Dr. Oscar Simony überreicht eine von Herrn Dr. E. Suchanek in Wien ausgeführte Arbeit: »Über die dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen«.

Folgerungen aus Amagat's Versuchen

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1894.)

Die Untersuchungen Amagat's über das Verhalten comprimirter Flüssigkeiten haben eine Reihe wichtiger Thatsachen kennen gelehrt, deren theoretische Bedeutung vorerst noch nicht absehbar ist.

Allgemein und als augenfälligstes Resultat ergab sich, dass die Zunahme, welche der Ausdehnungscoëfficient einer Flüssigkeit mit steigender Temperatur gewöhnlich zeigt, durch Compression sich vermindert, wobei selbst der stärkste Druck noch keine Grenze erreicht, so dass jener Coëfficient schliesslich mit steigender Temperatur nicht mehr zu-, sondern abnimmt, also eine völlige Umkehrung des gewöhnlichen Verhaltens eintritt. Es dürfte schwer sein, diese bedeutungsvolle Thatsache mit der kinetischen Anschauung vom Wesen der Wärme in Einklang zu bringen, und es ist bisher, wie ich glaube, auch nicht versucht worden.

Dem ausgesprochenen Satze gemäss ist für die Flüssigkeiten allgemein

$$\frac{d^2 a}{dp dt} < 0$$

oder negativ, wobei

$$a = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

der hierdurch definirte Ausdehnungscoëfficient ist und p, t, v die gewöhnliche Bedeutung haben.

Wenn $\frac{d^2a}{dpdt}$, wie es nach Amagat innerhalb der Grenzen seiner bezüglichen Versuche der Fall war, stets negativ bleibt, also der für gewöhnlich positive Quotient $\frac{da}{dt}$ bei jeder Temperatur durch Compression beständig abnimmt und endlich negativ wird, dann muss der für gewöhnlich negative Quotient $\frac{da}{dp}$ bei jeder Compression durch Temperaturerniedrigung beständig zunehmen und endlich positiv werden. Diese Folgerung ist theoretisch unanfechtbar; für die Wirklichkeit ist aber zu beachten, dass eine Flüssigkeit durch Erkalten zuletzt immer erstarrt, wobei ihre Substanz eine Veränderung der Structur erfährt und ihr Verhalten sich mehr oder weniger sprungweise modificirt. Man kann daher nur sagen, dass jedenfalls, je tiefer der Erstarrungspunkt einer Flüssigkeit liegt, desto mehr Aussicht vorhanden sein muss, die erwähnte Folgerung an ihr vollständig verificirt zu sehen; es wird dabei weniger auf die absolute Lage jenes Punktes, als vielmehr darauf ankommen, dass er tief genug unterhalb der kritischen Temperatur liegt, deren Höhe für den Gang der Wärmeausdehnung unter gleichen Versuchsbedingungen am meisten massgebend erscheint. In dieser Hinsicht dürfte neben dem Wasser besonders das Quecksilber in Betracht kommen.

Halt- und Wendepunkte der Wärmeausdehnung.

Denkt man sich eine Flüssigkeit unter einem den kritischen um etwas übersteigenden Drucke stehend, so hat ihr Ausdehnungscoëfficient a bei einer Temperatur etwas ober der kritischen ein sehr starkes Maximum, wofür

$$\frac{da}{dt} = 0$$

ist. Bei einer Temperatur unterhalb seines Maximums hat a einen Wendepunkt, wo nämlich die Geschwindigkeit seiner Zunahme am grössten, also $\frac{da}{dt}$ ein Maximum und

$$\frac{d^2a}{dt^2} = 0$$

ist. Wie jener Werth von a wird auch dieser ähnlich starke Werth von $\frac{da}{dt}$ durch Compression vermindert.

Es sei die Flüssigkeit unter dem vorausgesetzten Drucke bis zur Temperatur des Wendepunktes von a erwärmt. Drückt man sie dann stärker zusammen, indem man zugleich die Temperatur so regelt, dass a immer in seinem Wendepunkte und somit die bezügliche obige Bedingung erfüllt bleibt, so hat man die Gleichung

$$d\,\frac{da}{dt} = \frac{d^2a}{dpdt}\,dp,$$

wonach $\frac{da}{dt}$ auch in diesem Falle, wie bei constanter Temperatur, mit der Zunahme des Druckes abnimmt. Man kann so die Compression fortsetzen, bis

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{da}{dt} = 0$$

wird. Hier ist das Maximum von a auf dessen Wendepunkt gerückt und fällt mit einem Minimum zusammen (erster Halt- und Wendepunkt). Für Drucke ober dieser Grenze ist $\frac{da}{dt}$ im Wendepunkte und daher als Maximum negativ; das für den kritischen Zustand unendlich grosse Maximum von a ist dann vollständig unterdrückt und verschwunden.

Aus diesem Halt- und Wendepunkte von a geht, gemäss der aus $\frac{da}{dt} = 0$ folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{d^2a}{dt^2}\,dt + \frac{d^2a}{dpdt}\,dp = 0,$$

bei Abnahme des Druckes das Maximum, an Grösse zunehmend, zunächst auf höhere Temperaturen über, und es mag sein schliesslicher Verlauf bis zum kritischen Punkte vorläufig ausser Betracht bleiben; das Minimum geht gleichzeitig, ebenfalls an Grösse zunehmend, auf immer tiefere Temperaturen herab.

Nach Amagat's Versuchen wird der Quotient $\frac{da}{dt}$, wenn er durch Compression negativ oder Null ist, durch Abnahme des Druckes, welches auch die Temperatur sei oder wie immer sie wechseln mag, jedenfalls zuletzt positiv. Jenes mit abnehmender Compression auf tiefere Temperaturen fortschreitende Minimum von a muss daher endlich auf einen Druck fallen, welcher der kleinste ist, wobei noch $\frac{da}{dt} = 0$ sein kann; für diesen kleinsten Druck wird in der entsprechenden obigen Gleichung das Differential $dp = 0$ und somit ist dann auch

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{da}{dt} = 0;$$

hier trifft das Minimum von a mit einem Wendepunkte und einem Maximum zusammen (zweiter Halt- und Wendepunkt).

Von diesem Punkte aus kehrt bei Zunahme des Druckes das Minimum von a wieder auf höhere Temperaturen zurück, während das Maximum, wegen des negativen Werthes von $\frac{da}{dp}$ an Grösse abnehmend, auf immer tiefere Temperaturen hinabgeht.

Denken wir uns jetzt eine Flüssigkeit, für welche $\frac{da}{dp}$ positiv ist, so dass a bei einem ohnehin für gewöhnlich positiven Werthe von $\frac{da}{dt}$ sowohl durch Erwärmung, als auch durch Compression zunimmt. Es lässt sich dann bei Erniedrigung der Temperatur durch gleichzeitigen Druck bewirken, dass a constant bleibt, wobei die Gleichung

$$\frac{da}{dt} dt + \frac{da}{dp} dp = 0$$

stattfinden muss. Da nach den erwähnten Versuchen ein positiver Werth von $\frac{da}{dt}$ bei jeder Temperatur durch Compression endlich Null wird und das Vorzeichen wechselt, so muss man

bei einer unter der bezeichneten Bedingung fortgesetzten Compression jedenfalls zu einem Drucke kommen, welcher der grösste ist, wobei dieser Quotient noch positiv sein kann und wo derselbe also verschwinden muss. Für diesen grössten Druck wird in der vorigen Gleichung das Differential $dp = 0$ und zugleich

$$\frac{da}{dt} = 0;$$

aus derselben Gleichung ergibt sich aber für diesen Fall

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{da}{dp} \cdot \frac{d^2p}{dt^2} = 0,$$

woraus folgt, dass hier, weil der Druck ein Maximum ist, $\frac{d^2a}{dt^2}$ positiv und a ein Minimum sein muss. In einer Flüssigkeit, für welche $\frac{da}{dp}$ positiv ist, gibt es demnach bei jedem Drucke eine Temperatur, bei welcher a ein Minimum wird; dasselbe geht dem Amagat'schen Satze gemäss mit steigender Compression auf höhere Temperaturen über.

In einer Flüssigkeit, für welche $\frac{da}{dp}$ bei hohen Temperaturen negativ und bei niedrigen positiv ist, geht nach dem Gesagten bei hinreichender Compression einerseits ein Maximum von a mit negativem $\frac{da}{dp}$ von oben her auf immer tiefere Temperaturen hinab, während anderseits ein Minimum mit positivem $\frac{da}{dp}$ von unten her zu immer höheren Temperaturen hinaufgeht; diese zwei Punkte müssen endlich in einem Wendepunkte zusammentreffen, für welchen

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{da}{dt} = 0$$

wird (dritter Halt- und Wendepunkt). Da der Werth von $\frac{da}{dp}$ für das Maximum negativ und für das Minimum positiv ist,

so muss derselbe im Coincidenzpunkte verschwinden und das Vorzeichen wechseln.

Für den so erreichten Punkt ist daher einerseits wegen $\frac{da}{dt} = 0$:

$$\frac{d^2a}{dt^2}dt + \frac{d^2a}{dp\,dt}dp = 0,$$

und anderseits wegen $\frac{da}{dp} = 0$:

$$\frac{d^2a}{dp^2}dp + \frac{d^2a}{dpdt}dt = 0;$$

durch Verbindung dieser zwei Differentialgleichungen ergibt sich:

$$\frac{d^2a}{dp^2}dp^2 = \frac{d^2a}{dt^2}dt^2$$

und man sieht, dass hier mit dem einen auch der andere der beiden zweiten Differentialquotienten von a verschwindet und folglich

$$\frac{d^2a}{dp^2} = \frac{da}{dp} = 0$$

ist. Der hierdurch definirte Zustand einer Flüssigkeit ist aber derjenige, welchen ich in einer früheren Abhandlung,[1] wo ich denselben auf eine andere Weise erschloss, den peripetischen nannte. Man kann daher sagen: Im peripetischen Punkte einer Flüssigkeit geht ihr Ausdehnungscoëfficient sowohl als Function der Temperatur wie als Function des Druckes aus einem Maximum in ein Minimum über.

Von diesem durch Compression erreichten merkwürdigen Zustande aus kehrt bei Abnahme des Druckes das der Bedingung $\frac{da}{dt} = 0$ entsprechende Maximum von a mit negativen Werthen von $\frac{da}{dp}$ wieder auf höhere Temperaturen zurück,

[1] Diese Berichte, Bd. 98, Abth. II. a, S. 1341.

während das der gleichen Bedingung entsprechende Minimum mit positiven Werthen von $\frac{da}{dp}$ auf immer tiefere Temperaturen fortgeht.

Verlauf der Wärmeausdehnung für constanten Druck.

Im Vorigen haben sich für den Verlauf von a als Function der Temperatur in einer Flüssigkeit drei Wendepunkte und vier Haltpunkte, nämlich zwei Maxima und zwei Minima, ergeben. Der erste oder obere Wendepunkt fällt für den kritischen Zustand mit dem dann unendlich grossen Maximum von a zusammen; für Drucke unter dem kritischen bleiben daher zwei Wendepunkte, der mittlere und der obere, übrig; in jenem ist $\frac{da}{dt}$ ein Minimum, in diesem ein Maximum. Der mittlere Wendepunkt scheint bei den meisten Flüssigkeiten innerhalb oder nicht weit ausserhalb des Intervalles der gewöhnlichen Versuchstemperaturen zu fallen und ist dann aus empirischen Ausdehnungsformeln, wenn sie eine hinreichende Zahl von Constanten enthalten, immer nachweisbar; er liegt bei Wasser ober 100°, bei anderen Flüssigkeiten tiefer, sehr tief bei Alkohol.

Lässt man eine Flüssigkeit von ihrem kritischen Zustande aus bei constantem Drucke erkalten, so nimmt der Quotient $\frac{da}{dt}$ zuerst schnell, aber allmälig sich verlangsamend ab, bis er bei der Temperatur des mittleren Wendepunktes ein Minimum wird und weiterhin zunimmt. Dieses durch Compression abnehmende Minimum von $\frac{da}{dt}$ ist nun bei dem vorausgesetzten kritischen Drucke entweder noch positiv oder schon negativ; im ersten Falle nimmt der Ausdehnungscoëfficient a sowohl vor wie nach Überschreitung des Wendepunktes ununterbrochen ab, im zweiten Falle hingegen hat derselbe ober dem Wendepunkte ein mehr oder weniger ausgeprägtes Minimum und unterhalb ein entsprechendes Maximum. Bei schwachen Drucken, wie der atmosphärische ist, findet fast allgemein nur das erstere Verhalten statt; verstärkt man aber dann den Druck mehr und mehr, so kommen endlich ein vom Wendepunkte aus

nach oben fortschreitendes Minimum und ein von demselben Punkte aus nach unten fortschreitendes Maximum von a zur Entwicklung. Die Versuche Amagat's lassen diesen Verlauf besonders am Äther, wo der Wendepunkt auf eine mittlere Temperatur fällt, sehr deutlich ersehen.

Wenn in Flüssigkeiten, deren kritische Temperatur mässig hoch ist, schon der mittlere Wendepunkt auf eine gewöhnliche oder auch niedrige Temperatur fällt, so muss natürlich der untere Wendepunkt, wenn nicht früher die Erstarrung eintritt, unterhalb der unteren Grenze der gewöhnlichen Versuche liegen. Nur bei Flüssigkeiten, deren kritische Temperatur besonders hoch ist, wird man erwarten dürfen, dass dieser Wendepunkt relativ hoch liegt und, wenn die Erstarrungstemperatur niedrig ist, ober derselben eintritt. Eine solche Flüssigkeit ist, wie ich glaube, das Quecksilber.

Der Werth von a nimmt bei Quecksilber[1] in niedriger Temperatur mit deren Erhöhung ab, bis er etwa bei 80° ein Minimum wird und dann zunimmt. In diesem Verlaufe wächst also $\frac{da}{dt}$ vorerst. Wie andere Flüssigkeiten, z. B. das Wasser ober 100°, aber jedenfalls bei einer viel höheren Temperatur, wird nämlich auch das Quecksilber einen Wendepunkt haben, wo jener Quotient ein Minimum ist. Von da an nimmt derselbe mit sinkender Temperatur zu und muss folglich bei einem gewissen tieferen Punkte ein Maximum werden; dies ist der untere Wendepunkt und das erwähnte, unterhalb desselben fallende Minimum von a ist ein unteres Minimum, für welches daher $\frac{da}{dp}$ positiv sein muss. Man kommt somit zu dem Schlusse, dass der Ausdehnungscoëfficient des Quecksilbers in gewöhnlicher Temperatur durch Compression zunimmt. Diese Folgerung entbehrt indessen noch der experimentellen Bestätigung. Das Quecksilber würde hiernach, aber bis zu einer viel höheren Temperatur, ein ähnliches Verhalten zeigen wie das Wasser bis 63°.

---

[1] Nach Wüllner's Ausdehnungsformel in Poggendorf's Annalen, Bd. 153, S. 444.

Wenn diese Folgerung richtig ist, muss das bei Quecksilber vorkommende Minimum von a mit dem Drucke abnehmen. Bei der Kleinheit des gewöhnlichen Druckes hat eine solche Abnahme natürlich sehr bald eine Grenze; wenn es aber möglich wäre, die Flüssigkeit mechanisch oder durch einen allseitigen äusseren Zug stark auszudehnen, so würde man durch hinreichende Dehnung jenes Minimum von a auf Null bringen und negativ machen können.

Es lässt sich eine Flüssigkeit mit positivem $\frac{da}{dp}$ denken, für welche das untere Minimum von a einen gleichen Werth hat wie für Quecksilber, aber nicht unter dem atmosphärischen, sondern unter einem sehr starken Drucke. Indem mit dessen Verminderung jenes Minimum abnimmt, kann dasselbe bei einem gewissen Drucke Null werden; ein noch kleinerer Druck macht es dann negativ. Diesfalls gibt es jetzt zwei Temperaturen, wobei $a = 0$ wird: Die eine ist niedriger, die andere höher als diejenige, bei welcher a sein Minimum hat; bei ersterer ist die Dichte ein Minimum, bei letzterer ist sie ein Maximum. Mit Abnahme des Druckes geht der untere Nullwerth von a oder das Dichteminimum auf niedrigere, der obere Nullwerth oder das Dichtemaximum auf höhere Temperaturen über. Die Flüssigkeit würde also, von einer höheren Temperatur her erkaltend, zuerst ein Maximum und bei einer entsprechend niedrigen Temperatur ein Minimum ihrer Dichte erreichen. Es ist nun auch eine Flüssigkeit denkbar, welche durch Erkalten zwar ein Dichtemaximum erreicht, aber bald nach dessen Überschreitung erstarrt. Dies ist der Fall des Wassers.

Befindet sich Wasser bei dem gewöhnlichen Drucke im Dichtemaximum und ist somit für dasselbe $a = 0$, so kann man bei Erniedrigung der Temperatur durch Compression bewirken, dass diese Bedingung erfüllt bleibt. Da der für ein Dichtemaximum selbstverständlich positive Werth von $\frac{da}{dt}$ bei der auf solche Weise fortgesetzten Compression jedenfalls endlich Null wird, so muss man in deren Verlauf zu einem grössten Drucke kommen, wobei noch $a = 0$ und die Dichte ein Maximum sein kann. Für diesen Druck ist nach der bezüglichen

obigen Begründung $\frac{d^2a}{dt^2}$ positiv und der Nullwerth von a ein Minimum. Da der genannte Quotient für $a = 0$ bei 4° bekanntlich negativ ist, so muss er während des Überganges zu jenem letzten oder untersten Dichtemaximum irgendwo das Vorzeichen gewechselt haben; dies ist der untere, einem Maximum von $\frac{da}{dt}$ entsprechende Wendepunkt, welcher dem unteren Minimum von a vorangehen muss.

Bei dem grössten für $a = 0$ möglichen Drucke fällt das Maximum der Dichte mit dem entsprechenden, durch die Compression gleichzeitig aufwärts gerückten Minimum derselben zusammen (Halt- und Wendepunkt der Dichte). Das in diesem Punkte nullgleiche Minimum von a wird nun durch weitere Compression positiv; die Dichte der Flüssigkeit erreicht folglich dann bei keiner Temperatur mehr ein Maximum. Von einer diesbezüglichen Anomalie des Wassers kann daher nur insoferne die Rede sein, als bei demselben das bei anderen Flüssigkeiten gewöhnliche Verhalten erst unter einem sehr starken Drucke eintritt. Diesen Einfluss des Druckes hat Amagat auf Grund seiner Versuche ausführlich hervorgehoben.

Ob sich Wasser bei dem dazu nöthigen Drucke bis zu der jedenfalls sehr niedrigen Temperatur des untersten Dichtemaximums flüssig erhalten lässt, muss allerdings dahingestellt bleiben; die Möglichkeit scheint aber nicht unbedingt ausgeschlossen zu sein. Dass übrigens die Druckzunahme, welche zur Verschiebung des Dichtemaximums um 1° nöthig ist, mit steigender Compression, der Annäherung an ein Maximum derselben gemäss, kleiner wird, ist in Amagat's bezüglichen Angaben erkennbar ausgesprochen.

Erwähnenswerth ist noch, dass, weil das untere Minimum von a, mit steigender Compression auf höhere Temperaturen verschoben, schliesslich den peripetischen Punkt trifft, für diesen die Temperatur und der Druck nothwendig höher sind als für den Halt- und Wendepunkt der Dichte und dass folglich dort der Werth von a in jedem Falle positiv sein muss.

Man denke sich zum Schlusse eine Flüssigkeit so comprimirt, dass das obere, durch den kritischen Punkt bedingte

Maximum von a im oberen Wendepunkte mit dem bezüglichen Minimum coincidire. Dann ist $\frac{da}{dt} = 0$; lässt man jetzt bei constantem Drucke die Temperatur sinken, so wird dieser Quotient negativ, erreicht bei der Temperatur des mittleren Wendepunktes ein Minimum und nimmt dann zu, bis er bei einer niedrigen Temperatur wieder verschwindet; hier hat a ein Maximum und unterhalb desselben, jenseits des unteren Wendepunktes, ein Minimum. Durch stärkere Compression fallen endlich auch diese zwei Haltpunkte zusammen; der dann obwaltende Druck ist der peripetische. Für Drucke ober dieser Grenze nimmt a von einem beliebig tief liegenden Punkte an bis zu den höchsten erreichbaren Temperaturen ununterbrochen ab. Der gewöhnliche, nach der herrschenden Ansicht für selbstverständlich gehaltene Verlauf der Wärmeausdehnung erscheint dann vollständig umgekehrt. Die bisherigen Versuche Amagat's, obwohl bei den höchsten Drucken auf ein mässiges Temperaturintervall beschränkt, dürften in dieser Hinsicht schon gegenwärtig kaum einen Zweifel bestehen lassen.

Verlauf der Wärmeausdehnung für constante Temperatur.

Wenn in einer Flüssigkeit der für höhere Temperaturen stets negative Quotient $\frac{da}{dp}$ durch Erkalten positiv wird, so ist a im Punkte des Zeichenwechsels, wie für das Wasser auch experimentell feststeht, als Function des Druckes ein Maximum. Durch Compression nimmt dann a zuerst langsam, aber sich beschleunigend, ab; bei einem gewissen Drucke, einem Wendepunkte entsprechend, ist die Abnahme am schnellsten und wird dann wieder allmälig langsamer. Schliesslich muss a, der Existenz des peripetischen Punktes gemäss, stationär und ein Minimum werden; aber ein solches hat Amagat mit dem höchsten angewendeten Drucke bisher noch bei keiner Flüssigkeit erzielt. Der für das Maximum von a positive Quotient $\frac{da}{dt}$ wechselt, durch den genannten zweifachen Wendepunkt bedingt, bei dem Übergange das Vorzeichen und ist für das Minimum negativ.

Mit sinkender Temperatur kommen das Maximum und das Minimum, jenes auf grössere und dieses auf kleinere Drucke übergehend, einander immer näher, bis sie im peripetischen Punkte zusammenfallen; bei Temperaturen unterhalb dieses Punktes nimmt a durch Compression beständig zu und es ist nur noch ein Wendepunkt übrig, wo diese Zunahme am langsamsten ist.

Geht man von einem Punkte, wo a als Function des Druckes ein Maximum hat, zu dem der gleichen Temperatur entsprechenden Minimum unter der Bedingung über, dass dabei immer $\frac{da}{dp} = 0$ bleiben soll, so nimmt a zuerst, als Maximum verlaufend, verzögert ab, wird im peripetischen Punkte stationär und setzt dann, als Minimum verlaufend, seine Abnahme, nun beschleunigt, weiter fort.

Bei Quecksilber muss nach meiner betreffenden obigen Schlussfolgerung der peripetische Punkt jedenfalls höher liegen als das bei ungefähr 80° eintretende Minimum von a; es wird daher bei dieser Flüssigkeit der Ausdehnungscoëfficient für jede gewöhnliche Temperatur durch Compression beständig, wenn auch sehr langsam, zunehmen.

Bei Wasser nimmt a für 0° nach Amagat sowohl mit dem Drucke wie mit der Temperatur zwar noch etwas, aber schon sehr langsam zu; hier dürfte also der peripetische Punkt, wo a in beiden Beziehungen stationär ist, nicht weit von 0° entfernt liegen und durch einen erheblich stärkeren Druck als 3000 Atmosphären wirklich erreichbar sein.

Erhöht man die Temperatur von dem Punkte an, wo a bei dem atmosphärischen Drucke sein Maximum hat, so geht dieses auf kleinere und daher negativ werdende Drucke über, wobei die Flüssigkeit nicht mehr bestandfähig ist, und endlich fällt sogar auch der Wendepunkt auf solche Drucke; dann nimmt a durch Compression von Anfang an mit fortwährend sich vermindernder Geschwindigkeit ab. Bei Flüssigkeiten, deren kritischer Punkt mässig hoch liegt, tritt der letztere Fall thatsächlich schon bei gewöhnlichen Temperaturen ein.

Während sonach das Maximum von a von einer gewissen Temperatur an wegen der für diese Bedingung eintretenden

Instabilität der Flüssigkeit sich der Beobachtung entzieht und erst im kritischen Punkte wieder zum Vorschein kommt, geht das wegen Stärke der nöthigen Compression bisher dem Experimente gleichfalls unzugängliche Minimum mit steigender Temperatur auf höhere Drucke über, wobei, weil für dasselbe $\frac{da}{dt}$ negativ ist, a fortwährend abnimmt. Den schliesslichen Verlauf dieses Minimums, welches, sobald dessen Existenz sicher gestellt sein wird, eine wichtige Bedeutung erlangen dürfte, habe ich bereits in der oben citirten Abhandlung erörtert. Ich erwähne hier nur, dass ein durch hohe Temperatur bedingter Nullwerth und Zeichenwechsel von a jedenfalls zuerst in einem Minimum dieser Grösse eintreten wird.

Comprimirt man eine Flüssigkeit bei ihrer kritischen Temperatur, wo a als Function des Druckes ein Maximum $= \infty$ ist, so nimmt der diesbezügliche Werth des Productes pv zuerst ab, erreicht aber, wie man weiss, bald ein Minimum und fängt dann schnell zu wachsen an; hierbei nimmt das Product apv zuerst noch ab, muss aber ebenfalls bald ein Minimum werden, und erst nach dessen Überschreitung wird endlich auch der Eintritt des Minimums von a erfolgen. Immer aber, wenn bei Compression das Minimum von apv früher eintritt als dasjenige von a, muss letzteres noch positiv sein; sobald nämlich diese zwei Minima zusammenfallen, ist

$$a = \frac{da}{dp} = 0,$$

und die entsprechende Temperatur ist die niedrigste, wobei durch Erwärmung $a = 0$ (die Dichte ein Minimum) werden kann. Diese Temperatur liegt jedoch, wie es nach Amagat's Versuchen scheint, jedesmal weit ober der kritischen.

Verlauf der Zusammendrückbarkeit mit der Temperatur.

Zwischen dem Ausdehnungscoëfficienten a und der Zusammendrückbarkeit

$$c = -\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dp}$$

besteht ihrer Bedeutung gemäss allgemein die einfache Beziehung

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{da}{dp}.$$

Man sieht, dass, wenn a durch Compression abnimmt, c durch Erwärmung wächst, und dass umgekehrt, wenn a durch Compression wächst, c durch Erwärmung abnimmt. Ist a durch Druck ein Maximum, so ist, der Gleichung

$$\frac{d^2 c}{dt^2} = -\frac{d^2 a}{dp dt}$$

entsprechend, c durch Wärme ein Minimum.

Wie bei Wasser bis 63°, wird nach dem obigen auch bei Quecksilber, aber hier bis zu einem viel höheren Punkte, die Zusammendrückbarkeit mit steigender Temperatur abnehmen. Bisher liegt in dieser Hinsicht eine experimentelle Angabe nicht vor.

Wie für ein Maximum von a wird auch für das bei gleicher Temperatur durch hinreichende Compression zu erwartende Minimum wieder $\frac{dc}{dt} = 0$, wobei c gleicherweise wieder als Function der Temperatur ein Minimum ist. Beide Minima von c nähern sich mit sinkender Temperatur einander und im peripetischen Punkte fallen sie zusammen. Die hier stattfindende Temperatur ist die niedrigste, wobei die Zusammendrückbarkeit ein Minimum werden kann. Von diesem Punkte an nimmt dieselbe durch Erkalten, so lange die Flüssigkeit als solche bestehen bleibt, fortwährend zu.

Kritische Anomalie.

Denkt man sich eine Flüssigkeit unter einem den kritischen um etwas übersteigenden Drucke stehend, so hat ihre Zusammendrückbarkeit c bei einer Temperatur etwas ober der kritischen ein starkes Maximum, wofür

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

ist. Unterhalb ihres Maximums hat dieselbe einen Wendepunkt, wo sie am schnellsten zunimmt, und oberhalb einen zweiten Wendepunkt, wo sie am schnellsten abnimmt; für beide Wendepunkte ist

$$\frac{d^2c}{dt^2} = 0,$$

aber der Quotient $\frac{dc}{dt}$ ist im unteren ein Maximum und im oberen, wo er negativ ist, ein Minimum.

In dem Temperaturintervalle zwischen den zwei Wendepunkten und daher auch für das Maximum von c ist der Quotient $\frac{d^2c}{dt^2}$ negativ, wogegen derselbe unter- und oberhalb jenes Intervalles positiv ist. Vermöge der Gleichung

$$\frac{d^2c}{dt^2} = -\frac{d^2a}{dpdt}$$

ist folglich für Temperaturen innerhalb des genannten Intervalles

$$\frac{d^2a}{dpdt} > 0$$

oder positiv, während ausserhalb desselben, mit den Angaben Amagat's übereinstimmend, überall

$$\frac{d^2a}{dpdt} < 0$$

oder negativ ist. Jene durch die Existenz des kritischen Punktes bedingte Ausnahme vom gewöhnlichen Verhalten nenne ich die kritische Anomalie.

Für den kritischen Zustand fallen die zwei Wendepunkte von c mit dem dann unendlich grossen Maximum zusammen. Durch einen etwas stärkeren Druck, wie der vorausgesetzte ist, gehen die genannten drei Punkte mit ungleicher Geschwindigkeit, und daher sich von einander entfernend, alle zugleich auf höhere Temperaturen über. Die Verschiebung nach oben ist eine nothwendige Folge davon, dass im kritischen Punkte $\frac{dp}{dv} = 0$ ist und daher in seiner Nähe p und t für jede Zustands-

änderung annähernd so wechseln, als wenn v constant wäre. Das Intervall zwischen den Wendepunkten von c muss also von Anfang an mit steigender Compression sich erweitern.

Nach dem Gesagten ist der Quotient $\frac{d^3c}{dt^3}$ im unteren Wendepunkte negativ, im oberen positiv; zwischen beiden liegt daher eine Temperatur, bei welcher

$$\frac{d^3c}{dt^3} = 0$$

und somit der negative Werth von $\frac{d^2c}{dt^2}$ ein Minimum ist. Für den kritischen Zustand ist dieses Minimum $= -\infty$; durch Compression wird es schnell abgeschwächt, und es muss einen Druck geben, der dasselbe auf Null bringt. Lässt man bei der Compression die Temperatur so wechseln, dass $\frac{d^2c}{dt^2}$ immer in seinem Minimum und also die entsprechende obige Bedingung erfüllt bleibt, so wird man demnach zu einem Drucke kommen, wobei

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{d^3c}{dt^3} = 0$$

ist; hier fallen die zwei Wendepunkte zusammen und die kritische Anomalie ist verschwunden. Das Temperaturintervall, in welchem der Amagat'sche Satz nicht gilt, erweitert sich also durch Compression zuerst, erreicht dabei eine grösste Erstreckung und zieht sich dann zusammen, bis es zuletzt wieder, wie im kritischen Punkte, auf Null reducirt ist und von da ab entfällt.

Mit demjenigen von c fällt für den kritischen Zustand das Maximum von a zusammen. Ein etwas stärkerer Druck verschiebt auch dieses nach oben; da es zugleich an Grösse abnimmt, ist dann für dasselbe $\frac{da}{dp}$ negativ und somit $\frac{dc}{dt}$ positiv, woraus folgt, dass es nun zwischen dem Maximum und dem unteren Wendepunkte von c liegt. Es zeigt also eine Tendenz, sich dem letzteren Punkte zu nähern.

Der Verschiebung des Maximums von a nach oben entspricht der kritischen Anomalie gemäss ein positiver Werth

von $\frac{d^2 a}{dp dt}$. Da nun dieser Quotient, wo er positiv ist, bei hinreichender Compression nach und nach überall das Vorzeichen wechselt, so muss bei einem gewissen Drucke ein solcher Wechsel auch für die Temperatur des Maximums von a erfolgen; dann hat letzteres die höchste Temperatur erreicht, auf welche es fallen kann, und zugleich fällt es dabei mit dem unteren Wendepunkte von c zusammen. Durch weitere Compression geht dasselbe, diesen Punkt hinter sich lassend, auf immer tiefere Temperaturen herab, bis es mit dem gleichzeitig von unten her kommenden Minimum in dem bezüglichen Wendepunkte zusammentrifft.

Hiermit ist die im Früheren (S. 345) offen gelassene Frage nach dem Verlaufe dieses Maximums von a erledigt. Aus dem als erster Halt- und Wendepunkt der Wärmeausdehnung bezeichneten Zustande geht dasselbe nämlich bei Abnahme des hier den kritischen weit übersteigenden Druckes zunächst auf höhere Temperaturen über, erreicht dabei eine höchste Temperatur ober der kritischen und geht sodann immer tiefer herab, bis es bei dem kritischen Drucke auf die kritische Temperatur fällt.

Zusammendrückbarkeit ober der kritischen Temperatur.

Für das Maximum von c bleibt immer $\frac{da}{dp} = 0$, d. h. es ist bei demselben jedesmal a als Function des Druckes ein Maximum. Aus der bezüglichen Gleichung

$$\frac{d^2 c}{dt^2} dt = \frac{d^2 a}{dp^2} dp$$

ersieht man daher, dass das Maximum von c, so lange ein solches besteht, durch Compression nach oben zu gehen fortfährt.

Von jenem Zustande hoher Compression aus, wobei nach dem Vorigen die Wendepunkte von c coincidiren, geht der obere, d. h. derjenige, für welchen $\frac{dc}{dt}$ ein Minimum ist, bei Abnahme des Druckes auf höhere Temperaturen über, wogegen derselbe

vom kritischen Zustande aus, wie erwähnt wurde, bei Zunahme des Druckes auf höhere Temperaturen übergeht. Es gibt folglich für diesen Punkt eine höchste Temperatur, auf welche er fallen kann; hat er dieselbe durch Druck erreicht, so kehrt er auf stärkeren Druck um und geht zu tieferen Temperaturen zurück, also dem gleichzeitig von unten her nach oben fortschreitenden Maximum entgegen. Diese zwei Punkte müssen daher bei einem gewissen Drucke zusammentreffen; dann ist

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d^2c}{dt^2} = 0,$$

d. h. hier fällt das Maximum von c bei dem höchsten dafür möglichen Drucke mit einem Minimum zusammen (Halt- und Wendepunkt der Zusammendrückbarkeit). Von diesem Zustande aus geht bei Abnahme des Druckes einerseits das Maximum auf tiefere Temperaturen zurück, bis es dabei auf den kritischen Punkt trifft, während andererseits das Minimum (wie das Maximum mit der Bedingung $\frac{da}{dp} = 0$ zusammenfallend) auf immer höhere Temperaturen fortgeht.

Für Drucke ober dem kritischen bis zu einer gewissen Grenze hat demnach die Zusammendrückbarkeit c bei einer Temperatur ober der kritischen ein Maximum und bei einer entsprechend höheren Temperatur ein Minimum; für Drucke ober jener Grenze hat dieselbe kein Maximum und kein Minimum mehr, sondern nimmt mit steigender Temperatur ununterbrochen zu.

Es sei noch hervorgehoben, dass im Zustande der Coincidenz der Wendepunkte von c der Nullwerth von $\frac{d^2c}{dt^2}$ ein Minimum und somit $\frac{d^4c}{dt^4}$ positiv ist. Für höhere Temperaturen sind daher die ersten vier Differentialquotienten von c sämmtlich positiv. Ich halte diese Folgerung für weittragend; sie scheint anzudeuten, dass eine comprimirte Flüssigkeit bei Temperaturen ober der kritischen, also ein Gas, bei fortgesetzter Erwärmung durch stetiges und mit Beschleunigung fortschreitendes Wachsen der Zusammendrückbarkeit einem bisher unbe-

kannten Zustande von Instabilität, der Existenz eines oberen kritischen Punktes entsprechend, zugeht.

Wärmeausdehnung stark comprimirter Gase.

Nach vorstehender Bemerkung lässt sich jede gasförmige Substanz durch Druck und Wärme auf einen Zustand bringen, wobei dem Zusammenhange zwischen a und c gemäss die Differentialquotienten

$$\frac{da}{dp}, \frac{d^2a}{dpdt}, \frac{d^3a}{dp\,dt^2}, \frac{d^4a}{dp\,dt^3}$$

sämmtlich negativ sind. Man kann folglich dann jedesmal durch Compression bewirken, dass die Werthe von

$$\frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}, \frac{d^3a}{dt^3}$$

mit einander negativ ausfallen, dass also, während der Ausdehnungscoëfficient mit steigender Temperatur beständig abnimmt, zugleich die Geschwindigkeit seiner Abnahme immer grösser wird. Durch solchen ersichtlich an das Verhalten stark comprimirter Flüssigkeiten sich anschliessenden Verlauf muss, wie es scheint, bei hinreichender Erwärmung nothwendig endlich $a = 0$, nämlich die Dichte ein Minimum werden, und zwar umso früher, je höher der ausgeübte Druck ist.

Indem ein so erreichtes Dichteminimum durch stärkeren Druck auf immer tiefere Temperaturen herabgeht, tritt zuletzt, weil a durch Compression ein Minimum wird, der schon oben erwähnte Zustand ein, für welchen

$$\frac{da}{dp} = a = 0$$

und die bezügliche Temperatur die niedrigste ist, wobei die Dichte ein Minimum werden kann. Diesen Zustand wenigstens am Wasserstoff experimentell zu verwirklichen, dürfte vielleicht nicht unausführbar sein. Vom genannten Punkte an als negativ verlaufend und in diesem Sinne beständig wachsend, würde der minimale Ausdehnungscoëfficient bei einer immerhin schon

sehr hohen Temperatur den oberen kritischen Zustand, wofür $a = -\infty$ wäre, bedingen. Temperaturen von entsprechender Höhe darf man jedenfalls in der Astrophysik für annehmbar halten.

Das Gay-Lussac'sche Gesetz.

Bezeichnet T die absolute Temperatur, so kann der Bedeutung von a gemäss die Gleichung

$$aT = 1$$

als der Ausdruck des Gay-Lussac'schen Gesetzes gelten.

Der Ausdehnungscoëfficient a ist für die Gase erfahrungsmässig auch unter gewöhnlichen Umständen vom Drucke nicht unabhängig; nach Amagat wächst er mit demselben, wird bei hinreichender Compression ein Maximum und nimmt dann ab. Angenommen also, es sei das Gay-Lussac'sche Gesetz für irgend eine Temperatur eines Gases von gewöhnlicher Dichte genau giltig und somit $aT = 1$, so wird durch Compression $aT > 1$; setzt man dieselbe fort, bis a sein Maximum überschritten hat und abnimmt, so kommt man zu einem Drucke, wobei wieder $aT = 1$ und daher das genannte Gesetz bei gleicher Temperatur ein zweitesmal genau giltig ist.

Den Einfluss der Temperatur betreffend, wird das Product aT für ein gewöhnliches Gas durch Erkalten nach und nach entschieden grösser und folglich umgekehrt durch Erwärmen kleiner. Bei gleichzeitiger Veränderung des Druckes und der Temperatur muss daher, wenn aT constant bleiben soll, die Gleichung

$$\frac{d(aT)}{dt} dt + T \cdot \frac{da}{dp} dp = 0$$

bestehen. Wie man sieht, geht die Erfüllung des Gay-Lussac'schen Gesetzes mit steigender Temperatur auf grössere Drucke über, bis auf solche Weise $\frac{da}{dp} = 0$, nämlich a ein Maximum wird; die dann stattfindende Temperatur ist die höchste, bei welcher eine Erfüllung des Gesetzes überhaupt möglich ist. Bei weiterer Compression kehrt die demselben entsprechende Bedingung, das Maximum von a

überschreitend, auf tiefere Temperaturen zurück, und es gibt aus diesem Grunde für jede Temperatur unterhalb jener höchsten zwei Drucke, wobei das Gesetz genau zutrifft.

Die Möglichkeit, dass die Gase bei ihrer Ausdehnung durch die Wärme annähernd das Gay-Lussac'sche Gesetz befolgen, erscheint hiernach für Temperaturen, welche eine gewisse, von der Natur der bezüglichen Substanz abhängige Grenze weitaus übersteigen, bei jedem Drucke völlig ausgeschlossen. Nach dem Sinne der betreffenden Abweichung kann man es für wahrscheinlich halten, dass der Ausdehnungscoëfficient bei weit genug gehender Erwärmung in jedem Falle endlich das Vorzeichen wechselt, wenn auch die dazu nöthige Temperatur bei einem gewöhnlichen Drucke, mit dem Vorigen übereinstimmend, eine ausserordentlich hohe sein dürfte.

Über einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins und seine Anwendung

von

Emil Weyr, †

w. M. k. Akad.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1894.)

I. Allgemeine Sätze über Curven dritter Ordnung vom Geschlechte Eins.

1. Es sei $a_1 a_2 \ldots a_n$ eine feste Gruppe einer Involution J^n_{n-1} n^{ten} Grades $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe (in der Folge kurz bezeichnet mit J^n) auf einer C_3, $x_1 x_2 \ldots x_n$ eine variable Gruppe; dann soll J^n gegeben sein durch die Gleichung

$$x_1 x_2 \ldots x_n = a_1 a_2 \ldots a_n$$

oder, indem man $a_1 a_2 \ldots a_n$ mit k bezeichnet, durch

$$x_1 x_2 \ldots x_n = k.$$

Da jede J^n n^2 n-fache Elemente besitzt, so hat die Gleichung $x^n = k$ n^2 Lösungen.

2. Liegen $x_1 x_2 x_3$ in einer Geraden, bilden sie also ein Tripel der fundamentalen J^3, so sei $x_1 x_2 x_3 = k$. Liegen $x_1 x_2 \ldots x_{3n}$ auf einer C_n, so sei $x_1 x_2 \ldots x_{3n} = k^n$. Mit andern Worten: Sind abc

[1] Der Entwurf zu dieser Arbeit ist Mitte December 1892 begonnen und im Laufe des folgenden Jahres mit mehrfachen Unterbrechungen fortgesetzt worden. Die Ausführung hat der am 25. Jänner 1894 verstorbene Verfasser kurz vorher mir übertragen. Indem ich seinem Wunsche nachkomme, bitte ich, dass Mängel in der Darstellung mir zur Last gelegt werden mögen.

E. Czuber.

drei Punkte in gerader Linie, so sind $x_1 x_2 \ldots x_{3n}$ dann auf einer C_n gelegen, wenn $x_1 x_2 \ldots x_{3n} = (abc)^n$ ist.

3. »Wenn abc und ebenso $a'b'c'$ in gerader Linie liegen, so schneiden aa', bb', cc' die C_3 zum drittenmale in Punkten $a''b''c''$, die ebenfalls in einer Geraden liegen.« Denn aus

$$abc = k \quad \text{und} \quad a'b'c' = k$$

folgt

$$abca'b'c' = k^2;$$

da ferner auch

$$aa'a'' = k \qquad bb'b'' = k \qquad cc'c'' = k,$$

so ist

$$abca'b'c'a''b''c'' = k^3;$$

aus der Verbindung beider Resultate folgt thatsächlich

$$a''b''c'' = k.$$

4. Sind a, b correspondirende Punkte, t ihr gemeinsamer Tangentialpunkt und t' der dritte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie, so ist

$$a^2t = b^2t = abt',$$

somit

$$a^2b^2t^2 = (abt')^2$$

oder $t^2 = t'^2$, d. h. t und t' sind ebenfalls correspondirende Punkte.

5. Werden zwei correspondirende Punkte a, b aus einem beliebigen Punkte (o) der C_3 auf diese nach a', b' projicirt, so hat man einerseits

$$a^2 = b^2 \quad (\text{wegen } a^2t = b^2t)$$

und anderseits

$$aa' = bb' \quad (\text{wegen } aa'o = bb'o);$$

aus dem zweiten Ansatze folgt $a^2a'^2 = b^2b'^2$ und daraus durch Division mit dem ersten $a'^2 = b'^2$, womit erwiesen ist, dass auch a', b' correspondirende Punkte sind.

6. »Liegen die sechs Punkte $abca'b'c'$ von C_3 auf einer C_2, so schneiden aa', bb', cc' die Curve zum drittenmale in Punkten $a''b''c''$ einer Geraden.« Denn es ist

$$abca'b'c' = k^2$$

und

$$aa'a'' = bb'b'' = cc'c'' = k;$$

aus dem zweiten Ansatze ergibt sich

$$abca'b'c'a'b'c'' = k^3,$$

demnach ist $a''b''c'' = k$, w. z. b. w.

7. »Berührt eine C_2 die C_3 in den Punkten abc, so liegen die Tangentialpunkte $a'b'c'$ von abc in einer Geraden.« Aus

$$a^2b^2c^2 = k^2$$

und

$$a^2a' = b^2b' = c^2c' = k$$

folgt nämlich zunächst $a^2b^2c^2a'b'c' = k^3$ und daraus durch Division mit der ersten Gleichung $a'b'c' = k$.

8. Ist a ein Inflexionspunkt von C_3, so ist $a^3 = k$; ist b ein zweiter, so ist $b^3 = k$; ist x der dritte Schnittpunkt der $\overline{ab}$, so hat man $abx = k$, also $a^3b^3x^3 = k^3$, und da $a^3b^3 = k^2$, so ist $x^3 = k$, d. h. x ist auch ein Inflexionspunkt; es schneidet also die Verbindungslinie zweier Inflexionspunkte zum drittenmale wieder in einem solchen.

9. »Wenn $abcd$ ein Quadrupel auf C_3 ist, so gehören a, b und c, d einer J^2 an.« Das Paar ab bestimmt nämlich eine J^2 und ist x der in ihr dem c entsprechende Punkt, so ist $ab = cx$, also $a^2b^2 = c^2x^2$; nun ist aber $b^2 = c^2$, daher auch $a^2 = x^2$; es kann aber x weder mit a, noch mit b oder c identisch sein, also ist nothwendig $x \equiv d$, w. z. b. w. In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass ac, bd und ad, bc je einer J^2 angehören.

10. Sind a, b zwei correspondirende Punkte, so ist $a^2 = b^2$ sind a', b' zwei correspondirende Punkte desselben Systems, so ist auch $a'^2 = b'^2$ und überdies $aa' = bb'$. Aus letzterer Gleichung folgt durch Multiplication mit $a'b'$

$$aa'^2b' = a'bb'^2,$$

und hieraus ergibt sich, wenn man die Gleichung $a'^2 = b'^2$ beachtet, $ab' = a'b$, d. h. die beiden Geraden ab' und $a'b$ schneiden sich in einem Punkte von C_3.

11. »Liegen die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits auf C_3, so sind je zwei gegenüberliegende Ecken correspon-

dirende Punkte desselben Systems.« Es ist nämlich vermöge der Voraussetzung (siehe Fig. 1)

$$abc = ab'c' = a'bc' = a'b'c = k;$$

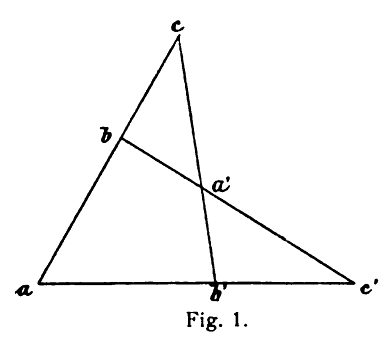


Fig. 1.

aus $abc = k$ und $ab'c' = k$ folgt aber $a^2bcb'c' = k^2$ und aus $a'bc' = k$ und $a'b'c = k$ ergibt sich $a'^2bcb'c' = k^2$; durch Vergleichung erhält man $a^2 = a'^2$; in ähnlicher Weise findet sich $b^2 = b'^2$ und $c^2 = c'^2$.

Da ferner, wie aus dem ersten Ansatze hervorgeht, $ab = a'b'$ und $ac = a'c'$, so gehören thatsächlich aa', bb' und cc' zu demselben System.

12. Wenn die drei Punkte abc auf C_3 in gerader Linie liegen, so sei $abc = k$; die Gleichung $x^3 = k$ hat die neun Inflexionspunkte als die dreifachen Punkte der fundamentalen J^3, welche die geraden Punktetripel der C_3 bilden, zur Lösung.

Sind dagegen abc Berührungspunkte einer dreifach berührenden C_2, so muss $a^2b^2c^2 = k^2$ oder $(abc)^2 = k^2$, somit $abc = \sqrt{k^2}$ sein. Nun hat $\sqrt{k^2}$ vier Werthe; einer davon ist k, weil aus $abc = k$ sich $a^2b^2c^2 = k^2$ ergibt; durch die drei andern k_1, k_2, k_3 sind die drei J^3:

$$1)\ a_1b_1c_1 = k_1$$
$$2)\ a_2b_2c_2 = k_2$$
$$3)\ a_3b_3c_3 = k_3$$

bestimmt, welche zu den drei Systemen der dreifach berührenden Kegelschnitte führen. Die Werthe k, k_1, k_2, k_3 entsprechen den vier aus der J^6: $abcdef = k^2$ abgeleiteten J^3.[1]

Zwischen den k besteht die aus ihrer Definition unmittelbar fliessende Beziehung

$$k^2 = k_1^2 = k_2^2 = k_3^2.$$

---

[1] Sitzungsber., Bd. CI, Abth. II. a.

Wählt man a, b beliebig, so gibt es vier C_2, welche in a, b und nochmals in einem dritten Punkte x berühren; dieser ist definirt durch $a^2b^2x^2 = k^2$, oder wenn c den dritten Schnittpunkt von $\overline{ab}$ bezeichnet, durch $a^2b^2x^2 = a^2b^2c^2$, woraus $x^2 = c^2$; dies gibt die vier Lösungen $x = c$, $x = c_1$, $x = c_2$, $x = c_3$.

Wenn wir also die Punkte, welche mit c gemeinsamen Tangentialpunkt haben, $c_1c_2c_3$ nennen, so ist $abc = k$, $abc_1 = k_1$, $abc_2 = k_2$, $abc_3 = k_3$, wodurch $k_1k_2k_3$ geometrisch definirt sind.

13. Hieraus ergeben sich die Sätze über die drei Systeme conjugirter Punkte; diese sind durch die drei Paare cc_1, cc_2, cc_3 als erstes, zweites und drittes System gegeben.

Aus den beiden Gleichungen $abc = k$ und $abc_1 = k_1$ erhält man durch Multiplication $abck_1 = abc_1k$ und daraus die charakteristische Gleichung

$$ck_1 = c_1k \text{ für das erste System,}$$

ebenso

$$ck_2 = c_2k \text{ für das zweite System}$$

und

$$ck_3 = c_3k \text{ für das dritte System.}$$

Auf dieser Grundlage lässt sich der folgende Satz erweisen: »Sind abc drei Punkte in einer Geraden und $a_ib_ic_i$ die ihnen im i^{ten} System conjugirten, so bilden diese ein Tripel der betreffenden J_i^3, sind also Berührungspunkte einer dreifach berührenden C_2.« Es gelten nämlich die vier Gleichungen

$$abc = k$$
$$ak_i = a_ik$$
$$bk_i = b_ik$$
$$ck_i = c_ik;$$

die letzten drei geben durch Multiplication

$$abck_i^2 . k_i = a_ib_ic_ik^2 . k;$$

hieraus folgt wegen $k_i^2 = k^2$ und mit Beachtung der ersten Gleichung

$$a_ib_ic_i = k_i, \text{ w. z. b. w.}$$

Umgekehrt: »Ist $a_i b_i c_i$ ein Tripel der J_i^3, so liegen die conjugirten Punkte im i^{ten} System in einer Geraden.« Sind nämlich aa_i, bb_i zwei Paare desselben Systems, so ist

$$ak_i = a_i k$$
$$bk_i = b_i k;$$

daraus ergibt sich durch Multiplication unter Beachtung von $k_i^2 = k^2$

$$ab = a_i b_i;$$

daher schneiden sich $\overline{ab}$ und $\overline{a_i b_i}$ in einem Punkte der C_3, er heisse c. Aus der letzten Gleichung folgt, wenn man sie mit a_i multiplicirt, $aa_i b = a_i^2 b_i$ und daraus wegen $a_i^2 = a^2$

$$a_i b = ab_i,$$

so dass auch $\overline{a_i b}$ und $\overline{ab_i}$ sich in C_3 schneiden in einem Punkte c'; nach Artikel 11 ist c' der conjugirte Punkt zu c. Es lässt sich aber zeigen, dass $c' \equiv c_i$ ist. Denn vermöge des Umstandes, dass $ab_i c'$ ein gerades Tripel bilden, ist $c' = \frac{k}{ab_i}$, somit weiter $k_i c' = \frac{kk_i c_i}{ab_i c_i}$ oder, da $b_i c_i = bc$ und $abc = k$ ist, endlich $k_i c' = k_i c_i$, woraus thatsächlich $c' \equiv c_i$ folgt.

14. Es sei $a_i b_i c_i$ ein Tripel der J_i^3, so dass $a_i b_i c_i = k_i$; ferner seien abc der Reihe nach die dritten Schnittpunkte der $\overline{b_i c_i}$, $\overline{c_i a_i}$, $\overline{a_i b_i}$ mit C_3; man hat dann

$$ab_i c_i = k$$
$$bc_i a_i = k$$
$$ca_i b_i = k,$$

woraus sich durch Multiplication $abca_i^2 b_i^2 c_i^2 = k^3$ ergibt; es ist aber $a_i^2 b_i^2 c_i^2 = k_i^2 = k^2$, folglich $abc = k$, d. h. die drei Punkte abc liegen in gerader Linie.

Bezeichnet man weiter mit $\alpha\beta\gamma$ die dritten Schnittpunkte der Geraden aa_i, bb_i, cc_i mit der C_3, so ist

$$\alpha aa_i = k$$
$$\beta bb_i = k$$
$$\gamma cc_i = k,$$

folglich $\alpha\beta\gamma abc a_i b_i c_i = k^3$; da aber $abc = k$, so ist weiter $\alpha\beta\gamma a_i b_i c_i = k^2 = k_i^2$, und wegen $a_i b_i c_i = k_i$ ergibt sich daraus $\alpha\beta\gamma = k_i$, d. h. die drei Punkte $\alpha\beta\gamma$ bilden ein Tripel des nämlichen Systems.

15. Wieder sei $a_i b_i c_i$ ein Tripel der J_i^3; $\alpha\beta\gamma$ mögen die Tangentialpunkte seiner Elemente sein; dann gilt

$$a_i^2 \alpha = b_i^2 \beta = c_i^2 \gamma = k,$$

woraus $a_i^2 b_i^2 c_i^2 \alpha\beta\gamma = k^3$; weil aber $a_i^2 b_i^2 c_i^2 = k_i^2 = k^2$, so folgt $\alpha\beta\gamma = k$, d. h. die Tangentialpunkte der Elemente eines Tripels der J_i^3 liegen in gerader Linie.

16. Es seien $a_i b_i c_i$ und $a_i' b_i' c_i'$ zwei Tripel desselben Systems, $\alpha\beta\gamma$ die dritten Schnittpunkte der $\overline{a_i a_i'}$, $\overline{b_i b_i'}$, $\overline{c_i c_i'}$ mit C_3; dann gelten die Gleichungen

$$a_i b_i c_i = a_i' b_i' c_i' = k_i,$$
$$\alpha a_i a_i' = \beta b_i b_i' = \gamma c_i c_i' = k;$$

aus den drei letzten folgt $\alpha\beta\gamma a_i b_i c_i a_i' b_i' c_i' = k^3$, aus den zwei ersten $a_i b_i c_i a_i' b_i' c_i' = k_i^2 = k^2$; daher ist $\alpha\beta\gamma = k$, d. h. es liegen $\alpha\beta\gamma$ in einer Geraden.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen: »Sind $a_i b_i c_i$ die Punkte eines Tripels, $\alpha\beta\gamma$ drei Punkte in gerader Linie auf C_3, $a_i' b_i' c_i'$ die dritten Schnittpunkte von $\overline{a_i \alpha}$, $\overline{b_i \beta}$, $\overline{c_i \gamma}$, so sind $a_i' b_i' c_i'$ auch die Punkte eines Tripels desselben Systems.«

17. Zwischen den vier Werthen $k k_1 k_2 k_3$ bestehen bemerkenswerthe Relationen. Es ist (Artikel 12)

$$abc = k, \quad abc_1 = k_1, \quad abc_2 = k_2, \quad abc_3 = k_3;$$

aus dem ersten Gleichungspaar folgt

$$a^2 b^2 c c_1 = k k_1,$$

aus dem zweiten

$$k_2 k_3 = a^2 b^2 c_2 c_3,$$

daraus weiter durch Multiplication

$$k k_1 c_2 c_3 = k_2 k_3 c c_1;$$

nun bilden aber $c c_1 c_2 c_3$ ein Quadrupel, daher ist $c c_1 \; \text{s} = c_2 c_3 \text{o}$; ergibt sich die erste Gleichung des Systems

$$\begin{aligned} kk_1 &= k_2k_3 \\ kk_2 &= k_3k_1 \\ kk_3 &= k_1k_2; \end{aligned} \tag{1}$$

daneben bestehen die Gleichungen

$$k^2 = k_1^2 = k_2^2 = k_3^2. \tag{2}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (1) ergibt sich durch Multiplication mit k_3 $kk_2k_3 = k_3^2k_1$ und daraus wegen (2) die erste Gleichung des Systems

$$\begin{aligned} kk_2k_3 &= k_1^3 \\ kk_3k_1 &= k_2^3 \\ kk_1k_2 &= k_3^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Es ist ferner $kk_1^2 = kk^2 = k^3$, ebenso $k_1k_2^2 = k_1k_1^2 = k_1^3$, allgemein

$$k_ik_\lambda^2 = k_i^3. \tag{4}$$

18. »Die Geraden, welche die Punkte zweier Tripel aus zwei verschiedenen Systemen gegenseitig verbinden, schneiden C_3 in einem Tripel des dritten Systems.« Sind nämlich $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$ die beiden Tripel, $\alpha\beta\gamma$ die dritten Schnittpunkte von $\overline{a_1a_2}$, $\overline{b_1b_2}$, $\overline{c_1c_2}$, so bestehen die Gleichungen

$$a_1b_1c_1 = k_1 \qquad a_2b_2c_2 = k_2$$
$$a_1a_2\alpha = b_1b_2\beta = c_1c_2\gamma = k;$$

daraus ergibt sich zunächst $a_1b_1c_1a_2b_2c_2\alpha\beta\gamma = k^3 = k_1k_2k_3$ und mit Rücksicht auf das erste Gleichungspaar

$$\alpha\beta\gamma = k_3, \text{ w. z. b. w.}$$

19. »Legt man durch ein Tripel $a_ib_ic_i$ und einen Punkt m von C_3 eine C_2, welche C_3 weiter in x, x' schneiden möge, so ist der dritte Schnittpunkt o von $\overline{xx'}$ der zum Punkte m im $i$ten System conjugirte m_i« (siehe H. Schroeter, Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung, 1888, S. 62).

Es ist nämlich

$$a_ib_ic_imxx' = k^2$$

und

$$k = xx'o,$$

woraus sich durch Multiplication

$$a_i b_i c_i m = ok$$

ergibt; daraus folgt wegen $a_i b_i c_i = k_i$

$$k_i m = ok;$$

bezeichnet man aber den zu m im i^{ten} System conjugirten Punkt mit m_i, so ist auch (Artikel 13)

$$k_i m = m_i k,$$

folglich in der That $o \equiv m_i$.

20. »Liegen sechs Punkte $abcdef$ einer C_3 auf einer C_2 und bestimmt man zu irgend zweien, z. B. ef, die conjugirten in irgend einem System, etwa $e_i f_i$, so liegen $abcde_i f_i$ auch auf einer C_2.« (Schroeter, l. c., S. 70.) Denn es ist

$$abcdef = k^2$$
$$ke_i = k_i e$$
$$kf_i = k_i f;$$

daraus ergibt sich durch Multiplication

$$abcde_i f_i = k_i^2 = k^2, \text{ w. z. b. w.}$$

»Bestimmt man zu allen sechs Punkten die conjugirten irgend eines Systems, so liegen auch diese auf einem Kegelschnitt.« (Schroeter, l. c., S. 71). Denn aus den Beziehungen

$$ka_i = k_i a, \qquad kb_i = k_i b, \ldots kf_i = k_i f$$

erhält man

$$k^6 a_i b_i c_i d_i e_i f_i = k_i^6 abcdef$$

und da $abcdef = k^2$ und $k_i^6 = k^6$, so folgt, was zu beweisen war, nämlich $a_i b_i c_i d_i e_i f_i = k^2$.

21. »Der Gegenpunkt o von vier Punkten $abcd$ auf C_3 ist zugleich Gegenpunkt von den conjugirten Punkten $a_i b_i c_i d_i$ irgend eines Systems.«

Man erhält nämlich o, indem man die dritten Schnittpunkte α, β von $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ verbindet und den weiteren Schnittpunkt dieser Geraden mit C_3 bestimmt; demzufolge ist

$$o = \frac{k}{\alpha\beta},$$

und da $ab\alpha = cd\beta = k$, so ist $abcd\alpha\beta = k^2$, folglich $\alpha\beta = \frac{k^2}{abcd}$ und daher

$$o = \frac{abcd}{k}.$$

Nun ist aber weiter

$$ka_i = k_i a$$
$$kb_i = k_i b$$
$$kc_i = k_i c$$
$$kd_i = k_i d,$$

demnach $k^4 a_i b_i c_i d_i = k_i^4 abcd$ und wegen $k^2 = k_i^2$ auch $k^4 = k_i^4$. daher $a_i b_i c_i d_i = abcd$ und somit auch $o = \frac{a_i b_i c_i d_i}{k}$, wodurch der Satz bewiesen ist.

22. »Liegen die sechs Punkte $abcdef$ von C_3 auf einem Kegelschnitt, so liegen ihre Tangentialpunkte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ ebenfalls auf einer C_2.« (Schroeter, l. c., S. 72.) Denn aus

$$a^2\alpha = b^2\beta = \ldots = f^2\varphi = k$$

folgt durch Multiplication $a^2b^2c^2d^2e^2f^2\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi = k^6$; weil aber voraussetzungsgemäss $abcdef = k^2$, so ergibt sich auch $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi =$ $= k^2$, w. z. b. w.

23. »Sind $ab\ldots hj$ die neun Schnittpunkte der C_3 mit einer andern Curve dritter Ordnung, so bilden auch $ab_i\ldots h_i j_i$ eine solche Gruppe von neun Punkten.« (Schroeter, l. c., S. 78.) Nach Voraussetzung ist

$$ab\ldots hj = k^3;$$

ferner gelten die Beziehungen

$$kb_i = k_i b,\ kc_i = kc_i, \ldots\ kj_i = k_i j,$$

aus welchen durch Multiplication

$$k^8 b_i c_i \dots j_i = k_i^8 bc \dots j$$

erhalten wird; nun ist aber $k_i^8 = k^8$, daher $b_i c_i \dots j_i = bc \dots j$ und daraus

$$ab_i c_i \dots j_i = abc \dots j = k^3, \text{ w. z. b. w.}$$

24. »Nimmt man aus den drei Tripelsystemen je ein Tripel, so erhält man eine Gruppe von neun associirten Punkten.« Denn aus

$$a_1 b_1 c_1 = k_1, \quad a_2 b_2 c_2 = k_2, \quad a_3 b_3 c_3 = k_3$$

folgt unmittelbar $a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 a_3 b_3 c_3 = k_1 k_2 k_3 = k^3$, womit die Behauptung erwiesen ist.

25. »Ein Punkt o auf C_3, sein Tangentialpunkt t, die Berührungspunkte $abcd$ der durch o an C_3 gehenden vier Tangenten und die Diagonalpunkte pqr des Vierecks $abcd$ sind neun associirte Punkte.« (Fig. 2).

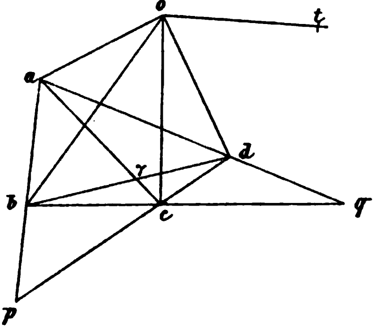


Fig. 2.

Zunächst folgt aus $ab = cd$ durch Multiplication mit c, dass

$$abc = c^2 d = d^2 d = d^3,$$

daher ist

$$abcd = d^4;$$

weiter hat man

$$p = \frac{k}{ab}, \quad q = \frac{k}{bc}, \quad r = \frac{k}{ca},$$

woraus sich

$$pqr = \frac{k^3}{a^2 b^2 c^2} = \frac{k^3}{d^6}$$

ergibt; folglich ist nun schon

$$abcdpqr = \frac{k^3}{d^2},$$

und da weiter $o^2 t = k$, so hat man $ot = \frac{k}{o}$, also

$$abcdpqrot = \frac{k^3 k}{d^2 o};$$

schliesslich bemerke man, dass $d^2o = k$, und dann ergibt sich die zu beweisende Relation

$$abcdpqrot = k^3.$$

26. Es seien $\alpha\beta\gamma$ drei Punkte in gerader Linie auf C_3; $a_1a_2a_3a_4$ die Berührungspunkte der aus α, $b_1b_2b_3b_4$ die Berührungspunkte der aus β, endlich $c_1c_2c_3c_4$ die Berührungspunkte der aus γ an C_3 gelegten Tangenten. Man verbinde a_i mit $b_{i'}$ $(i, i' = 1, 2, 3, 4)$ und bezeichne mit x den dritten Schnittpunkt von $\overline{a_ib_{i'}}$; dann ist

$$a_ib_{i'}x = k,$$

also auch

$$a_i^2b_{i'}^2x^2 = k^2;$$

nun ist $a_i^2 = \frac{k}{\alpha}$, $b_{i'}^2 = \frac{k}{\beta}$, daher weiter

$$\frac{k^2x^2}{\alpha\beta} = k^2$$

und weil schliesslich $\alpha\beta\gamma = k$ ist, so ergibt sich

$$x^2\gamma = k,$$

d. h. der dritte Schnittpunkt x ist einer der vier Punkte $c_1c_2c_3c_4$; es geht also jede der sechzehn Geraden, welche sich ergeben, wenn man jeden der vier Punkte a_i mit jedem der vier Punkte $b_{i'}$ verbindet, durch einen der vier Punkte $c_{i''}$. »Wenn man also aus den Punkten eines geraden Tripels die Tangenten an C_3 führt, so liegen die zwölf Berührungspunkte auf sechzehn Geraden derart, dass jede Gerade drei Punkte enthält und durch jeden Punkt vier Gerade gehen.« (Schroeter, l. c., S. 99.)

27. »Ist $abcd$ das zum Punkte o gehörige Quadrupel, t der Tangentialpunkt von o und pqr das Diagonaldreieck des Vierecks $abcd$, so bilden $opqr$ ebenfalls ein Quadrupel, gehörig zum Punkte t.« (Schroeter, l. c., S. 109).

Es ist nämlich $o = \frac{k}{a^2}$, daher $o^2 = \frac{k^2}{a^4}$; ferner $p = \frac{k}{ab}$, folglich $p^2 = \frac{k^2}{a^2b^2} = \frac{k^2}{a^4}$, weil $b^2 = a^2$; durch Vergleichung ergibt sich daraus $o^2 = p^2$; in derselben Weise zeigt man $o^2 = q^2 = r^2$; $o^2 = p^2 = q^2 = r^2$ aber sagen aus, dass die vier

Punkte $opqr$ einen gemeinsamen Tangentialpunkt haben, und zwar ist dies t.

28. Es seien a, a_1 zwei conjugirte Punkte des ersten; b, b_2 zwei conjugirte Punkte des zweiten Systems, ferner c der dritte Schnittpunkt von $\overline{ab}$, c' der dritte Schnittpunkt von $\overline{a_1 b_2}$ mit der C_3. Man hat dann

$$ak_1 = a_1 k$$
$$bk_2 = b_2 k,$$

woraus durch Multiplication $abk_1 k_2 = a_1 b_2 k^2$ erhalten wird; nun ist aber $ab = \frac{k}{c}$, $a_1 b_2 = \frac{k}{c'}$, folglich weiter $\frac{k}{c} k_1 k_2 = \frac{k}{c'} k^2$ oder

$$kc' = \frac{k^3}{k_1 k_2} c;$$

da aber $k^3 = k_1 k_2 k_3$, so hat man schliesslich $kc' = k_3 c$, d. h. $c' \equiv c_3$, wenn c, c_3 ein Paar conjugirter Punkte des dritten Systems ist (Schroeter, l. c., S. 118).

29. Die neun dreifachen Elemente einer J^3 seien $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$; dann ist

$$a_1^3 = b_1^3 = c_1^3 = a_2^3 = b_2^3 = c_2^3 = a_3^3 = b_3^3 = c_3^3 = k.$$

Wir wählen einen derselben, z. B. a_1, als Doppelelement einer J^2, so müssen die übrigen paarweise dieser J_2 angehören, beispielsweise in solcher Anordnung, dass

$$a_1^2 = b_1 c_1 = a_2 a_3 = b_2 c_3 = b_3 c_2.$$

Jedes der vier Paare rechts wird durch a_1 zu einem Tripel der J^3 ergänzt.

Das Paar $a_2 b_1$ wird ebenso durch eines der dreifachen Elemente zu einem Tripel ergänzt; a_1 und c_1 können es nicht sein, weil ja a_1 mit $b_1 c_1$ und c_1 mit $b_1 a_1$ bereits ein Tripel bilden; a_3 ist ausgeschlossen, weil es schon mit $a_1 a_2$ ein Tripel bildet; es muss also eines der vier Elemente $b_2 c_3 b_3 c_2$ sein. Sei c_3 dieses Element, so dass $a_2 b_1 c_3$ ein Tripel der J^3 ist. Dann muss $a_3 c_1$ nothwendig durch b_2 ergänzt werden; denn $a_1 b_1 a_2 c_3$ sind wie früher ausgeschlossen, so dass nur $b_2 b_3 c_2$ als möglich übrig bleiben; nun wird die J^3 durch jene J^2, deren Doppelelement a_2 ist, in sich übergeführt, so dass das Tripel $a_2 b_1 c_3$ wieder in ein

Tripel, und dieses ist $c_1 a_3 b_2$, übergeht; es ist also $a_3 b_2 c_1$ ein Tripel der J^3. Das Paar $b_1 b_2$ kann weder durch $c_1 c_3$, noch durch $a_1 a_2 a_3$ ergänzt werden, sondern nur durch eines der Elemente $c_2 b_3$; also möge b_3 es sein, so dass $b_1 b_2 b_3$ ein Tripel ist. Dann muss, weil durch jene J^2 dieses Tripel wieder in ein Tripel verwandelt wird, auch $c_1 c_2 c_3$ ein Tripel sein. Wir haben also im Ganzen bisher die acht Tripel

$$\begin{matrix} a_1 b_1 c_1 & a_1 a_2 a_3 & a_1 b_2 c_3 & a_1 b_3 c_2 \\ a_2 b_1 c_3 & a_3 b_2 c_1 & b_1 b_2 b_3 & c_1 c_2 c_3 . \end{matrix}$$

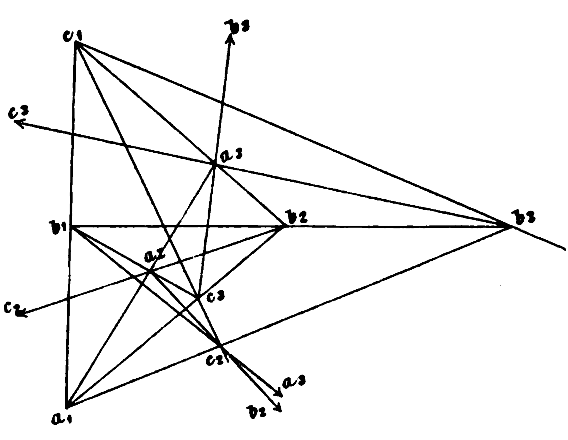


Fig. 3.

Das Paar $b_1 c_2$ kann weder durch a_1, noch durch $c_1 b_2$ ergänzt werden, also auch nicht durch c_3 (denn es wird $c_1 c_2$ durch c_3 ergänzt) und ebenso nicht durch b_3 (denn $b_3 c_2$ wird durch a_1 ergänzt); es bleiben also nur a_2 oder a_3, davon ist a_2 ausgeschlossen, weil $c_3 b_1$ durch a_2 ergänzt wird; folglich ist a_3 das fehlende Element und $a_3 b_1 c_2$ wieder ein Tripel der J^3. Aus diesem geht durch die J^2 das Tripel $a_2 c_1 b_3$ hervor. Endlich erkennt man genau in derselben Weise, dass das Paar $c_2 a_2$ durch b_2 ergänzt wird und dass aus diesem Tripel $a_2 b_2 c_2$ durch J^2 das Tripel $a_3 b_3 c_3$ entsteht.

Schreiben wir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta,$$

so sind die zwölf Tripel dargestellt durch die drei Horizontalreihen, die drei Verticalreihen und durch die sechs Glieder der Determinante Δ (siehe die schematische Fig. 3).

Die vier Gruppen zu je drei Tripeln, welche alle neun Elemente enthalten, sind:

$$
\begin{array}{rlll}
\text{I)} & a_1b_1c_1 & a_2b_2c_2 & a_3b_3c_3 \\
\text{II)} & a_1a_2a_3 & b_1b_2b_3 & c_1c_2c_3 \\
\text{III)} & a_1b_2c_3 & a_2b_3c_1 & a_3b_1c_2 \\
\text{IV)} & a_3b_2c_1 & a_1b_3c_2 & a_2b_1c_3;
\end{array}
$$

III) stellt die positiven, IV) die negativen Glieder der Determinante Δ vor.

Man kann bei Zusammenstellung der Tripel auch in folgender Weise vorgehen. Es sei a_1 Doppelelement (a_1^2) einer J^2, welcher b_1c_1, a_2a_3, b_2c_3, b_3c_2 als Paare angehören; dann ist

$$a_1^3 = a_1b_1c_1 = a_1a_2a_3 = a_1b_2c_3 = a_1b_3c_2 = k.$$

Das Paar a_2b_1 kann durch a_3, c_1 oder a_1 nicht ergänzt werden; denn sonst müsste z. B. $a_2a_3b_1 = k$ sein; da aber $a_1a_2a_3 = k$ ist, so wäre $b_1 \equiv a_1$, was nicht angeht, da alle Elemente von einander verschieden sind u. s. w. Es kann also a_2b_1 nur durch eines der Elemente $c_3b_2c_2b_3$ ergänzt werden; wir bezeichnen das ergänzende Element mit c_3, so ist $a_2b_1c_3$ ein Tripel. Nun folgt aus

$$a_1b_1c_1 = a_1a_2a_3 = a_1c_3b_2 = k,$$

dass $a_1^3 . a_2b_1c_3 . a_3b_2c_1 = k^3$, und da $a_1^3 = k$ und $a_2b_1c_3 = k$, so ist auch $a_3b_2c_1 = k$, und dadurch wieder ein Tripel gefunden. In ähnlicher Weise fährt man mit dem Paare b_1b_2 fort.

Hiernach bestehen also zwischen den neun dreifachen Elementen folgende Relationen:

$$
\begin{gathered}
a_1^3 = b_1^3 = c_1^3 = a_2^3 = b_2^3 = c_2^3 = a_3^3 = b_3^3 = c_3^3 \\
a_1^2 = b_1c_1 = a_2a_3 = b_2c_3 = b_3c_2 \\
b_1^2 = a_1c_1 = b_2b_3 = a_3c_3 = a_2c_3 \\
c_1^2 = a_1b_1 = c_2c_3 = a_2b_3 = a_3b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_3^2 = a_3b_3 = c_1c_2 = a_1b_2 = a_2b_1.
\end{gathered}
$$

Die vier cyklischen E-Beziehungen mit dreielementigen Gruppen erhält man mit Hilfe folgender Sätze.

Satz I. »Wenn $a_1 b_1 c_1$ ein Cyklus einer E-Beziehung ist, so dass also den Elementen $a_1 b_1 c_1$ der Reihe nach die Elemente $b_1 c_1 a_1$ entsprechen, so sind diese Elemente dreifache Elemente einer J^3.«

Denn nach Voraussetzung ist

$$a_1 c_1 = b_1^2 \qquad a_1 b_1 = c_1^2 \qquad b_1 c_1 = a_1^2,$$

somit

$$a_1 b_1 c_1 = a_1^3 = b_1^3 = c_1^3, \text{ w. z. b. w.}$$

Satz II. »Wenn $a_1 b_1$ zwei dreifache Elemente einer J^3 sind, so ist die durch sie gegebene E-Beziehung cyklisch.«

Es ist nämlich nach Voraussetzung $a_1^3 = b_1^3$; ist c_1 das dem b_1 entsprechende Element, so ist $a_1 c_1 = b_1^2$; das dem c_1 entsprechende Element x ist gegeben durch $b_1 x = c_1^2$ oder $b_1 x = \left(\frac{b_1^2}{a_1}\right)^2$, d. h. $a_1^2 b_1 x = b_1^4 = b_1^3 b_1 = a_1^3 b_1$, somit ist $x \equiv a_1$, w. z. b. w.

Satz III. »Jedem weiteren dreifachen Element von J^3 entspricht in der E-Beziehung wieder ein dreifaches Element, welches von $a_1 b_1 c_1$ verschieden ist«

Es sei a_2 ein weiteres dreifaches Element und x das ihm entsprechende; dann muss, weil $a_1 b_1$, $a_2 x$ zwei Paare der E sind, $a_1 x = a_2 b_1$ sein, also auch $a_1^3 x^3 = a_2^3 b_1^3$; nun ist $a_1^3 = a_2^3$, daher $x^3 = b_1^3$, d. h. x ist ein dreifaches Element. Dass x von a_2 verschieden ist, folgt sofort daraus, dass in jeder E-Beziehung einem Element ein von ihm verschiedenes entspricht; es muss aber x auch von $a_1 b_1 c_1$ verschieden sein, weil ja diese Gruppe in sich geschlossen ist. Wir setzen also $x = b_2$, erhalten dann wie oben noch ein drittes Element c_2, und die Gruppe $a_2 b_2 c_2$ ist wieder geschlossen. Die letzten drei Elemente $a_3 b_3 c_3$ müssen natürlich auch eine geschlossene Gruppe bilden. (Weiteres siehe im nächsten Abschnitt.)

II. E-Beziehungen auf Trägern vom Geschlechte Eins (C_3).

30. Eine allgemeine eindeutige Punktbeziehung E auf C_3 sei durch a, a' gegeben; ist dann x, x' ein beliebiges Paar der-

selben, so schneiden sich die wechselweisen Verbindungslinien ax' und $a'x$ auf C_3,[1] folglich ist $xa' = x'a$ oder aber

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}.$$

Durch diese Gleichung ist eine E-Beziehung auf C_3 charakterisirt. Man könnte sie symbolisch auch in der Form $\frac{x}{x'} = c$, wo c eine Constante bedeutet, darstellen.

Hieraus ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

I. »In einer E-Beziehung gibt es keine oder lauter Doppelpunkte«. Es kann nämlich nie $x' \equiv x$ werden; nur wenn $a \equiv a'$, so ist auch $x \equiv x'$, dann aber immer.

II. »Durch zwei conjugirte Punkte ist eine vertauschungsfähige E-Beziehung gegeben«. Ist $a^2 = a'^2$, so folgt aus $\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$ zunächst $\frac{x^2}{x'^2} = \frac{a^2}{a'^2} = 1$, daher $x^2 = x'^2$, d. h. x, x' sind auch conjugirte Punkte. Wird nun $x' \equiv y$ gesetzt, so ist $x \equiv y'$; denn es ist $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ und für $y \equiv x'$ wird $\frac{x}{x'} = \frac{x'}{y'}$, oder $xy' = x'^2$; weil aber $x'^2 = x^2$, so hat man in der That $y' \equiv x$, wodurch die Vertauschungsfähigkeit von E erwiesen ist.

III. Aus $\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$ folgt $x^n a'^n = x'^n a^n$, d. h. »wenn man x und a' jeden n-fach gezählt als Gruppe einer J^{2n} deutet, so ist auch $x'a$ eine solche Gruppe derselben J^{2n}«.

IV. Wenn $\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$ und $a^n = a'^n$, so ist auch $x^n = x'^n$, d. h. »in der durch zwei n-fache Elemente einer J^n bestimmten E-Beziehung sind jede zwei entsprechende Elemente n-fach für eine J^n«.

Im Folgenden wird die durch das Punktepaar aa' bestimmte E-Beziehung mit $E(aa')$ bezeichnet.

31. V. »Wenn aa' n-fache Elemente einer J^n sind, so ist $E(aa')$ cyklisch«. Ist nämlich $E(aa')$ gegeben und man con-

---

[1] »Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung.« Sitzungsber. Bd. LXXXVII, 2. Abth., S. 843.

struirt die Punktreihe $xx'x''\ldots$ derart, dass jedes folgende Element dem vorausgehenden entspricht, so hat man die Relationen

$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'},\quad \frac{x'}{a}=\frac{x''}{a'},\quad \frac{x''}{a}=\frac{x'''}{a'},\ldots\quad \frac{x^{(k-1)}}{a}=\frac{x^{(k)}}{a'};$$

aus denselben ergibt sich durch Multiplication

$$\frac{xx'x''\ldots x^{(k-1)}}{a^k}=\frac{x'x''\ldots x^{(k)}}{a'^k}$$

oder aber

$$\frac{x}{a^k}=\frac{x^{(k)}}{a'^k}.$$

Ist nun k Theiler von n, also $n=\lambda k$, und sind aa' k-fache Elemente einer der λ^2 aus J^n abgeleiteten J^k, so sind aa' auch n-fache Elemente für J^n aber so, dass schon $a^k=a'^k$; dann ist $x^{(k)}\equiv x$ und die Gruppe $xx'x''\ldots x^{(k-1)}$ geschlossen. Sind aa' nicht Hauptelemente einer solchen abgeleiteten J^k, so muss die obige Gleichungsreihe bis $\frac{x^{(n-1)}}{a}=\frac{x^{(n)}}{a'}$, fortgesetzt werden und man hat $\frac{x}{a^n}=\frac{x^{(n)}}{a'^n}$, woraus wegen $a^n=a'^n$ folgt, dass $x^{(n)}\equiv x$, und es ist der n-elementige Cyklus $xx'\ldots x^{(n-1)}$ geschlossen.

Wir wollen eine cyklische E, welche k-elementige Cyklen liefert, mit E_k bezeichnen und uns die Frage vorlegen: Wie viele E_k gibt es?

32. α) Für $k=2$ ist die Frage bald beantwortet; denn ist xx' ein Cyklus, so muss

$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'}\qquad \frac{x'}{a}=\frac{x}{a'},$$

also $\frac{xx'}{a^2}=\frac{xx'}{a'^2}$, d. h. $a^2=a'^2$ sein; aa' sind also conjugirte Punkte. Den drei Systemen conjugirter Punkte entsprechen also die drei E_2 auf C_3.

33. β) Für $k=3$ liefert der Cyklus $xx'x''$ die Gleichungen

$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'}\qquad \frac{x'}{a}=\frac{x''}{a'}\qquad \frac{x''}{a}=\frac{x}{a'};$$

dieselben führen zu $\frac{xx'x''}{a^3} = \frac{xx'x''}{a'^3}$ oder zu $a^3 = a'^3$ und zeigen, dass aa' Hauptelemente einer J_3^3 sind.

Es seien nun

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

die neun Hauptelemente einer J^3 in der Artikel 29 erörterten Anordnung. In der $E(a_1 b_1)$ entspricht dem Element b_1 das Element c_1 und dem c_1 das a_1; denn wird mit u_1 das dem b_1 entsprechende Element bezeichnet, so muss $\frac{b_1}{a_1} = \frac{u_1}{b_1}$ oder $\frac{b_1}{a_1 c_1} = \frac{u_1}{b_1 c_1}$ sein; nun ist aber $a_1 c_1 = b_1^2$, daher hat man weiter $\frac{1}{b_1} = \frac{u_1}{b_1 c_1}$, woraus wirklich $u_1 \equiv c_1$ folgt u. s. w. Es ist also $E(a_1 b_1) \equiv E_1(b_1 c_1) \equiv E(c_1 a_1)$ und diese cyklische E_3 möge mit $E(a_1 b_1 c_1)$ bezeichnet werden; $E(a_2 b_2 c_2)$, $E(a_3 b_3 c_3)$ stellen die nämliche E_3 dar; denn wenn $\frac{x}{a_2} = \frac{x'}{b_2}$, so ist auch $\frac{x}{a_1 a_2} = \frac{x'}{a_1 b_2}$, aber wegen $a_1 b_2 = a_2 b_1$ gibt dies $\frac{x}{a_1 a_2} = \frac{x'}{a_2 b_1}$, d. h. $\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1}$, was bewiesen werden sollte. Wir haben also

$$E(a_1 b_1 c_1) \equiv E(a_2 b_2 c_2) \equiv E(a_3 b_3 c_3)$$

ebenso

$$E(a_1 a_2 a_3) \equiv E(b_1 b_2 b_3) \equiv E(c_1 c_2 c_3)$$
$$E(a_1 b_2 c_3) \equiv E(a_2 b_3 c_1) \equiv E(a_3 b_1 c_2)$$
$$E(a_3 b_2 c_1) \equiv E(a_1 b_3 c_2) \equiv E(a_2 b_1 c_3)$$

und dies sind die vier E_3. Sie sind auch als die $E(a_1 b_1)$, $E(a_1 b_2)$, $E(a_1 a_2)$ und $E(a_1 b_3)$ gegeben, und zwar sind es die einzigen vier. Dies erkennt man in folgender Weise. Man darf die Elemente eines Cyklus cyklisch permutiren; insbesondere bleibt die cyklische E auch dieselbe, wenn man den Cyklus umkehrt, also z. B. aus $a_1 b_1 c_1$ macht $c_1 b_1 a_1$; nimmt man hierauf Rücksicht, so wird man wahrnehmen, dass in den obigen vier E_3 jedes der acht Elemente $b_1 c_1 \ldots c_3$ als dem a_1 ent-

sprechend schon vorkommt; folglich bleibt für eine weitere E_3 kein Element übrig, welches dem a_1 entsprechen könnte.

Es sei $xx'x''$ irgend ein Cyklus der $E(a_1b_1c_1)$, so muss

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} \qquad \frac{x'}{a_1} = \frac{x''}{b_1}$$

oder also $\frac{x'}{a_1b_1} = \frac{x''}{b_1^2}$ sein; nun ist $b_1^2 = a_1c_1$, daher weiter $\frac{x'}{a_1b_1} = \frac{x''}{a_1c_1}$, d. h. $\frac{x'}{b_1} = \frac{x''}{c_1}$, so dass für die $E(a_1b_1c_1)$ die Gleichungen bestehen

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} = \frac{x''}{c_1}$$

und ähnliche Gleichungen gelten für die übrigen.

34. »Wird ein Cyklus $xx'x''$ aus einem Punkte z der C_3 auf diese projicirt (die Projection ganz allgemein durch eine beliebige J^3 hergestellt), so ergibt sich wieder ein Cyklus.«

Bezeichnet man die Projectionen von $xx'x''$ der Reihe nach mit $yy'y''$, so ist $xyz = x'y'z = x''y''z$, also auch

$$xy = x'y' = x''y'',$$

woraus $x : x' : x'' = \frac{1}{y} : \frac{1}{y'} : \frac{1}{y''}$, und da $\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} = \frac{x''}{c_1}$, weiter $\frac{1}{a_1y} = \frac{1}{b_1y'} = \frac{1}{c_1y''}$ oder

$$a_1y = b_1y' = c_1y''$$

folgt; stellt man diesen Beziehungen die bekannten

$$a_1c_1 = b_1^2 = a_1c_1$$

gegenüber, so ergibt sich durch Division

$$\frac{y}{c_1} = \frac{y'}{b_1} = \frac{y''}{a_1},$$

wodurch erwiesen ist, dass $y''y'y$ wieder einen Cyklus von $E(a_1b_1c_1)$ darstellen.

35. Es sei $xx'x''$ ein Cyklus in der $E(a_1 b_1)$, so ist

$$\frac{x}{a_1} = \frac{x'}{b_1} \qquad \frac{x'}{a_1} = \frac{x''}{b_1}$$

also

$$x' = \frac{b_1}{a_1} x \qquad x'' = \frac{b_1}{a_1} x' = \frac{b_1^2}{a_1^2} x.$$

Ist $yy'y''$ ein zweiter beliebiger Cyklus derselben E, so hat man ebenso

$$y' = \frac{b_1}{a_1} y \qquad y'' = \frac{b_1^2}{a_1^2} y$$

und für einen dritten Cyklus $zz'z''$

$$z' = \frac{b_1}{a_1} z \qquad z'' = \frac{b_1^2}{a_1^2} z.$$

Aus diesen drei Gleichungspaaren ergibt sich durch Multiplication

$$x'y'z' = \frac{b_1^3}{a_1^3} xyz = xyz$$

$$x''y''z'' = \frac{b_1^6}{a_1^6} xyz = xyz,$$

so dass

$$xyz = x'y'z' = x''y''z'', \tag{1}$$

d. h. die drei Tripel xyz, $x'y'z'$, $x''y''z''$ gehören einer J^3 an.

Da man nun in jedem Tripel die Elemente cyklisch vertauschen darf, so ist auch (wenn die Vertauschung in dem Tripel $x\,x'x''$ vorgenommen wird):

$$x'yz = x''y'z' = xy''z''; \tag{2}$$

dagegen erhält man durch Vertauschung der y

$$xy'z = x'y''z' = x''yz'' \tag{3}$$

und durch Vertauschung der z

$$xyz' = x'y'z'' = x''y''z. \tag{4}$$

Weil jedoch

$$x'yz = \frac{b_1}{a_1} xyz, \qquad xy'z = \frac{b_1}{a_1} xyz, \qquad xyz' = \frac{b_1}{a_1} xyz,$$

so gehören die Tripel (2), (3), (4) wieder einer J^3 an.

Führt man in (2), (3), (4) mit dem x-Tripel nochmalige cyklische Vertauschung aus, so ergeben sich die Relationen

$$x''yz = xy'z' = x'y''z'' \tag{2'}$$

$$x'y'z = x''y''z' = xyz'' \tag{3'}$$

$$x'yz' = x''y'z'' = xy''z \tag{4'}$$

und da

$$x'yz' = \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz, \qquad x'y'z = \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz, \qquad x'yz' = \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz,$$

so gehören (2′), (3′), (4′) wieder einer J^3 an.

Wenn man in (3′), (4′) mit der Vertauschung nochmals vorgeht, so kommt man zu

$$x''y'z = xy''z' = x'yz'' \tag{3''}$$

$$x''yz' = xy'z'' = x'y''z \tag{4''}$$

und weil

$$x''y'z = \frac{b_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{b_1}{a_1} xyz = \frac{b_1^3}{a_1^3} xyz = xyz$$

$$x''yz' = \frac{b_1^3}{a_1^3} xyz = xyz,$$

so gehören (3″), (4″) derselben J^3 an wie (1).

Die drei Cyklen $xx'x''$, $yy'y''$, $zz'z''$ aus $E(a_1 b_1)$ lassen sich also dreimal in drei Tripel der Involution $J^3 \equiv xyz$, dreimal in drei Tripel der Involution $J^3 \equiv \frac{b_1}{a_1} xyz$ und dreimal in drei Tripel von $J^3 \equiv \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz$ ordnen. Weitere J^3, die man noch herstellen kann, fallen mit den eben gefundenen zusammen: so gibt z. B. $x''y''z = \frac{b_1^2}{a_1^2} \frac{b_1^2}{a_1^2} xyz = \frac{b_1^4}{a_1^4} xyz = \frac{b_1}{a_1} xyz$, und das

fällt zusammen mit (2), (3), (4); ebenso liefern die reciproken Coëfficienten $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_1^2}{b_1^2}$ nichts Neues, weil $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 b_1^3}{a_1^3 b_1} = \frac{b_1^2}{a_1^2}$ und $\frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_1^2 b_1^3}{a_1^3 b_1^2} = \frac{b_1}{a_1}$ ist.

Anmerkung. Man kann, wenn $a_1 b_1$ Hauptpunkte einer bestimmten J^3 sind, zu jeder andern gegebenen J^3 zwei andere von der Form $\frac{b_1}{a_1} J^3$, $\frac{b_1^2}{a_1^2} J^3$ hinzufügen, d. h. wenn diese J^3 durch ein Tripel xyz gegeben ist, so sind die beiden andern durch die Tripel $\frac{b_1}{a_1} xyz$, $\frac{b_1^2}{a_1^2} xyz$ bestimmt; der letzten entspricht die erste wie der zweiten die dritte und der ersten die zweite, so dass wir eine cyklische Beziehung von Tripeln der J^3 vor uns haben.

Oben sind die drei von einander verschiedenen Involutionen gegeben durch die Tripel xyz, xyz', xyz''.

III. Über eine J_3^4 auf C_3.

36. Die Berührungspunkte der aus einem Punkte p der C_3 an diese geführten Tangenten seien $abcd$, die Berührungspunkte

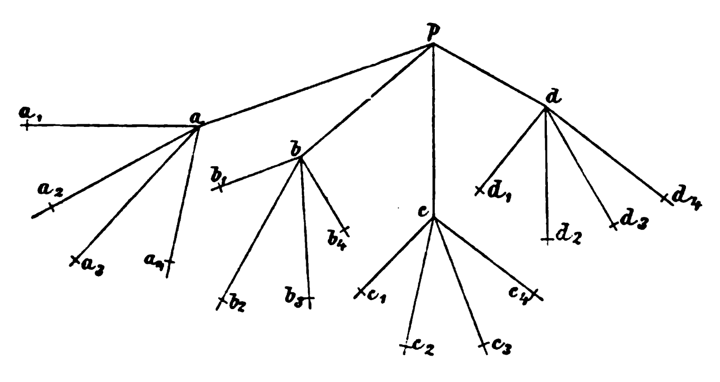


Fig. 4.

der aus $abcd$ gelegten Tangenten seien $a_i b_i c_i d_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ (siehe die schematische Fig. 4). Man kann dann die $a_i b_i c_i d_i$ durch $a_1 b_1 c_1 d_1$ wie folgt ausdrücken:

$$\begin{array}{llll}
a_1 = a_1 & b_1 = b_1 & c_1 = c_1 & d_1 = d_1 \\
a_2 = \frac{b}{a} a_1 & b_2 = \frac{b}{a} b_1 & c_2 = \frac{b}{a} c_1 & d_2 = \frac{b}{a} d_1 \\
a_3 = \frac{c}{a} a_1 & b_3 = \frac{c}{a} b_1 & c_3 = \frac{c}{a} c_1 & d_3 = \frac{c}{a} d_1 \\
a_4 = \frac{d}{a} a_1 & b_4 = \frac{d}{a} b_1 & c_4 = \frac{d}{a} c_1 & d_4 = \frac{d}{a} d_1 ;
\end{array}$$

mit andern Worten: Setzt man $\frac{b}{a} = w_2$, $\frac{c}{a} = w_3$, $\frac{d}{a} = w_4$, so sind dies die drei Functionen, mittels welcher man aus einem Punkte x die ihm in den drei Systemen conjugirten Pole erhält. Man hat bei Anwendung dieser Bezeichnungen die Relationen

$$b = w_2 a \qquad c = w_3 a \qquad d = w_4 a$$

$$\begin{array}{llll}
a_1 = a_1 & b_1 = b_1 & c_1 = c_1 & d_1 = d_1 \\
a_2 = w_2 a_1 & b_2 = w_2 b_1 & c_2 = w_2 c_1 & d_2 = w_2 d_1 \\
a_3 = w_3 a_1 & b_3 = w_3 b_1 & c_3 = w_3 c_1 & d_3 = w_3 d_1 \\
a_4 = w_4 a_1 & b_4 = w_4 b_1 & c_4 = w_4 c_1 & d_4 = w_4 d_1
\end{array}$$

Es bestehen aber weiter die Beziehungen

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2$$
$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_4^2$$
$$b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = b_4^2$$
$$c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = c_4^2$$
$$d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = d_4^2$$
$$w_2^2 = w_3^2 = w_4^2 = 1$$
$$a_1^4 = a_2^4 = \ldots = b_1^4 = \ldots =$$

Weil ferner $a_1 a_2 = a_3 a_4$, so ist

$$w_3 w_4 = w_2,$$

ebenso

$$w_4 w_2 = w_3$$
$$w_2 w_3 = w_4;$$

aus der ersten dieser Gleichungen folgt, wenn man sie mit w_2 multiplicirt und berücksichtigt, dass $w_2^2 = 1$ ist,

$$w_2 w_3 w_4 = 1.$$

Hiernach ist

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = b_1 b_2 b_3 b_4 = c_1 c_2 c_3 c_4 = d_1 d_2 d_3 d_4 = a_1^4 = \ldots = d_4^4.$$

Gilt weiter für ein gerades Tripel, auf C_3 die Gleichung $x_1 x_2 x_3 = k$, so hat man

$$a^2 p = b^2 p = c^2 p = d^2 p = k.$$
$$a_i^2 a = b_i^2 b = c_i^2 c = d_i^2 d = k.$$

Weil $w_j^2 = 1$, so gelten die Gleichungen

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = a_4 b_4$$
$$a_1 c_1 = a_2 c_2 = a_3 c_3 = a_4 c_4$$
$$a_1 d_1 = a_2 d_2 = a_3 d_3 = a_4 d_4$$
$$b_1 c_1 = b_2 c_2 = b_3 c_3 = b_4 c_4$$
$$b_1 d_1 = b_2 d_2 = b_3 d_3 = b_4 d_4$$
$$c_1 d_1 = c_2 d_2 = c_3 d_3 = c_4 d_4$$

Aus $a_i^2 a = k$ und $a^2 p = k$ und den analogen Gleichungen folgt

$$\frac{a_i^2}{a} = \frac{b_k^2}{b} = \frac{c_l^2}{c} = \frac{d_m^2}{d} = p.$$

Wegen der Beziehungen $w_3 w_4 = w_2$ u. s. w. ist

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 = a_3 b_4 = a_4 b_3 \; (= w_2 a_1 b_1)$$
$$a_1 c_2 = a_2 c_1 = a_3 c_4 = a_4 c_3 \; (= w_2 a_1 c_1)$$
$$a_1 d_2 = a_2 d_1 = a_3 d_4 = a_4 d_3 \; (= w_2 a_1 d_1)$$
$$b_1 c_2 = b_2 c_1 = b_3 c_4 = b_4 c_3 \; (= w_2 b_1 c_1)$$
$$b_1 d_2 = b_2 d_1 = b_3 d_4 = b_4 d_3 \; (= w_2 b_1 d_1)$$
$$c_1 d_2 = c_2 d_1 = c_3 d_4 = c_4 d_3 \; (= w_2 c_1 d_1)$$

ferner

$$a_1 b_3 = a_3 b_1 = a_2 b_4 = a_4 b_2 \; (= w_3 a_1 b_1)$$
$$a_1 c_3 = a_3 c_1 = a_2 c_4 = a_4 c_2 \; (= w_3 a_1 c_1)$$
$$a_1 d_3 = a_3 d_1 = a_2 d_4 = a_4 d_2 \; (= w_3 a_1 d_1)$$
$$b_1 c_3 = b_3 c_1 = b_2 c_4 = b_4 c_2 \; (= w_3 b_1 c_1)$$
$$b_1 d_3 = b_3 d_1 = b_2 d_4 = b_4 d_2 \; (= w_3 b_1 d_1)$$
$$c_1 d_3 = c_3 d_1 = c_2 d_4 = c_4 d_2 \; (= w_3 c_1 d_1)$$

endlich

$$a_1 b_4 = a_4 b_1 = a_2 b_3 = a_3 b_2 \; (= w_4 a_1 b_1)$$
$$a_1 c_4 = a_4 c_1 = a_2 c_3 = a_3 c_2 \; (= w_4 a_1 c_1)$$
$$a_1 d_4 = a_4 d_1 = a_2 d_3 = a_3 d_2 \; (= w_4 a_1 d_1)$$
$$b_1 c_4 = b_4 c_1 = b_2 c_3 = b_3 c_2 \; (= w_4 b_1 c_1)$$
$$b_1 d_4 = b_4 d_1 = b_2 d_3 = b_3 d_2 \; (= w_4 b_1 d_1)$$
$$c_1 d_4 = c_4 d_1 = c_2 d_3 = c_3 d_2 \; (= w_4 c_1 d_1)$$

37. Die Involution J_3^4 auf C_3, welche wir in Betracht ziehen, sei definirt durch die Gleichung

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = kp.$$

Wir wählen aus jedem der Quadrupel $a_i b_i c_i$ je einen Punkt, z. B. $a_\alpha b_\beta c_\gamma$ und ergänzen dieses Tripel durch x zu einem Quadrupel der J_3^4; dann muss der Definition gemäss

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma x = kp,$$

somit auch $a_\alpha^2 b_\beta^2 c^2 x^2 = k^2 p^2$ oder $\frac{k}{a} \frac{k}{b} \frac{k}{c} x^2 = k^2 p^2$, also $kx^2 = abcp^2$ sein; da aber $bc = ad$, so hat man auch $kx^2 = a^2 dp$ und wegen $a^2 = d^2$ weiter $kx^2 = d^3 p^2$; nun ist $d^2 p = k$, somit $x^2 = dp = \frac{k}{d} = d_i^2$; es ist also x einer der Punkte d_i. D. h.:

»Wählt man aus dreien der Quadrupel $a_i b_i c_i d_i$ je ein Element, so wird ein solches Tripel jedesmal durch ein Element des vierten Quadrupels zu einem Quadrupel unserer J_3^4 ergänzt.«

Wir wollen nun jenen der Punkte d_i, welcher mit $a_1 b_1 c_1$ ein Quadrupel der J_3^4 bildet, mit d_1 bezeichnen, also festsetzen, dass

$$a_1 b_1 c_1 d_1 = kp$$

sei. Es handelt sich jetzt darum, alle möglichen Quadrupel aus den Elementen $a_i b_i c_i d_i$ zu ermitteln.

Zunächst überzeugt man sich durch einen Blick auf die letzten drei Gruppen von Relationen in Artikel 36, dass $a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$ ein Quadrupel der J^4 ist, sobald $\alpha\beta\gamma\delta$ von einander verschieden sind; folglich stellen die 24 Glieder der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

ebensoviele Quadrupel dar.

Es ist ferner jede Gruppe der Form $a_\varkappa b_\varkappa c_\lambda d_\lambda$ $(\varkappa \gtreqless \lambda)$ ein Quadrupel der J^4; denn es ist ja $a_\varkappa b_\varkappa = w_\varkappa^2 a_1 b_1$ und $c_\lambda d_\lambda = = w_\lambda^2 c_1 d_1$, und weil $w_\varkappa^2 = w_\lambda^2 = 1$, so kommt thatsächlich $a_\varkappa b_\varkappa c_\lambda d_\lambda = a_1 b_1 c_1 d_1$. Es sind also $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_1 b_1 c_2 d_2$, $a_1 b_1 c_3 d_3, \ldots$ lauter Quadrupel der J^4; wie man bemerkt, befinden sich darunter auch die Horizontalreihen obiger Determinante. Die Abzählung dieser Formen ist leicht; aus jeder Zeile lassen sich sechs Paare bilden, und jedes dieser Paare kann mit vier andern verbunden werden; da es nun vier Zeilen gibt, so entstünden 4.6.4 Verbindungen, von denen aber jede zweimal vorkommt, so dass noch $\frac{4.6.4}{2} = 48$ Combinationen blieben; aber jedes der vier Quadrupel $a_\varkappa b_\varkappa c_\varkappa d_\varkappa$ ist dabei immer noch dreimal gezählt (nämlich von $a_\varkappa b_\varkappa$, $a_\varkappa c_\varkappa$, $a_\varkappa d_\varkappa$ herrührend); es müssen daher von obiger Zahl $2.4 = 8$ Einheiten subtrahirt werden. Dies gibt $48 - 8 = 40$ von einander verschiedene Quadrupel der Form $\varkappa\varkappa\lambda\lambda$ (oder $\varkappa\lambda\varkappa\lambda$ oder $\lambda\lambda\varkappa\varkappa$). Dies zu den 24 Gliedern der Determinante und zu den vier Quadrupeln a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ hinzugefügt, gibt vorläufig $24 + 4 + + 40 = 68$ Quadrupel.

Um die noch übrig bleibenden zu ermitteln, stellen wir folgende Betrachtung an. Es wird C_3 zum drittenmale geschnitten

von $a_1 a_2$ oder $a_3 a_4$ in $\dfrac{k}{a_1 a_2} = \dfrac{a_1^2 a}{a_1 \dfrac{b}{a} a_1} = \dfrac{a^2}{b} = \dfrac{b^2}{b} = b$

» $a_1 a_3$ » $a_2 a_4$ » $\dfrac{k}{a_1 a_3} = \dfrac{a_1^2 a}{a_1 \dfrac{c}{a} a_1} = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{c^2}{c} = c$

» $a_1 a_4$ » $a_2 a_3$ » $\dfrac{k}{a_1 a_4} = \dfrac{a_1^2 a}{a_1 \dfrac{d}{a} a_1} = \dfrac{a^2}{d} = \dfrac{d^2}{d} = d$

von $b_1 b_2$ oder $b_3 b_4$ in $\frac{k}{b_1 b_2} = \frac{b_1^2 b}{b_1 \frac{b}{a} b_1} = a$

» $b_1 b_3$ » $b_2 b_4$ » $\frac{k}{b_1 b_3} = \frac{b_1^2 b}{b_1 \frac{c}{a} b_1} = \frac{ab}{c} = d$

» $b_1 b_4$ » $b_2 b_3$ » $\frac{k}{b_1 b_4} = \frac{b_1^2 b}{b_1 \frac{d}{a} b_1} = \frac{ab}{d} = c$

» $c_1 c_2$ » $c_3 c_4$ » $\frac{k}{c_1 c_2} = \frac{c_1^2 c}{c_1 \frac{b}{a} c_1} = \frac{ac}{b} = d$

» $c_1 c_3$ » $c_2 c_4$ » $\frac{k}{c_1 c_3} = \frac{c_1^2 c}{c_1 \frac{c}{a} c_1} = a$

» $c_1 c_4$ » $c_2 c_3$ » $\frac{k}{c_1 c_4} = \frac{c_1^2 c}{c_1 \frac{d}{a} c_1} = \frac{ac}{d} = b$

» $d_1 d_2$ » $d_3 d_4$ » $\frac{k}{d_1 d_2} = \frac{d_1^2 d}{d_1 \frac{b}{a} d_1} = \frac{ad}{b} = c$

» $d_1 d_3$ » $d_2 d_4$ » $\frac{k}{d_1 d_3} = \frac{d_1^2 d}{d_1 \frac{c}{a} d_1} = \frac{ad}{c} = b$

» $d_1 d_4$ » $d_2 d_3$ » $\frac{k}{d_1 d_4} = \frac{d_1^2 d}{d_1 \frac{d}{a} d_1} = a;$

$b_1 b_2,\ b_3 b_4;\ c_1 c_3,\ c_2 c_4;\ d_1 d_4,\ d_2 d_3$ durch a
$a_1 a_2,\ a_3 a_4;\ c_1 c_4,\ c_2 c_3;\ d_1 d_3,\ d_2 d_4$ » b
$a_1 a_3,\ a_2 a_4;\ b_1 b_4,\ b_2 b_3;\ d_1 d_2,\ d_3 d_4$ » c
$a_1 a_4,\ a_2 a_3;\ b_1 b_3,\ b_2 b_4;\ c_1 c_2,\ c_3 c_4$ » d

Man kann sich dieses Verhalten schematisch wie folgt darstellen: Es geht

a_1a_2 durch b	b_2b_1 durch a	c_3c_1 durch a	d_4d_1 durch a
a_1a_3 » c	b_2b_3 » c	c_3c_2 » b	d_4d_2 » b
a_1a_4 » d	b_2b_4 » d	c_3c_4 » d	d_4d_3 » c;

man bemerkt, dass der zweite Index, je nachdem er 1, 2, 3, 4 ist, auf a, b, c, d respective hindeutet; mit Hilfe dieses Schemas ist man im Stande, sofort den dritten Schnittpunkt eines beliebigen $a_\varkappa a_\lambda$ oder $b_\varkappa b_\lambda$ u. s. w. anzugeben.

Verknüpfen wir a_1a_2 mit irgend einem b_i, z. B. mit b_2, und ist x der vierte Quadrupelpunkt, so muss $a_1a_2b_2x = a_1a_2a_3a_4$, somit $b_2\,x = a_3a_4 = a_1a_2$ sein; d. h. $b_2\,x$ und a_1a_2 müssen durch denselben Punkt von C_3 gehen; nun geht a_1a_2 dem obigen Schema zufolge durch b, kein b_2b_n aber läuft durch den Punkt b, somit führt $a_1a_2b_2$ zu keinem Quadrupel. Verknüpft man dagegen a_1a_2 mit einem c_i, z. B. c_3, und nennt den vierten Punkt x, so folgt aus $a_1a_2c_3\;x = a_1a_2a_3a_4$, dass $c_3\;x = a_3a_4 = a_1a_2$; nun läuft c_3c_2 ebenso durch b wie a_1a_2, folglich ist $x = c_2$ und $a_1a_2c_3c_2$ das gesuchte Quadrupel.

Allgemein: Es seien $e'e''e'''e^{IV}$ die Elemente irgend einer Verticalreihe; die Gerade $e'e''$ gehe durch m (wobei m einer der Punkte $abcd$ ist); dann sei e_1 irgend ein Element einer andern Verticalreihe und x das fehlende vierte zu $e'e''e_1$, so ist $e'e''e_1x = e'e''e'''e^{IV}$, also $e_1x = e'''e^{IV} = e'e''$, d. h. es ist x so zu bestimmen, dass $\overline{e_1x}$ durch denselben Punkt geht wie $\overline{e'e''}$.

Nun sind wir in der Lage, jedes Tripel zu einem Quadrupel der J^4 zu vervollständigen. Wäre z. B. $c_2c_3a_1$ zu ergänzen, so beachte man, dass c_2c_3 durch b geht, und da a_1a_2 auch durch b geht, so ist $c_2c_3a_1a_2$ das Quadrupel. Soll $c_1c_4b_2$ vervollständigt werden, so bemerke man, dass c_1c_4 (wie c_2c_3) durch b geht, und weil b der Tangentialpunkt zu b_2 ist, so ist $c_1c_4b_2b_2$ das Quadrupel u. s. w.

Jetzt lässt sich leicht zeigen, dass man auf dem eben entwickelten Wege noch 48 Quadrupel erhält. Wie ein Blick auf das obige Schema lehrt, liefert a_1a_2 mit b_i kein Quadrupel, dagegen mit c_i und d_i je zwei (nämlich c_3c_2 und c_1c_4, beziehungsweise d_4d_2 und d_1d_3), im Ganzen vier; überhaupt gibt jedes der sechs Paare $a_\varkappa a_\lambda$ zu vier Quadrupeln Anlass, daher stammen aus der ersten Colonne $6.4 = 24$, aus allen vier

Colonnen $4.24 = 96$ Combinationen, deren jede aber zweimal vorkommt, so dass wirklich 48 verschiedene Quadrupel der J_3^4 entstehen. Nach dem Schema geordnet sind es die folgenden:

$$a_1a_2c_1c_4;\ a_1a_2c_2c_3;\ a_1a_2d_1d_3;\ a_1a_2d_2d_4$$
$$a_3a_4c_1c_4;\ a_3a_4c_2c_3;\ a_3a_4d_1d_3;\ a_3a_4d_2d_4$$
$$a_1a_3b_2b_3;\ a_1a_3b_1b_4;\ a_1a_3d_1d_2;\ a_1a_3d_3d_4$$
$$a_2a_4b_2b_3;\ a_2a_4b_1b_4;\ a_2a_4d_1d_2;\ a_2a_4d_3d_4$$
$$a_1a_4b_1b_3;\ a_1a_4b_2b_4;\ a_1a_4c_1c_2;\ a_1a_4c_3c_4$$
$$a_2a_3b_1b_3;\ a_2a_3b_2b_4;\ a_2a_3c_1c_2;\ a_2a_3c_3c_4$$
$$b_1b_2c_1c_3;\ b_1b_2c_2c_4;\ b_1b_2d_1d_4;\ b_1b_2d_2d_3$$
$$b_3b_4c_1c_3;\ b_3b_4c_2c_4;\ b_3b_4d_1d_4;\ b_3b_4d_2d_3$$
$$b_1b_3c_1c_2;\ b_1b_3c_3c_4$$
$$b_2b_4c_1c_2;\ b_2b_4c_3c_4$$
$$b_1b_4d_1d_2;\ b_1b_4d_3d_4$$
$$b_2b_3d_1d_2;\ b_2b_3d_3d_4$$
$$c_1c_3d_1d_4;\ c_1c_3d_2d_3$$
$$c_2c_4d_1d_4;\ c_2c_4d_2d_3$$
$$c_1c_4d_2d_4;\ c_1c_4d_1d_3$$
$$c_2c_3d_2d_4;\ c_2c_3d_1d_3$$

Im Ganzen gibt es also $68+48 = 116$ Quadrupel der J_3^4, welche sich aus je vier von den 16 Elementen $a_ib_ic_id_i$ zusammensetzen. (Siehe Schroeter, Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumcurve vierter Ordnung erster Species, 1890, S. 81 ff., die Configuration der 16 Wendeberührungspunkte einer R_4 betreffend.)

IV. Über eine allgemeine J^n auf C_3.

38. »Wenn auf einer allgemeinen Curve dritter Ordnung C_3 eine Involution J^n n^{ten} Grades $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe gegeben ist, so besteht für eine jede Elementengruppe die Gleichung $x_1x_2\ldots x_n = C$. Man kann nun C immer in der Form $C = k^{\mu}\alpha$ darstellen, wobei $k = u_1u_2u_3$ die Gleichung der fundamentalen

J^3 der geraden Tripel (oder einer beliebigen J^3) und α entweder $= a$, oder $= \frac{1}{a}$ oder $= \frac{a}{b}$ ist, wo a, b Punkte der C_3 bedeuten.«

Beweis. Für J^2 hat man $x_1 x_2 = C$, und wenn $x_1 x_2 a = k$, so ist $C = \frac{k}{a}$ (also $\alpha = \frac{1}{a}$ und $\mu = 1$); a ist das Centrum der J^2.

Für J^3 ist $x_1 x_2 x_3 = C$; ein beliebiges aber festes Tripel dieser Involution gibt $a_1 a_2 a_3 = C$; ist nun $a_2 a_3 b_1 = k$, so ist $a_2 a_3 = \frac{k}{b_1}$ und somit $C = \frac{a_1}{b_1} k$ (also $\alpha = \frac{a_1}{b_1}$ und $\mu = 1$).

Für J^4 ist $x_1 x_2 x_3 x_4 = C$ und wenn $x_1 x_2 x_3 x_4 = ka$ gesetzt wird, so ist $C = ka$ und es bedeutet a das Centrum der J^4 oder den Gegenpunkt aller Quadrupel[1] ($\alpha = a$ und $\mu = 1$).

Für J^5 ist $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = C$; wenn $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 a = k^2$, so dass, wenn k die geraden Tripel charakterisirt, a den sechsten Schnittpunkt des durch $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ gelegten Kegelschnittes bedeutet (das Centrum der Involution $J^{5,2}$) so ist $C = \frac{k^2}{a}$ ($\alpha = \frac{1}{a}$ und $\mu = 2$).

Für J^6 ist $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = C$; für ein beliebiges aber festes Sextupel hat man $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = C$ und wenn $a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b_1 = k^2$ ist, so folgt $C = \frac{a_1}{b_1} k^2$ ($\alpha = \frac{a_1}{b_1}$ und $\mu = 2$).

Allgemein gilt Folgendes:

Wenn

$$\frac{n}{3} = \mu \qquad \frac{n}{3} = \mu + \frac{1}{3} \qquad \frac{n}{3} = \mu + \frac{2}{3}$$

so ist

$$C = k^{\mu} \frac{a}{b} \qquad C = k^{\mu} a \qquad C = \frac{k^{\mu+1}}{a} \cdot$$

Man ersieht hieraus, dass mit einer Involution J^n ein fester Punkt (a) der C_3 verknüpft ist, sobald 3 nicht Theiler des Ord-

[1] Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf Curven vom Geschlechte Eins. Sitzungsber. Bd. LXXXVIII, 2. Abth., Art. 10.

[2] Ibid., Art. 14.

nungsexponenten n ist, dagegen eine eindeutige Beziehung $E(ab)$, sobald n durch 3 theilbar ist.

V. Einer C_3 gleichzeitig um- und eingeschriebene Polygone.

39. In der Reihe der Punkte $x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}$ auf einer C_3 soll jeder Punkt der Tangentialpunkt des vorhergehenden sein. Hat die fundamentale J^3 der geraden Tripel die Gleichung $u_1 u_2 u_3 = k$, so bestehen zwischen jenen Punkten folgende Relationen:

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 &= k \\ x_2^2 x_3 &= k \\ \ldots & \ldots \\ x_{n-1}^2 x_n &= k \\ x_n^2 x_{n+1} &= k \end{aligned} \tag{I}$$

Wir erheben diese Gleichungen der Reihe nach zu den Potenzen $2^{n-1}, 2^{n-2} \ldots 2^1, 2^0$ und schreiben sie, die Fälle eines geraden und eines ungeraden n trennend, in folgender Anordnung:

α) Für ein gerades n.

$$\begin{aligned} x_1^{2^n} x_2^{2^{n-1}} &= k^{2^{n-1}} \\ k^{2^{n-2}} &= x_2^{2^{n-1}} x_3^{2^{n-2}} \\ \ldots & \ldots \\ x_{n-1}^{2^2} x_n^{2^1} &= k^{2^0} \\ k^{2^0} &= x_n^{2^1} x_{n+1}^{2^0} \end{aligned} \tag{II$^\alpha$}$$

Aus dieser Darstellung erkennt man bald, dass das Resultat der Multiplication lautet:

$$x_1^{2^n} k^{2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots+2^0} = x_{n+1} k^{2^{n-1}+2^{n-3}+\ldots+2^1}.$$

Nun ist, weil n gerad,

$$2^{n-1}+2^{n-3}+\ldots+2^1 = 2\,\frac{(2^2)^{\frac{n}{2}}-1}{2^2-1} = \frac{2^{n+1}-2}{3}$$

$$2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots+2^0 = \frac{(2^2)^{\frac{n}{2}}-1}{2^2-1} = \frac{2^n-1}{3};$$

somit hat man für gerade n endgiltig

$$x_1^{2^n} = x_{n+1} k^{\frac{2^n-1}{3}}. \qquad (\mathrm{III}^\alpha)$$

β) Bei einem ungeraden n ordne man die Gleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned} x_1^{2^n} x_2^{2^{n-1}} &= k^{2^{n-1}} \\ k^{2^{n-2}} &= x_2^{2^{n-1}} x_3^{2^{n-2}} \\ &\cdots\cdots \\ x_{n-2}^{2^3} x_{n-1}^{2^2} &= k^{2^2} \\ k^{2^1} &= x_{n-1}^{2^2} x_n^{2^1} \\ x_n^{2^1} x_{n+1}^{2^0} &= k^{2^0} \end{aligned} \qquad (\mathrm{II}^\beta)$$

ihr Product ist

$$x_1^{2^n} x_{n+1} k^{2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots+2^1} = k^{2^{n-1}+2^{n-3}+\ldots+2^0};$$

für ein ungerades n hat man aber

$$2^{n-1}+2^{n-3}+\ldots+2^0 = \frac{(2^2)^{\frac{n+1}{2}}-1}{2^2-1} = \frac{2^{n+1}-1}{3}$$

$$2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots+2^1 = 2\,\frac{(2^2)^{\frac{n-1}{2}}-1}{2^2-1} = \frac{2^n-2}{3};$$

folglich lautet die obige Gleichung in reducirter Form

$$x_1^{2^n} x_{n+1} = k^{\frac{2^n+1}{3}}. \qquad (\mathrm{III}^\beta)$$

Man kann übrigens beide Fälle in einer Formel zusammenfassen, wenn man bemerkt, dass der Exponent von k der Werth von $\frac{2^n-(-1)^n}{3}$ und der Exponent von x_{n+1} auf der rechten Seite $+1$ oder -1 ist, je nachdem n gerad oder ungerad. Mithin hat man folgende allgemeine Relation zwischen einem beliebigen Punkte x_1 einer C_3 und seinem n^{ten} Tangentialpunkt x_{n+1}:

$$x_1^{2^n} = x^{(-1)^n} k^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} \qquad (\mathrm{III})$$

40. Wir wollen, bevor wir auf die geschlossenen Polygone eingehen, von dieser Formel Gebrauch machen, um zu zeigen, wie man aus den aufeinanderfolgenden Tangentialpunkten eines Punktes der C_3 seine Tangentialpunkte verschiedener Ordnungen ableiten kann.

Es sei x der gegebene Punkt von C_3, x_1 sein erster, x_2 sein zweiter,... x_n sein n^{ter} Tangentialpunkt; dann ist vermöge der Formel (III)

$$x^{2^n} = x_n^{(-1)^n} k^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}.$$

Hiernach ist speciell

$$\begin{aligned} x^2 x_1 &= k \\ x^4 &= k x_2 \\ x^8 x_3 &= k^3 \\ x^{16} &= k^5 x_4 \\ x^{32} x_5 &= k^{11} \\ x^{64} &= k^{21} x_6 \text{ u. s. w.} \end{aligned} \tag{α}$$

Bezeichnet man ferner mit $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ den Tangentialpunkt 1., 2.,... μ^{ter} Ordnung von x, d. i. den Punkt, in welchem C_3 von der $C_1, C_2, \ldots C_\mu$, welche sie in x 2-, 5-,... $(3\mu-1)$-punktig berührt, zum letztenmale geschnitten wird, so gelten für diese die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 y_1 &= k \\ x^5 y_2 &= k^2 \\ x^8 y_3 &= k^3 \\ x^{11} y_4 &= k^4 \\ &\cdots\cdots \\ x^{3\mu-1} y_\mu &= k^\mu. \end{aligned} \tag{β}$$

Durch Verbindung der Gleichungen (α) und (β) ergeben sich nun folgende Constructionen der Punkte $y_1 y_2 \ldots$

1. Es ist $y_1 = x_1$.

2. Aus $x^5 y_2 = k^2$ folgt $x^4 x y_2 = k^2$ und wegen $x^4 = k x_2$ weiter $x x_2 y_2 = k$, d. h. y_2 ist der dritte Schnittpunkt von $x x_2$.

3. $x^8 x_3 = k^3$ mit $x^8 y_3 = k^3$ verglichen zeigt, dass $y_3 = x_3$.

4. $x^{11}y_4 = k^4$ gibt $x^8x^2xy_4 = k^4$, und da $x^8 = \frac{k^3}{x_3}$, $x^2 = \frac{k}{x_1}$, so folgt $xy_4 = x_1x_3$, d. h. man ziehe, um y_4 zu erhalten, aus dem dritten Schnittpunkt von $\overline{x_1x_3}$ eine Gerade nach dem gegebenen Punkte x.

5. Aus $x^{14}y_5 = k^5$ folgt $x^{16}y_5 = k^5x^2$, oder da $x^{16} = k^5x_4$ und $x^2 = \frac{k}{x_1}$, so ist $x_1x_4y_5 = k$, d. h. y_5 ergibt sich als dritter Schnittpunkt von $\overline{x_1x_4}$.

6. $x^{17}y_6 = k^6$ in der Form $x^{16}xy_6 = k^6$ geschrieben gibt wegen $x^{16} = k^5x_4$ die Relation $xx_4y_6 = k$, welche lehrt, dass sich y_6 als dritter Schnitt von $\overline{xx_4}$ ergibt.

7. Aus $x^{20}y_7 = k^7$ folgt, wenn man beachtet, dass $x^{16} = k^5x_4$ und $x^4 = kx_2$ ist, $x_2x_4y_7 = k$, d. h. y_7 ist der dritte Schnittpunkt von $\overline{x_2x_4}$.

8. Schreibt man $x^{23}y_8 = k^8$ in der Gestalt $\frac{x^{16}x^8}{x}y_8 = k^8$ und bemerkt, dass $x^{16} = k^5x_4$ und $x^8 = \frac{k^3}{x_3}$, so folgt $x_4y_8 = xx_3$; man hat also x_4 aus dem dritten Schnittpunkt von $\overline{xx_3}$ auf C_3 zu projiciren, um y_8 zu erhalten.

9. Aus $x^{26}y_9 = k^9$ oder $x^{16}x^8x^2y_9 = k^9$ ergibt sich

$$k^5x_4\frac{k^3}{x_3}\frac{k}{x_1}y_9 = k^9$$

und daraus $x_4y_9 = x_1x_3$, d. h. der dritte Schnittpunkt von x_1x_3 mit x_4 verbunden gibt y_9.

10. Stellt man $x^{29}y_{10} = k^{10}$ in der Form $\frac{x^{32}}{x^3}y_{10} = k^{10}$ dar und beachtet, dass $x^{32} = \frac{k^{11}}{x_5}$ und $x^2 = \frac{k}{x_1}$, so folgt $x_1y_{10} = xx_5$; man hat also x_1 mit dem dritten Schnittpunkt von $\overline{xx_5}$ zu verbinden.

11. Die Vergleichung von $x^{32}y_{11} = k^{11}$ und $x^{32}x_5 = k^{11}$ gibt $y_{11} = x_5$; die C_{11}, welche die C_3 in x 32-punktig berührt, schneidet sie nochmals im fünften Tangentialpunkt.

12. Auf ähnlichem Wege erhält man durch entsprechende Combination von (α), (β) die Gleichungen

$$\begin{aligned} x y_{12} &= x_1 x_5 \\ x_2 y_{13} &= x_1 x_5 \\ x y_{14} &= x_3 x_5 \\ x_2 y_{15} &= x_3 x_5 \\ x_4 y_{16} &= x x_5 \\ x_4 y_{17} &= x_1 x_5 \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

aus welchen die einfachen Constructionen für $y_{12}, y_{13}, \ldots y_{17}$ zu entnehmen sind.

41. Soll das n-Eck $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ (Art. 39) geschlossen sein, so muss der n^{te} Tangentialpunkt mit dem Ausgangspunkte zusammenfallen, also $x_{n+1} \equiv x_1$ sein; demnach ist ein Punkt x der C_3, von welchem aus sich ein geschlossenes der C_3 gleichzeitig um- und eingeschriebenes n-Eck construiren lässt, charakterisirt durch die Gleichung

$$x^{2^n-1} = k^{\frac{2^n-1}{3}} \quad \text{für ein gerades } n \qquad (\mathrm{IV}^\alpha)$$

$$x^{2^n+1} = k^{\frac{2^n+1}{3}} \quad \text{für ein ungerades } n \qquad (\mathrm{IV}^\beta)$$

oder in Zusammenfassung beider Fälle durch die Gleichung

$$x^{2^n-(-1)^n} = k^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}. \qquad (\mathrm{IV})$$

Dies gibt den Satz: »Die Ecken der einer C_3 gleichzeitig um- und eingeschriebenen n-Ecke sind die Hauptpunkte[1] einer Involution vom Grade $2^n-(-1)^n$.«

Die fundamentale J^3 hat die Gleichung $x'x''x''' = k$; die $J^{3\mu}$, welche Curven μ^{ter} Ordnung auf C_3 bestimmen, hat die Gleichung

$$x'x''x''' \ldots x^{(3\mu-1)} x^{(3\mu-1)} x^{(3\mu)} = k^\mu,$$

ihre Hauptpunkte fliessen aus der Gleichung

$$x^{3\mu} = k^\mu;$$

[1] Wir nennen die n-fachen Elemente einer J^n ihre Hauptelemente.

vergleicht man diese mit der oben abgeleiteten (IV), so erkennt man, dass erstere in letztere übergeht, wenn gesetzt wird $\mu = 3^n - (-1)^n$; es sind also die Ecken der n-Ecke unter denjenigen Punkten, in welchen die C_3 von Curven C_μ, das sind Curven $[2^n - (-1)^n]^{\text{ter}}$ Ordnung, 3μ-punktig geschnitten wird.

»Jeder aus der Gleichung (IV) resultirende Punkt hat die Eigenschaft, dass sein n^{ter} Tangentialpunkt mit ihm identisch ist.« Denn nennen wir den letzteren x_{n+1}, so ist nach (III)

$$x^{2^n} = x_{n+1}^{(-1)^n} k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$$

nach Voraussetzung aber

$$x^{2^n - (-1)^n} = k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}};$$

daraus folgt durch Division

$$x^{(-1)^n} = x_{n+1}^{(-1)^n},$$

d. h. $x_{n+1} \equiv x$, was bewiesen werden sollte.

Unter den $[2^n - (-1)^n]^2$ Hauptpunkten der Involution J^μ, aus welchen die Ecken der um- und eingeschriebenen n-Ecke hervorgehen, befinden sich immer auch die neun Inflexionspunkte; denn ist $x^3 = k$, so ist auch $x^{3[2^n - (-1)^n]} = k^{2^n - (-1)^n}$, somit

$$x^{2^n - (-1)^n} = k^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$$

der Gleichung (IV) entsprechend. Scheidet man diese neun Punkte aus, da sie als Ecken nicht auftreten können, so verbleiben noch

$$N_n = [2^n - (-1)^n]^2 - 9$$

Punkte.

Wenn nun n eine Primzahl ist, so ergibt sich als Anzahl der um- und eingeschriebenen n-Ecke

$$\zeta_n = \frac{[2^n - (-1)^n]^2 - 9}{n}, \tag{V}$$

welche, da ja n ungerad ist, auch geschrieben werden kann

$$\xi_n = \frac{8(2^{n-1}-1)(2^{n-2}+1)}{n}.$$

Wenn n nicht Primzahl, sondern aus den Primfactoren $n_1, n_2, \ldots n_r$, deren keiner $= 2$, zusammengesetzt ist derart, dass $n = n_1 n_2 \ldots n_r$, so befinden sich unter den N_n Punkten auch die Gruppen derjenigen, welche n_1-, n_2-, $\ldots n_r$-Ecke ergeben; somit ist dann die Anzahl der n-Ecke

$$\zeta_n = \frac{[2^n-(-1)^n]^2-9-n_1\zeta_{n_1}-\ldots-n_r\zeta_{n_r}}{n}$$

oder in kürzerer Schreibung

$$\zeta_n = \frac{[2^n-(-1)^n]^2-9-\sum_1^r n_i\zeta_{n_i}}{n}.$$

Diese Formel bleibt auch aufrecht, wenn $n = 2n_1 n_2 \ldots n_r$, weil es Zweiecke nicht gibt.

Ganz allgemein gilt der Satz: »Sind $t_1, t_2, t_3, \ldots$ die sämmtlichen von 2 und untereinander verschiedenen Theiler von n, so ist die Anzahl der einer C_3 gleichzeitig um- und eingeschriebenen n-Ecke

$$\zeta_n = \frac{[2^n-(-1)^n]^2-9-\sum t_i\zeta_{t_i}}{n}. \qquad \text{(VI)}$$

Anmerkung. Als Zweiecke erhält man bloss die neun Inflexionspunkte. Denn soll $x_1^2 x_2 = k$ und $x_2^2 x_1 = k$ sein, so hat man $x_1^2 x_2 = x_2^2 x_1$ und daraus $x_1 = x_2$; dies in $x_1^2 x_2 = k$ gesetzt gibt $x_1^3 = k$, durch welche Gleichung aber die neun Inflexionspunkte definirt sind.

Nachstehend sind die Gleichungen (IV) und die Werthe ζ_n für $n = 3, 4, \ldots 20$ zusammengestellt.[1]

---

[1] Siehe auch Picquet, »Applications de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques«, Journal de l'École polytechnique, cah. 54.

Eckenzahl	Charakt. Gleichung	Anzahl der Polygone
3	$x^{9} = k^{3}$	$24 = \frac{9^2-9}{3}$
4	$x^{15} = k^{5}$	$54 = \frac{15^2-9}{4}$
5	$x^{33} = k^{11}$	$216 = \frac{33^2-9}{5}$
6	$x^{63} = k^{21}$	$648 = \frac{63^2-9-3.24}{6}$
7	$x^{219} = k^{43}$	$2376 = \frac{129^2-9}{7}$
8	$x^{255} = k^{85}$	$8100 = \frac{255^2-9-4.54}{8}$
9	$x^{513} = k^{171}$	$29232 = \frac{513^2-9-3.24}{9}$
10	$x^{1023} = k^{341}$	$104544 = \frac{1023^2-9-5.216}{10}$
11	$x^{2049} = k^{683}$	$381672 = \frac{2049^2-9}{11}$

Eckenzahl	Charakt. Gleichung	Anzahl der Polygone
12	$x^{4095} = k^{1365}$	$1397070 = \frac{4095^2-9-3.24-4.54-6.648}{12}$
13	$x^{8193} = k^{2731}$	$5163480 = \frac{8193^2-9}{13}$
14	$x^{16383} = k^{5461}$	$19170432 = \frac{16383^2-9-7.2376}{14}$
15	$x^{32769} = k^{10923}$	$71587080 = \frac{32769^2-9-3.24-5.216}{15}$
16	$x^{65535} = k^{21845}$	$268423200 = \frac{65535^2-9-4.54-8.8100}{16}$
17	$x^{131073} = k^{43691}$	$1010595960 = \frac{131073^2-9}{17}$
18	$x^{262143} = k^{87381}$	$3817704744 = \frac{262143^2-9-3.24-6.648-9.29232}{18}$
19	$x^{524289} = k^{174763}$	$14467313448 = \frac{524289^2-9}{19}$
20	$x^{1048575} = k^{349525}$	$54975424194 = \frac{1048575^2-9-4.54-5.216-10.104544}{20}$

A. Dreiecke.

42. Es sei $x_1 x_2 x_3$ (in kurzer Bezeichnung (x)) ein der C_3 um- und eingeschriebenes Dreieck derart, dass x_2 der Tangentialpunkt von x_1, x_3 der Tangentialpunkt von x_2 und x_1 der Tangentialpunkt von x_3 ist. In der $E(x_1 x_2)$ entspricht, wie man unmittelbar erkennt, dem x_2 der Punkt x_3 und diesem wieder x_1, es ist dies also eine der vier E_3 (siehe Artikel 35). Daher bestehen die Gleichungen $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2}$, $\frac{x_3}{x_1} = \frac{x_1}{x_2}$ oder

$$x_1^2 = x_2 x_3 \qquad x_2^2 = x_3 x_1 \qquad x_3^2 = x_1 x_2,$$

aus welchen sich

$$x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = x_1 x_2 x_3$$

ergibt.

Es sei nun i_1 ein Inflexionspunkt und u der ihm in der $E(x_1 x_2)$ entsprechende Punkt; dann ist $i_1 x_2 = u x_1$, also $u = \frac{x_2}{x_1} i_1$ und $u^3 = \frac{x_3^2}{x_1^3} i_1^3 = i_1^3$, d. h. es ist u wieder ein Wendepunkt; er möge mit i_2 bezeichnet werden und der ihm in derselben E-Beziehung entsprechende, welcher nothwendig wieder ein Wendepunkt sein wird, mit i_3, so ist

$$i_2 = \frac{x_2}{x_1} i_1 \qquad i_3 = \frac{x_2}{x_1} i_2 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_1.$$

Daraus folgt aber $i_1 i_2 i_3 = i_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} i_1 \cdot \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_1 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 i_1^3 =$ $= i_1^3 = k$, mithin liegen die drei Wendepunkte $i_1 i_2 i_3$ in einer Geraden. Geht man jetzt von einem weiteren Inflexionspunkte i_4 aus, so führt die $E(x_1 x_2)$ wieder zu einem Tripel $i_4 i_5 i_6$ und von i_7 gelangt man ebenso zu $i_7 i_8 i_9$, wobei

$$i_5 = \frac{x_2}{x_1} i_4 \qquad i_6 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_4$$

$$i_8 = \frac{x_2}{x_1} i_7 \qquad i_9 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 i_7.$$

Das betrachtete Dreieck $x_1 x_2 x_3$ ist so in bestimmter Weise mit dem Wendepunktsdreiseit, dessen Seiten $(i_1 i_2 i_3) \equiv D_{123}$, $(i_4 i_5 i_6) \equiv D_{456}$, $(i_7 i_8 i_9) \equiv D_{789}$ sind, verknüpft. Im Hinblick auf das Tableau der Wendepunkte

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_4 & i_5 & i_6 \\ i_7 & i_8 & i_9 \end{vmatrix}$$

wollen wir $D_{123} D_{456} D_{789}$ als das horizontale, $D_{147} D_{258} D_{369}$ als das verticale, $D_{159} D_{267} D_{348}$ als das positive und $D_{357} D_{681} D_{924}$ als das negative Wendepunktsdreiseit bezeichnen.

43. Wenn man das Dreieck (x) aus i_1 auf C_3 projicirt, so ergibt sich ein neues Dreieck $(x^{(1)})$, welches zu demselben Wendepunktsdreiseit gehört, weil ja das Tripel $i_1 i_2 i_3$ durch diese Projection in $i_1 i_3 i_2$ übergeht. Die Projectionen von (x) aus i_2, i_3 seien $(x^{(2)})$, $(x^{(3)})$ respective, so gehören die Dreiecke (x), $(x^{(1)})$, $(x^{(2)})$, $(x^{(3)})$ alle demselben Wendepunktsdreiseit zu; es wird sich aber sogleich zeigen, dass sie nicht sämmtlich von einander verschieden sind. Man hat nämlich

$$x_1^{(1)} = \frac{k}{i_1 x_1} = \frac{i_1^3}{i_1 x_1} = \frac{i_1^2}{x_1}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{k}{i_1 x_2} = \frac{k}{i_1 \frac{i_2}{i_1} x_1} = \frac{k}{i_2 x_1} = \frac{i_2^2}{x_1}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{k}{i_1 x_3} = \frac{k}{i_1 \frac{i_3}{i_1} x_1} = \frac{k}{i_3 x_1} = \frac{i_3^2}{x_1}$$

ferner

$$x_1^{(2)} = \frac{k}{i_2 x_1} = \frac{i_2^2}{x_1} = x_2^{(1)}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{k}{i_2 x_2} = \frac{k}{i_2 \frac{i_2}{i_1} x_1} = \frac{k i_1}{i_2^2 x_1} = \frac{i_1 i_2}{x_1} = \frac{i_3^2}{x_1} = x_3^{(1)}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{k}{i_2 x_3} = \frac{k}{i_2 \frac{i_3}{i_1} x_1} = \frac{k i_1}{i_2 i_3 x_1} = \frac{i_1^2}{x_1} = x_1^{(1)}$$

endlich

$$x_1^{(3)} = \frac{k}{i_3 x_1} = \frac{i_3^3}{i_3 x_1} = \frac{i_3^2}{x_1} = x_3^{(1)}$$

$$x_2^{(3)} = \frac{k}{i_3 x_2} = \frac{k}{i_3 \frac{i_2}{i_1} x_1} = \frac{k i_1}{i_2 i_3 x_1} = \frac{i_1^2}{x_1} = x_1^{(1)}$$

$$x_3^{(3)} = \frac{k}{i_3 x_3} = \frac{k}{i_3 \frac{i_3}{i_1} x_1} = \frac{k i_1}{i_3^2 x_1} = \frac{i_2^2}{x_1} = x_2^{(1)};$$

hierbei ist von den Relationen $i_1^3 = i_2^3 = i_3^3 = k = i_1 i_2 i_3$ Gebrauch gemacht worden.

Durch Projection von (x) aus $i_1 i_2 i_3$ erhalten wir also nur ein Dreieck $(x^{(1)}) \equiv (x')$ mit den Ecken

$$x_1' = \frac{i_1^2}{x_1} \qquad x_2' = \frac{i_2^2}{x_1} \qquad x_3' = \frac{i_3^2}{x_1} \tag{1}$$

und zwar gehen die Geraden

$x_1 x_1'$, $x_2 x_2'$, $x_3 x_3'$ durch i_1
$x_1 x_2'$, $x_2 x_3'$, $x_3 x_1'$ » i_2
$x_1 x_3'$, $x_2 x_1'$, $x_3 x_2'$ » i_3

Die beiden Dreiecke (x) und (x') erscheinen hiernach durch die Wendepunktsgerade D_{123} mit einander verknüpft.

In gleicher Weise liefert die Projection von (x) aus $i_4 i_5 i_6$ ein mit der Wendepunktsgeraden D_{456} verknüpftes Dreieck (x'') mit den Ecken

$$x_1'' = \frac{i_4^2}{x_1} \qquad x_2'' = \frac{i_5^2}{x_1} \qquad x_3'' = \frac{i_6^2}{x_1} \tag{2}$$

und es gehen die Geraden

$x_1 x_1''$, $x_2 x_2''$, $x_3 x_3''$ durch i_4
$x_1 x_2''$, $x_2 x_3''$, $x_3 x_1''$ » i_5
$x_1 x_3''$, $x_2 x_1''$, $x_3 x_2''$ » i_6

Endlich ist mit (x) durch D_{789} ein viertes Dreieck (x''') verbunden, dessen Ecken

$$x_1''' = \frac{i_7^2}{x_1} \qquad x_2''' = \frac{i_8^2}{x_1} \qquad x_3''' = \frac{i_9^2}{x_1} \tag{3}$$

sind; dabei gehen die Geraden

$$\begin{array}{lll} x_1x_1''',\ x_2x_2''',\ x_3x_3''' & \text{durch} & i_7 \\ x_1x_2''',\ x_2x_3''',\ x_3x_1''' & \text{»} & i_8 \\ x_1x_3''',\ x_2x_1''',\ x_3x_2''' & \text{»} & i_9 \end{array}$$

Wir legen nun das Dreieck (x') zu Grunde und leiten aus demselben in der nämlichen Art Dreiecke ab; mit D_{123} combinirt ergibt (x') wieder das Dreieck (x), dagegen liefert es mit D_{456} ein neues Dreieck (ξ), dessen Ecken sind

$$\xi_1 = \frac{k}{i_4 x_1'} = \frac{i_4^2}{x_1'} = \frac{i_4^2}{\frac{i_1^2}{x_1}} = \frac{i_4^2 x_1}{i_1^2}$$

$$\xi_2 = \frac{k}{i_4 x_2'} = \frac{i_4^2}{x_2'} = \frac{i_4^2 x_1}{i_2^2}$$

$$\xi_3 = \frac{k}{i_4 x_3'} = \frac{i_4^2}{x_3'} = \frac{i_4^2 x_1}{i_3^2}$$

also

$$\xi_1 = \frac{i_4^2 x_1}{i_1^2} \qquad \xi_2 = \frac{i_4^2 x_1}{i_2^2} \qquad \xi_3 = \frac{i_4^2 x_1}{i_3^2} \tag{4}$$

und es gehen die Geraden

$$\begin{array}{lll} \xi_1x_1',\ \xi_2x_2',\ \xi_3x_3' & \text{durch} & i_4 \\ \xi_1x_2',\ \xi_2x_3',\ \xi_3x_1' & \text{»} & i_5 \\ \xi_1x_3',\ \xi_2x_1',\ \xi_3x_2' & \text{»} & i_6 \end{array}$$

wie man durch Combination der Werthe (4) und (1) unter Berücksichtigung der zwischen den i bestehenden Relationen leicht erkennt.

Durch Verbindung von (x') mit D_{789} erhält man das Dreieck (ξ') mit den Ecken

$$\xi_1' = \frac{i_7^2 x_1}{i_1^2} \qquad \xi_2' = \frac{i_7^2 x_1}{i_2^2} \qquad \xi_3' = \frac{i_7^2 x_1}{i_3^2}, \tag{5}$$

und es gehen die Geraden

$$\begin{array}{lll} \xi'_1 x'_1,\ \xi'_2 x'_2,\ \xi'_3 x'_3 & \text{durch} & i_7 \\ \xi'_1 x'_2,\ \xi'_2 x'_3,\ \xi'_3 x'_1 & » & i_8 \\ \xi'_1 x'_3,\ \xi'_2 x'_1,\ \xi'_3 x'_2 & » & i_9 \end{array}$$

Wir haben jetzt sechs Dreiecke (x), (x'), (x''), (x'''), (ξ), (ξ'), welche in Bezug auf das horizontale Wendepunktsdreiseit eine geschlossene Gruppe bilden in dem Sinne, dass aus irgend einem derselben unter Zugrundelegung irgend einer Seite des genannten Dreiseits wieder ein Dreieck dieser Gruppe sich ableitet. Wenn z. B. (ξ) mit D_{789} combinirt wird, so hat das abgeleitete Dreieck laut (3) die Ecken

$$\frac{i_7^2}{\xi_1},\quad \frac{i_8^2}{\xi^2}\quad \frac{i_9^2}{\xi^3}$$

da aber $\xi_1 = \frac{i_4^2 x_1}{i_1^2}$, so ist die erste Ecke $\frac{i_1^2 i_7^2}{i_4^2 x_1} = \frac{i_4^2}{x_1} = x_1''$ (weil $i_1 i_4 i_7 = i_4^3$), mithin ist (ξ) mit (x'') durch D_{789} verbunden. Man überzeugt sich durch einfache Rechnung, dass verknüpft sind

durch D_{123}	die Dreieckspaare	$(x)(x')$; $(\xi)(x''')$; $(\xi')(x'')$
» D_{456}	»	»	$(x)(x'')$; $(\xi)(x')$; $(\xi')(x''')$
» D_{789}	»	»	$(x)(x''')$; $(\xi)(x'')$; $(\xi')(x')$

Es vertheilen sich also die 24 einer C_3 um- und eingeschriebenen Dreiecke in Gruppen zu je 6 auf die 4 Wendepunktsdreiseite.

44. Um weitere Beziehungen zwischen den sechs Dreiecken einer Gruppe kennen zu lernen, möge eine andere Bezeichnung eingeführt werden. Es sei die Ecke x'_1 des ersten Dreiecks (x') gegeben, so ist

$$x'_1 = \frac{i_1 x'_1}{i_1} \qquad x'_2 = \frac{i_2 x'_1}{i_1} \qquad x'_3 = \frac{i_3 x'_1}{i_1}. \tag{6}$$

Aus (x') leiten wir mittels D_{123} das Dreieck (ξ') ab, so ist vermöge (1)

$$\xi'_1 = \frac{i_1^2}{x'_1} \qquad \xi'_2 = \frac{i_2^2}{x'_1} \qquad \xi'_3 = \frac{i_3^2}{x'_1}; \tag{7}$$

durch Vermittlung von D_{456} ergibt sich aus (x') das Dreieck (ξ''), wobei nach (2)

$$\xi''_1 = \frac{i_4^2}{x'_1} \qquad \xi''_2 = \frac{i_5^2}{x'_1} \qquad \xi''_3 = \frac{i_6^2}{x'_1}, \tag{8}$$

endlich erhält man aus (x') mit Hilfe von D_{789} das Dreieck (ξ'''), für welches nach (3)

$$\xi'''_1 = \frac{i_7^2}{x'_1} \qquad \xi'''_2 = \frac{i_8^2}{x'_1} \qquad \xi'''_3 = \frac{i_9^2}{x'_1} \tag{9}$$

Legt man jetzt (ξ') zu Grunde, so gibt D_{123} wieder (x'), dagegen D_{456} ein neues Dreieck (x''), für welches laut (4)

$$x''_1 = \frac{i_4^2 x'_1}{i_1^2} \qquad x''_2 = \frac{i_4^2 x'_1}{i_2^2} \qquad x''_3 = \frac{i_4^2 x'_1}{i_3^2} \tag{10}$$

und D_{789} liefert (x'''), wobei nach (5)

$$x'''_1 = \frac{i_7^2 x'_1}{i_1^2} \qquad x'''_2 = \frac{i_7^2 x'_1}{i_2^2} \qquad x'''_3 = \frac{i_7^2 x'_1}{i_3^2} \text{ [1]} \tag{11}$$

Es gehen nun die Geraden

$x_1\xi'_1$, $x'_2\xi'_2$, $x'_3\xi'_3$	durch	i_1	$x'_1\xi'_1$, $x'_2\xi'_2$, $x'_3\xi'_3$	durch	i_1
$x'_1\xi'_2$, $x'_2\xi'_3$, $x'_3\xi'_1$	»	i_2	$x'_1\xi'_2$, $x'_2\xi'_3$, $x'_3\xi'_1$	»	i_2
$x'_1\xi'_3$, $x'_2\xi'_1$, $x'_3\xi'_2$	»	i_3	$x'_1\xi'_3$, $x'_2\xi'_1$, $x'_3\xi'_2$	»	i_3
$x'_1\xi''_1$, $x'_2\xi''_2$, $x'_3\xi''_3$	durch	i_4	$x''_1\xi'_1$, $x''_2\xi'_2$, $x''_3\xi'_3$	durch	i_4
$x'_1\xi''_2$, $x'_2\xi''_3$, $x'_3\xi''_1$	»	i_5	$x''_1\xi'_2$, $x''_2\xi'_3$, $x''_3\xi'_1$	»	i_5
$x'_1\xi''_3$, $x'_2\xi''_1$, $x'_3\xi''_2$	»	i_6	$x''_1\xi'_3$, $x''_2\xi'_1$, $x''_3\xi'_2$	»	i_6

[1] Man kann diesen Ecken auch folgende Darstellung geben. Es ist $i_1^2 i_4^2 i_7^2 = i_1^6$, daraus $\frac{i_4^2}{i_1^2} = \frac{i_1^2}{i_7^2} = \frac{i_1^3}{i_7^3} \cdot \frac{i_7}{i_1} = \frac{i_7}{i_1}$ u. s. w.; in gleicher Weise folgt aus $i_1^2 i_4^2 i_7^2 = i_1^6$, dass $\frac{i_7^2}{i_1^2} = \frac{i_1^2}{i_4^2} = \frac{i_1^3}{i_4^3} \cdot \frac{i_4}{i_1} = \frac{i_4}{i_1}$ u. s. w., so dass man auch setzen kann:

$$x'_1 = \frac{i_1 x'_1}{i_1} \qquad x'_2 = \frac{i_2 x'_1}{i_1} \qquad x'_3 = \frac{i_3 x'_1}{i_1}$$

$$x''_1 = \frac{i_7 x'_1}{i_1} \qquad x''_2 = \frac{i_8 x'_1}{i_1} \qquad x''_3 = \frac{i_9 x'_1}{i_1}$$

$$x'''_1 = \frac{i_4 x'_1}{i_1} \qquad x'''_2 = \frac{i_5 x'_1}{i_1} \qquad x'''_3 = \frac{i_6 x'_1}{i_1}$$

$$\begin{array}{lll} x_1'\xi_1''', x_2'\xi_2''', x_3'\xi_3''' \text{ durch } i_7 & & x_1'''\xi_1', x_2'''\xi_2', x_3'''\xi_3' \text{ durch } i_7 \\ x_1'\xi_2''', x_2'\xi_3''', x_3'\xi_1''' \quad \text{»} \quad i_8 & & x_1'''\xi_2', x_2'''\xi_3', x_3'''\xi_1' \quad \text{»} \quad i_8 \\ x_1'\xi_3''', x_2'\xi_1''', x_3'\xi_2''' \quad \text{»} \quad i_7 & & x_1'''\xi_3', x_2'''\xi_1', x_3'''\xi_2' \quad \text{»} \quad i_9 \end{array}$$

Gepaart sind die Dreiecke

$$\begin{array}{lll} (x')(\xi'); \ (x'')(\xi'''); \ (x''')(\xi'') & \text{durch} & D_{123} \\ (x')(\xi''); \ (x'')(\xi'); \ (x''')(\xi''') & \text{»} & D_{456} \\ (x')(\xi'''); \ (x'')(\xi''); \ (x''')(\xi') & \text{»} & D_{789} \end{array}$$

Die sechs Dreiecke erscheinen so in zwei Tripel geordnet, (x'), (x''), (x''') und (ξ'), (ξ''), (ξ'''), derart, dass keine zwei Dreiecke desselben Tripels mit einander verknüpft sind, dagegen jedes Dreieck des einen Tripels mit jedem Dreieck des andern. Dass die Ecken zweier gepaarten Dreiecke auf einer C_2 liegen, ist leicht zu erkennen; denn man hat beispielsweise für das erste Paar nach (6) und (7)

$$x_1'x_2'x_3'\xi_1'\xi_2'\xi_3' = \frac{i_1 i_2 i_3 x_1'^3}{i_1^3} \cdot \frac{i_1^2 i_2^2 i_3^2}{x_1'^3} = i_2^3 i_3^3 = k^2;$$

solcher C_2 erhält man $3.3 = 9$. Es lässt sich ferner der Satz nachweisen: »Wenn man die Ecken zweier Dreiecke aus der Terne $(x')(x'')(x''')$ mit einander verbindet, so schneiden die neun Geraden die C_3 in den Ecken des dritten Dreiecks.« Selbstverständlich gilt der Satz auch für die andere Terne. Es ist nämlich der dritte Schnitt von

$$\left.\begin{array}{l} x_1'x_1'' \dots \dfrac{k}{x_1'x_1''} = \dfrac{ki_1^2}{i_4^2 x_1'^2} = \dfrac{ki_1^2 x_1'}{i_4^2 x_1'^3} = \dfrac{i_1 i_2 x_1'}{i_4^2} = \dfrac{i_3^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_2''' \; {}^1 \\ x_1'x_2'' \dots \dfrac{k}{x_1'x_2''} = \dfrac{ki_2^2}{i_4^2 x_1'^2} = \dfrac{ki_2^2 x_1'}{i_3^2 x_1'^3} = \dfrac{i_2^3 x_1'}{i_4^2 i_1} = \dfrac{i_1^2 x_1'}{i_4^2} = \dfrac{i_7^2 x_1'}{i_1^2} \equiv x_1''' \\ x_1'x_3'' \dots \dfrac{k}{x_1'x_3''} = \dfrac{ki_3^2}{i_4^2 x_1'} = \dfrac{ki_3^2 x_1'}{i_4^2 x_1'^3} = \dfrac{i_3^2 i_2 x_1'}{i_4^2 i_1} = \dfrac{i_3 i_1^2 x_1'}{i_4^2 i_1} = \dfrac{i_2^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_3''' \end{array}\right\} \quad (12)$$

---

[1] Dabei wird Gebrauch gemacht von der Bemerkung, dass $x_1'^2 x_2' = x_1'^2 \frac{i_2}{i_1} x_1' = k$, also $x'^3 = \frac{i_1}{i_2} k$ und von den Beziehungen zwischen den i-Punkten.

$$\left.\begin{array}{l}
x_2'x_1'' \ldots \dfrac{k}{x_2'x_1''} = \dfrac{ki_1^3}{i_4^2 i_2 x_1'^2} = \dfrac{ki_2^2 x_1'}{i_4^2 x_1'^3} = \dfrac{i_2^3 x_1'}{i_4^2 i_1} = \dfrac{i_1^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_1''' \\
x_2'x_2'' \ldots \dfrac{k}{x_2'x_2''} = \dfrac{ki_1 i_2^2}{i_4^2 i_2 x_1'^2} = \dfrac{i_2^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_3''' \\
x_2'x_3'' \ldots \dfrac{k}{x_2'x_3''} \equiv x_2''' \\
x_3'x_1'' \ldots \dfrac{k}{x_3'x_1''} = \dfrac{ki_1^3}{i_4^2 i_3 x_1'^2} = \dfrac{ki_3^2 x_1'}{i_4^2 x_1'^3} = \dfrac{i_3^2 i_2 x_1'}{i_4^2 i_1} = \dfrac{i_2^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_3''' \\
x_3'x_2'' \ldots \dfrac{k}{x_3'x_2''} = \dfrac{ki_2^2 i_1}{i_4^2 i_3 x_1'^2} = \dfrac{ki_2^2 i_1 x_1'}{i_4^2 i_3 x_1'^3} = \dfrac{i_2^3 x_1'}{i_4^2 i_3} = \dfrac{i_3^2 x_1'}{i_4^2} \equiv x_2''' \\
x_3'x_3'' \ldots \dfrac{k}{x_3'x_3''} \equiv x_1'''.
\end{array}\right\} \quad (12)$$

Es liegen also je in einer Geraden die Punktetripel

$$\begin{array}{lll}
x_1'x_1''x_2'''; & x_1'x_2''x_1'''; & x_1'x_3''x_3''' \\
x_2'x_1''x_1'''; & x_2'x_2''x_3'''; & x_2'x_3''x_2''' \\
x_3'x_1''x_3'''; & x_3'x_2''x_2'''; & x_3'x_3''x_1'''.
\end{array}$$

Man findet ebenso, dass je in einer Geraden liegen die Punkte

$$\begin{array}{lll}
\xi_1'\xi_1''\xi_2'''; & \xi_1'\xi_2''\xi_1'''; & \xi_1'\xi_3''\xi_3''' \\
\xi_2'\xi_1''\xi_1'''; & \xi_2'\xi_2''\xi_3'''; & \xi_2'\xi_3''\xi_2''' \\
\xi_3'\xi_1''\xi_3'''; & \xi_3'\xi_2''\xi_2'''; & \xi_3'\xi_3''\xi_1'''.
\end{array}$$

Die neun x, neun ξ und neun i bilden also eine solche Configuration, dass je drei x, drei ξ und drei i auf einer Geraden liegen (das gibt $3.12 = 36$ Gerade) und dass je ein x, ein ξ und ein i einer Geraden angehören (das gibt $9.9 = 81$ Gerade); im Ganzen sind also die 27 Punkte auf 117 Geraden zu je dreien vertheilt. Offenbar bilden die neun x, neun ξ und neun i drei connexe Gruppen.

45. Die vier cyclischen E_3 sind gegeben durch die Verhältnisse $\frac{i_2}{i_1}$, $\frac{i_4}{i_1}$, $\frac{i_5}{i_1}$, $\frac{i_6}{i_1}$, so zwar, dass die einem Punkte z in ihnen entsprechenden Punkte der Reihe nach $\frac{i_2}{i_1} z$, $\frac{i_4}{i_1} z$, $\frac{i_5}{i_1} z$,

$\frac{i_6}{i_1} z$. Man erkennt leicht, dass der $E(i_1 i_2)$ folgende Tripel angehören:

$$x_1' x_2' x_3'; \quad x_1'' x_2'' x_3''; \quad x_1''' x_2''' x_3'''$$
$$\xi_3' \xi_2' \xi_1'; \quad \xi_3'' \xi_2'' \xi_1''; \quad \xi_3''' \xi_2''' \xi_1'''$$
$$i_1 i_2 i_3; \quad i_4 i_5 i_6; \quad i_7 i_8 i_9.$$

Betrachten wir nun die $E(i_1 i_4)$, so bemerken wir, dass dieselbe zunächst die Tripel $i_1 i_4 i_7$, $i_2 i_5 i_8$, $i_3 i_6 i_9$ enthält. Der dem x_1' entsprechende Punkt ist $\frac{i_4 x_1'}{i_1} \equiv x_1'''$ (s. Fussnote S. 410) und diesem wieder entspricht $\frac{i_4^2 x_1'}{i_1^2} \equiv x_1''$; man findet so das folgende Tableau der Tripel in $E(i_1 i_4)$:

$$x_1' x_1''' x_1''; \quad x_2' x_2''' x_2''; \quad x_3' x_3''' x_3''$$
$$\xi_1' \xi_1''' \xi_1''; \quad \xi_2' \xi_2''' \xi_2''; \quad \xi_3' \xi_3''' \xi_3''$$
$$i_1 i_4 i_7; \quad i_2 i_5 i_8; \quad i_3 i_6 i_9.$$

Ebenso erkennt man, dass der $E(i_1 i_6)$ angehören die Tripel

$$x_1' x_3''' x_2''; \quad x_1'' x_3' x_2''; \quad x_1''' x_3'' x_2'$$
$$\xi_1' \xi_3''' \xi_2''; \quad \xi_1'' \xi_3' \xi_2''; \quad \xi_1''' \xi_3'' \xi_2'$$
$$i_1 i_6 i_8 \quad i_2 i_4 i_9 \quad i_3 i_5 i_7.$$

Endlich kommen in der $E(i_1 i_5)$ die Tripel vor:

$$x_1' x_2''' x_3''; \quad x_1'' x_2' x_3'''; \quad x_1''' x_2'' x_3'$$
$$\xi_1' \xi_2''' \xi_3''; \quad \xi_1'' \xi_2' \xi_3'''; \quad \xi_1''' \xi_2'' \xi_3'$$
$$i_1 i_5 i_9; \quad i_2 i_6 i_7; \quad i_3 i_4 i_8.$$

46. Es entsteht die Frage, welche von den gefundenen Relationen bestehen bleiben, wenn der Ausgangspunkt x_1' ein beliebiger Punkt der Curve ist. Aus ihm ergeben sich durch Projection aus den neun i die neun ξ, für welche die Gleichungen (7), (8), (9) geltend bleiben; ebenso bleiben die Gleichungen (6), (10) und (11) und die darauffolgenden Tableaux aufrecht; dagegen gelten die Gleichungen (12) und die sich daran anschliessenden Bemerkungen nur, wenn $x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2} k$. Die Betrachtungen des Art. 45 haben allgemeine Geltung.

47. Aus den Gleichungen (6) bis (12) findet man, dass

$$x_1'^3 = x_2'^3 = x_3'^3 = \frac{i_1}{i_2} k, \qquad x_1''^3 = x_2''^3 = x_3''^3 = x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2} k,$$

$$x_1'''^3 = x_2'''^3 = x_3'''^3 = x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2} k$$

und

$$\xi_1'^3 = \xi_2'^3 = \xi_3'^3 = \frac{i_2}{i_1} k, \qquad \xi_1''^3 = \xi_2''^3 = \xi_3''^3 = \frac{i_2}{i_1} k,$$

$$\xi_1'''^3 = \xi_2'''^3 = \xi_3'''^3 = \frac{i_2}{i_1} k,$$

also allgemein

$$x^3 = \frac{i_1}{i_2} k, \qquad \xi^3 = \frac{i_2}{i_1} k.$$

Es sind hiernach die neun x die Wurzeln der Gleichung $x^3 = \frac{i_1}{i_2} k$, d. h. die dreifachen Elemente jener J^3, deren Gleichung lautet $u_1 u_2 u_3 = \frac{i_1}{i_2} k$, wenn k die Involution der geraden Tripel charakterisirt. Ebenso sind die neun ξ die dreifachen Elemente der Involution $v_1 v_2 v_3 = \frac{i_2}{i_1} k$. Diese beiden J^3 sind residual,[1] weil $u_1 u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 = k^2$ ist. Wir erhalten noch drei Paare solcher J^3, entsprechend den Quotienten $\frac{i_1}{i_4}, \frac{i_4}{i_1}; \frac{i_1}{i_5}, \frac{i_5}{i_1}; \frac{i_1}{i_6}, \frac{i_6}{i_1}$. Im Ganzen also haben wir acht J^3 in residuale Paare geordnet; es sind dies offenbar diejenigen acht J^3, welche mit der fundamentalen $w_1 w_2 w_3 = k$ zusammen aus der J^9 abgeleitet werden können, deren Gleichung lautet: $z_1 z_2 \ldots z_9 = k^3$.

Wenn man aus drei Inflexionspunkten ein Tripel bildet, so ist durch dasselbe eine der neun J^3 bestimmt; liegen die drei i in gerader Linie, so ist die J^3 die Fundamentale $x'x''x''' = k$; liegen sie nicht in einer Geraden, so erhält man eine der obigen acht J^3; denn sind $i'i''i'''$ die ausgewählten drei Inflexionspunkte und liegen sie nicht in einer Geraden, so wird beispiels-

[1] Sitzungsber., Bd. LXXXVIII, Abth. IIa, S. 438.

weise i_0 mit $i''i'''$ in einer Geraden enthalten sein und man hat $i'i''i''' = \frac{i'.i'i'''i_0}{i_0} = \frac{i'}{i_0}k$, w. z. b. w.

Es entsteht die Frage: Wann sind die durch zwei i-Tripel bestimmten J^3 residual? Wir können annehmen, dass die beiden Tripel ein Elementenpaar $i'i''$ gemein haben; sind dann $i i_0$ die nichtgemeinsamen Elemente, so muss, damit die J^3 residual seien, $i'i''i.i'i''i_0 = k^2 = i'^2 i''^2 j^2$ (dabei bedeutet j den mit $i'i''$ in einer Geraden liegenden Wendepunkt), also $i i_0 = j^2$, d. h. i und i_0 müssen mit j in einer Geraden liegen. So sind z. B. $i_1 i_2 i_4$ und $i_1 i_2 i_8$ zwei Tripel, welche residuale J^3 bestimmen.

Wir haben hiernach folgende vier Paare von Tripeln mit dem gemeinsamen Elementenpaar $i_1 i_2$, welche die vier Paare residualer J^3 bestimmen:

$i_1 i_2 i_4$; $i_1 i_2 i_8$	entsprechend den Werthen	$\frac{i_5}{i_1}k$, $\frac{i_1}{i_5}k$;
$i_1 i_2 i_5$; $i_1 i_2 i_7$	» » »	$\frac{i_6}{i_1}k$, $\frac{i_1}{i_6}k$;
$i_1 i_2 i_6$; $i_1 i_2 i_9$	» » »	$\frac{i_4}{i_1}k$, $\frac{i_1}{i_4}k$;
$i_1 i_2 i_1$; $i_1 i_2 i_2$	» » »	$\frac{i_2}{i_1}k$, $\frac{i_1}{i_2}k$.

Anmerkung I. Dem Tripel $i_1 i_2 i_3$ entspricht die fundamentale $J^3(k)$.

Anmerkung II. Jedes Paar $i'i''$ kann auf vier verschiedene Arten durch ein anderes Paar und einmal durch ein Quadrat ersetzt werden, z. B. $i_1 i_2 = i_4 i_8 = i_5 i_7 = i_6 i_9 = i_3^2$. Die neun Punkte i lassen sich auf neun verschiedene Arten in 12 Tripel einer J^3 ordnen. Statt des Tripels $i_1 i_2 i_1 = i_1^2 i_2$ kann beispielsweise auch $i_2 i_4 i_7$ (weil $i_1^2 = i_4 i_7$) und statt $i_1 i_2 i_2 = i_1 i_2^2$ auch $i_1 i_5 i_8$ (weil $i_2^2 = i_5 i_8$) geschrieben werden.

Durch jedes der obigen (oder ein ihm äquivalentes) Tripel gehen nun neun C_2, welche die C_3 osculiren, und die neun Osculationspunkte sind die neun x-Punkte; dem Nebentripel entsprechen in gleicher Weise die neun ξ-Punkte; dies gibt die 24 Dreiecke und ihre Gruppirung.

Es ist (Artikel 44)

$$x_1'x_2'x_3' = x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2}\,k$$

$$x_1''x_2''x_3'' = x_1'^3 = \frac{i_1}{i_2}\,k$$

$$x_1'''x_2'''x_3''' = x_3'^3 = \frac{i_1}{i_2}\,k,$$

diese drei Dreiecke gehören als Tripel der $J^3\left(\frac{i_1}{i_2}\,k\right)$ an.

Weiter ist

$$\xi_1'\xi_2'\xi_3' = \frac{(i_1i_2i_3)^2}{x_3'^3} = \frac{k^2}{\frac{i_1}{i_2}\,k} = \frac{i_2}{i_1}\,k$$

und ebenso

$$\xi_1''\xi_2''\xi_3'' = \xi_1'''\xi_2'''\xi_3''' = \frac{i_2}{i_1}\,k,$$

so dass diese Tripel der residualen $J^3\left(\frac{i_2}{i_1}\,k\right)$ entsprechen; es liegen also je eines der x- und der ξ-Tripel auf einer C_2.

Es ist ξ_2' der Tangentialpunkt von ξ_1', daher $\xi_1'^2\xi_2' = k$: dagegen ist

$$\xi_1'\xi_2'^2 = \frac{i_1^2 i_2^4}{x_1'^3} = \frac{i_1^2 i_2^4}{\frac{i_1}{i_2}\,k} = \frac{i_1 i_2^6}{i_2 k} = \frac{i_1}{i_2}\,k,$$

also ist $\xi_1'\xi_2'\xi_2'$ auch eine Gruppe der $J^3\left(\frac{i_1}{i_2}\,k\right)$ und wird daher mit irgend einem Tripel der residualen $J^3\left(\frac{i_2}{i_1}\,k\right)$, also wieder mit einem ξ-Tripel in einer C_2 liegen. Das heisst: »Der Kegelschnitt, welcher durch ein ξ-Tripel und ein Elementenpaar eines zweiten ξ-Tripels hindurchgeht, berührt C_3 in jenem Punkte des Paares, welcher der Tangentialpunkt des andern ist.« Dasselbe gilt von seinem x-Tripel und einem x-Paar.

Betrachten wir jetzt zwei Tripel, welche zwei verschiedenen nicht residualen J^3 angehören, z. B.

$$x_1'x_2'x_3' \text{ aus der } J^3\left(\frac{i_1}{i_2}\,k\right)$$

und
$$y_1' y_2' y_3' \text{ aus der } J^3\left(\frac{i_1}{i_4} k\right);$$
so ist $x^3 = \frac{i_1}{i_2} k, y^3 = \frac{i_1}{i_4} k$. Der restliche Schnitt von $\overline{x}\overline{y}$ mit C_3 sei z, so hat man $z = \frac{k}{xy}$, somit $z^3 = \frac{k^3}{x^3 y^3} = \frac{i_2 i_4}{i_1^2} k = \frac{i_1 i_5}{i_1^2} k$, also $z^3 = \frac{i_5}{i_1}$; d. h. durch Verbindung der Punkte zweier Tripel, deren eines $J^3\left(\frac{i_1}{i_2} k\right)$, das andere $J^3\left(\frac{i_1}{i_4} k\right)$ angehört, ergibt sich ein Tripel der $J^3\left(\frac{i_5}{i_1} k\right)$.

48. Um eine Übersicht über die acht Involutionen J^3 zu gewinnen, wollen wir eine neue Bezeichnung derselben einführen, welche sich auf die Bemerkung gründet, dass man alle neun J^3 erhält (die fundamentale mitgezählt), wenn man einen Inflexionspunkt z. B. i_1 als Doppelelement mit jedem der i zu einem Tripel verbindet, also von den Tripeln $i_1^2 i_1$, $i_1^2 i_2, \ldots i_1^2 i_9$ ausgeht; diese Involutionen sollen der Reihe nach mit $J^3(i_1^2 i_1)$, $J^3(i_1^2 i_2)\ldots$ oder kürzer, mit Weglassung des i_1^2, durch $J^3(i_1)$, $J^3(i_2), \ldots J^3(i_9)$ bezeichnet werden.

Die erste, $J^3(i_1)$, ist die fundamentale Involution der geraden Tripel, weil $i_1^3 = k$. Für die übrigen hat man folgende Ansätze:

$$J^3(i_2)\ldots u_1 u_2 u_3 = i_1^2 i_2 = i_1^3 \frac{i_2}{i_1} = \frac{i_2}{i_1} k \quad \text{also } J^3(i_2) = J^3\left(\frac{i_2}{i_1} k\right)$$
$$J^3(i_3)\ldots \qquad = i_1^2 i_3 = \frac{i_3}{i_1} k = \frac{i_1}{i_2} k \quad \text{»} \quad J^3(i_3) = J^3\left(\frac{i_1}{i_2} k\right)$$
$$J^3(i_4)\ldots \qquad = i_1^2 i_4 = i_1^3 \frac{i_4}{i_1} = \frac{i_4}{i_1} k \quad \text{»} \quad J^3(i_4) = J^3\left(\frac{i_4}{i_1} k\right)$$
$$J^3(i_5)\ldots \qquad = i_1^2 i_5 = i_1^3 \frac{i_5}{i_1} = \frac{i_5}{i_1} k \quad \text{»} \quad J^3(i_5) = J^3\left(\frac{i_5}{i_1} k\right)$$
$$J^3(i_6)\ldots \qquad = i_1^2 i_6 = i_1^3 \frac{i_6}{i_1} = \frac{i_6}{i_1} k \quad \text{»} \quad J^3(i_6) = J^3\left(\frac{i_6}{i_1} k\right)$$
$$J^3(i_7)\ldots \qquad = i_1^2 i_7 = \frac{i_7}{i_1} k = \frac{i_1}{i_4} k \quad \text{»} \quad J^3(i_7) = J^3\left(\frac{i_1}{i_4} k\right)$$
$$J^3(i_8)\ldots \qquad = i_1^2 i_8 = \frac{i_8}{i_1} k = \frac{i_1}{i_6} k \quad \text{»} \quad J^3(i_8) = J^3\left(\frac{i_1}{i_6} k\right)$$
$$J^3(i_9)\ldots \qquad = i_1^2 i_9 = \frac{i_9}{i_1} k = \frac{i_1}{i_5} k \quad \text{»} \quad J^3(i_9) = J^3\left(\frac{i_1}{i_5} k\right)$$

Die vier Paare residualer J^3 sind also

$$\begin{array}{ll} J^3(i_5), & J^3(i_9) \\ J^3(i_6), & J^3(i_8) \\ J^3(i_4), & J^3(i_7) \\ J^3(i_2), & J^3(i_3). \end{array}$$

Man kann dies in folgender Weise ausdrücken: Zu einer $J^3(i_m)$ ist eine $J^3(i_n)$ dann residual, wenn $i_m i_n$ mit i_1 in gerader Linie liegen. Die $J^3(i_1)$ ist sich selbst residual. Die Tripel der x gehören der $J^3(i_3)$, jene der ξ der $J^3(i_2)$ an.

Der am Schlusse des vorigen Artikels erörterte Zusammenhang lässt sich jetzt in folgendem Satze aussprechen: »Wird ein Tripel, welches der $J^3(i_m)$ angehört, mit einem Tripel der $J^3(i_n)$ verbunden, und ist i_p der mit i_m und i_n in gerader Linie liegende Inflexionspunkt, so schneiden die neun Geraden die C_3 in einem Tripel der $J^3(i_p)$«.

Denn ist $x^3 = i_1^2 i_m$, $y^3 = i_1^2 i_n$ und $z = \dfrac{k}{xy}$, so ist

$$z^3 = \frac{k^3}{i_1^4 i_m i_n} = \frac{k^2}{i_1 i_m i_n} = \frac{k^2 i_p}{i_1 i_m i_n i_p} = \frac{k\, i_p}{i_1} = \frac{i_1^3 i_p}{i_1} = i^2 i_p,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Man kann dieses Ergebniss noch kürzer ausdrücken, wenn man die Tripel, welche der $J^3(i_r)$ angehören, kurzweg mit (x_r) bezeichnet, nämlich wie folgt: »Aus einem Tripel (x_m) und einem Tripel (x_n) folgt ein Tripel (x_p), wenn $i_m i_n i_p$ in einer Geraden liegen.«

Selbstverständlich kann man aus den (x_m) und (x_n) alle drei Tripel (x_p) ableiten. Wird jedoch $m = n$, so erhält man das eine Tripel (x_p) dreimal.

Sind $J^3(i_m)$, $J^3(i_n)$ zwei residuale Involutionen, so ist $i_p = i_1$ und demzufolge sind die drei Tripel (x_p) auf drei Inflexionspunkte reducirt, welche in gerader Linie, und zwar auf einer Seite desjenigen Wendepunktsdreiseits liegen, durch welches (x_m) und (x_n) verknüpft sind. Man erkennt übrigens leicht, dass die zu residualen Involutionen gehörigen Tripel $(x_m)(x_n)$ durch jenes Dreiseit verknüpft sind, in welchem $\overline{i_m i_n}$ eine Seite ist. So sind demnach verknüpft

die sechs Dreiecke (x_2) und (x_3) durch das horizontale Wendepunktsdreiseit;

die sechs Dreiecke (x_4) und (x_7) durch das verticale Wendepunktsdreiseit;

die sechs Dreiecke (x_5) und (x_9) durch das positive Wendepunktsdreiseit;

die sechs Dreiecke (x_6) und (x_8) durch das negative Wendepunktsdreiseit.

B. Vierecke.

49. Es sei (siehe Artikel 40) x_1 ein Punkt auf C_3, welcher der Gleichung

$$x^{15} = k^5 \tag{1}$$

genügt; dann bildet er einen Eckpunkt eines der C_3 um- und eingeschriebenen Vierecks, dessen Eckpunkte sind:

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad x_3 = \frac{k}{x_2^2} = \frac{x_1^4}{k}, \quad x_4 = \frac{k}{x_3^2} = \frac{k^3}{x_1^8}. \tag{2}$$

Der dritte Schnittpunkt der Diagonale x_1x_3 mit C_3 ist

$$\eta_1 = \frac{k}{x_1x_3} = \frac{k^2}{x_1^5}, \text{ woraus } \eta_1^3 = \frac{k^6}{x_1^{15}} = k; \tag{3}$$

der dritte Schnittpunkt der Diagonale x_2x_4

$$\eta_2 = \frac{k}{x_2x_4} = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \frac{x_1^{15}}{k^3x_1^5} = \frac{k^2}{x_1^5} = \eta_1, \tag{4}$$

d. h. »die beiden Diagonalen eines der C_3 um- und eingeschriebenen Vierecks schneiden sich auf der Curve und zwar in einem Inflexionspunkte derselben.« Hieraus kann schon der Schluss gezogen werden, dass sich die 54 Vierecke in Gruppen zu je sechs auf die neun Inflexionspunkte vertheilen werden.

50. »Es seien $y_1y_2y_3y_4$ die Tangentialpunkte μ^{ter} Ordnung von $x_1x_2x_3x_4$, d. h. die letzten Schnitte der die C_3 in den Punkten $x_1x_2x_3x_4$ respective $(3\mu-1)$-punktig berührenden C_μ, so bilden $y_1y_2y_3y_4$ wieder ein um- und eingeschriebenes Viereck.«

Für $\mu = 1$ ist $y_1 = \frac{k}{x_1^2} = x_2$, es entsteht also das ursprüngliche Viereck.

Für $\mu = 2$ ist $y_1 = \frac{k^2}{x_1^5} = \eta_1$, somit fällt y_1 und mit ihm auch $y_2 y_3 y_4$ in einen Inflexionspunkt, und zwar in denjenigen, in welchem sich die Diagonalen des ursprünglichen Vierecks schneiden.

Für $\mu = 3$ hat man $y_1 = \frac{k^3}{x_1^8} = x_4$, für

$$\mu = 4 \ldots y_1 = \frac{k^4}{x_1^{11}} = \frac{k^4 x_1^4}{x_1^{15}} = \frac{x_1^4}{k} = x_3,$$

für

$$\mu = 5 \ldots y_1 = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \frac{k^5 x_1}{x_1^{15}} = x_1,$$

in allen diesen Fällen kommt man also auf das nämliche Viereck zurück.

Allgemein ist der Tangentialpunkt μ^{ter} Ordnung von x_1

$$y_1 = \frac{k^\mu}{x_1^{3\mu-1}};$$

bringt man die Zahl μ auf die Form $\mu = 5\nu + r$, so dass r den Rest bedeutet, welchen sie bei der Division durch fünf zurücklässt, so ist

$$y_1 = \frac{k^{5\nu+r}}{x_1^{15\nu+3r-1}} = \left(\frac{k_5}{x_1^{15}}\right)^\nu \frac{k^r}{x_1^{3r-1}} = \frac{k^r}{x_1^{3r-1}};$$

ertheilt man r der Reihe nach die möglichen Werthe 0, 1, 2, 3, 4, so ergibt sich, wie oben entwickelt wurde,

für $r = 0$	$y_1 = x_1$
» $r = 1$	$y_1 = x_2$
» $r = 2$	$y_1 = \eta_1$
» $r = 3$	$y_1 = x_4$
» $r = 4$	$y_1 = x_3$.

Man kommt auf diesem Wege immer entweder wieder in das ursprüngliche Viereck zurück oder in dem ihm entsprechenden Inflexionspunkt; neue Vierecke lassen sich also in dieser Weise nicht ableiten. Das Ergebniss aber kann man folgendermassen aussprechen: »Die im Punkte x_1 die C_3 $(3\mu - 1)$-

punktig berührende C_μ trifft sie zum letztenmale in $x_1, x_2, \eta_1, x_4, x_3$, je nachdem der bei der Division $\frac{\mu}{5}$ verbleibende Rest 0, 1, 2, 3, 4 ist.«

Die Gruppe der sechs zu einem Wendepunkt gehörigen Vierecke lässt sich ergänzen, sobald zwei dieser Vierecke bekannt sind, und zwar auf Grund folgenden Satzes: »Sind $x_1x_2x_3x_4$ und $x'_1x'_2x'_3x'_4$ zwei zu einem i gehörige Vierecke, so erhält man die Ecken der vier andern als dritte Schnitte der Geraden $x'_m x_1$, $x'_m x_2$, $x'_m x_3$, $x'_m x_4$ ($m = 1, 2, 3, 4$).« Denn, ist ξ_1 der dritte Schnittpunkt von $x'_m x_1$, so ist

$$\xi_1 = \frac{k}{x'_m x_1},$$

daher

$$\xi_1^{15} = \frac{k^{15}}{x'^{15}_m x_1^{15}} = \frac{k^{15}}{k^{10}} = k^5,$$

also ξ_1 thatsächlich Ecke eines Vierecks und der zugehörige Inflexionspunkt nach (3)

$$\eta' = \frac{k^2}{\xi_1^5} = \frac{x'^{15}_m x_1^{15}}{k^3};$$

weil aber die beiden gegebenen Vierecke zu demselben Inflexionspunkte gehören, so ist $\frac{x'^5_m}{k^2} = \frac{x_1^5}{k^2}$, daher weiter

$$\eta' = k\left(\frac{x_1^5}{k^2}\right)^2 = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \frac{x_1^{15}}{k^3 x_1^5} = \frac{k^2}{x_1^5} = \eta_1, \text{ w. z. b. w.}$$

51. Ist i der dem Viereck $x_1x_2x_3x_4$ adjungirte Inflexionspunkt, so findet man auf Grund der Gleichungen (3) und (2), dass

$$i = \frac{k^2}{x_1^5} = \frac{k^2}{x_2^5} = \frac{k^2}{x_3^5} = \frac{k^2}{x_4^5},$$

so dass also

$$x_1^5 = x_2^5 = x_3^5 = x_4^5 = \frac{k^2}{i} = \frac{(i^3)^2}{i} = i^5;$$

demnach sind die 24 Ecken der mit i verknüpften 6 Vierecke die weiteren 24 fünffachen Elemente jener J^5, welche i zum fünffachen Punkte hat.

Wird das Viereck, welches wir jetzt kurz (x) nennen, aus einem zweiten Inflexionspunkt i_1 auf die C_3 projicirt, so entsteht ein neues Viereck (x'), und zwar ist wegen $x_\lambda x'_\lambda i_1 = k$

$$x'_\lambda = \frac{k}{x_\lambda i_1} = \frac{i_1^3}{x_\lambda i_1} = \frac{i_1^2}{x_\lambda},$$

so dass $\frac{i_1^2}{x_1}, \frac{i_1^2}{x_2}, \frac{i_1^2}{x_3}, \frac{i_1^2}{x_4}$ die Ecken eines der andern 54 Vierecke darstellen.[1]

Wir projiciren nun (x') aufs Neue aus einem dritten Wendepunkt i_2 nach (x''), wobei allgemein $x''_\lambda = \frac{i_2^2}{x'_\lambda} = \frac{i_2^2 x_\lambda}{i_1^2}$, dann (x'') weiter aus i_3 nach (x'''), wobei $x'''_\lambda = \frac{i_3^2}{x''_\lambda} = \frac{i_1^2 i_3^2}{i_2^2 x_\lambda}$ und stellen uns nun die Frage, wann (x''') wieder mit dem ursprünglichen Inflexionspunkt i verknüpft ist. Die hiefür nothwendige Bedingung lautet $x_1''' x_3''' = x_1 x_3$, also nach Einsetzung der Werthe für x_1''', x_3'''

$$\frac{i_1^4 i_3^4}{i_2^4 x_1 x_3} = x_1 x_3,$$

oder wegen $i_1^3 = i_2^3 = i_3^3 = k$ weiter

$$\frac{k\, i_1 i_3}{i_2} = (x_1 x_3)^2 = \left(\frac{k}{i}\right)^2 = \frac{k i^3}{i^2} = ki,$$

woraus $i_1 i_3 = i i_2$, d. h. die Geraden $i i_2$ und $i_1 i_3$ müssen sich auf der C_3 schneiden.

52. Es sei i_1 der dem Viereck $x_1 x_2 x_3 x_4$ adjungirte Inflexionspunkt, so dass $x_1^5 = i_1^5$ ist. In der durch $i_1 x_1$ bestimmten eindeutigen Beziehung $E(i_1 x_1)$ ist die Reihe der einander entsprechenden Punkte (siehe Abschnitt II)

$$i_1; \quad x_1; \quad \frac{x_1^2}{i_1} = \frac{x_1^{10}}{i_1 x_1^8} = \frac{i_1^{10}}{i_1 x_1^8} = \frac{k^3}{x_1^8} = x_4;$$

$$\frac{x_1^3}{i_1^2} = \frac{x_1^5}{i_1^2 x_1^2} = \frac{i_1^3}{x_1^2} = \frac{k}{x_1^2} = x_2; \quad \frac{x_1^4}{i_1^3} = \frac{x_1^4}{k} = x_3; \quad \frac{x_1^5}{i_1^4} = i_1;$$

[1] Man überzeugt sich leicht, dass jeder folgende dieser vier Punkte Tangentialpunkt des vorangehenden und der erste Tangentialpunkt des letzten ist.

es ist also $i_1 x_1 x_4 x_2 x_3$ ein fünfgliedriger Cyklus der $E(i_1 x_1)$; seine Elemente können auf Grund der eben geführten Rechnung in der Form

$$i_1,\quad x_1,\quad \frac{i^9}{x_1^8},\quad \frac{i_1^3}{x_1^2},\quad \frac{x_1^4}{i_1^3}$$

dargestellt werden.

Wir projiciren nun x_1 aus i_2 auf C_3 und den sich ergebenden Punkt u aus i_3, wodurch y_1 erhalten werden möge; dabei setzen wir voraus, dass $i_1 i_2 i_3$ in einer Geraden liegen. Zunächst ist

$$u = \frac{k}{i_2 x_1} = \frac{i_2^3}{i_2 x_1} = \frac{i_2^2}{i_1^3}$$

und dann

$$y_1 = \frac{k}{i_3 u} = \frac{i_3^2}{u} = \frac{i_3^2}{i_2^2} x_1 = \frac{i_2}{i_3} x_1;$$

da $y_1^5 = \frac{i_2^5}{i_3^5} x_1^5 = \frac{(i_1 i_2)^5}{i_3^5} = \frac{i_3^{10}}{i_3^5} = i_3^5$, so ist y_1 Eckpunkt eines zu i_3 gehörigen Vierecks, und zu demselben Wendepunkt gehört auch das von u aus construirte Viereck, weil

$$u^5 = \frac{(i_2^2)^5}{x_1^5} = \frac{(i_1 i_3)^5}{i_1^5} = i_3^5$$

ist. Wir erhalten also den Satz: »Die Projection eines zu i_1 gehörigen Vierecks aus i_1 ist wieder ein zu i_1 gehöriges Viereck (nämlich das ursprüngliche); die Projection desselben Vierecks aus i_2 ist ein zu i_3 gehöriges Viereck, wenn $i_1 i_2 i_3$ in einer Geraden liegen.«

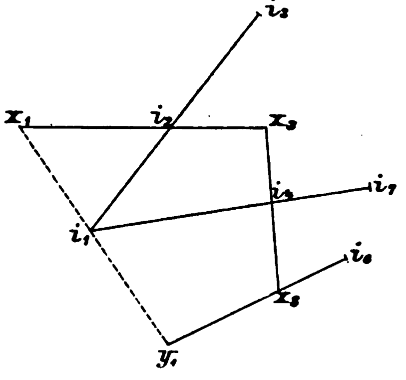


Fig. 5.

Die Betrachtung des Wendepunktschemas

$$\left|\begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_4 & i_5 & i_6 \\ i_7 & i_8 & i_9 \end{matrix}\right|$$

ergibt nun, wenn man von diesem Satze Gebrauch macht, folgenden Sachverhalt: Ist x_1 ein zu i_1 gehöriger Eckpunkt, so ist seine Projection aus i_2 ein zu i_3 gehöriger Eckpunkt

x_3; wird dieser aus i_4 projicirt, so ergibt sich ein zu i_8 gehöriger Eckpunkt x_8, welcher aus i_6 projicirt wieder einen zu i_1 gehörigen Eckpunkt y_1 ergibt (siehe die schematische Figur 5).

Es ist die Frage von Interesse, in welcher Beziehung dieser letzte Punkt zum Ausgangspunkt x_1 steht. Man hat

$$x_3 = \frac{i_2^2}{x_1}; \quad x_8 = \frac{i_4^2}{x_3} = \frac{i_4^2 x_1}{i_2^2} = \frac{i_2}{i_4} x_1;$$

$$y_1 = \frac{i_6^2}{x_8} = \frac{i_6^2 i_4}{i_2 x_1} = \frac{i_2 i_4 i_7}{i_2 x_1} = \frac{i_1^2}{x_1};$$

es ist also y_1 die Gegenecke zu x_1 in dem ursprünglichen Vierecke.

C. Fünfecke.

53. Es sei x_1 ein Punkt, welcher der Gleichung

$$x^{33} = k^{11} \tag{1}$$

genügt; dann kann er zum Ausgangspunkte für die Construction eines der C_3 um- und eingeschriebenen Fünfecks genommen werden, und zwar sind die Ecken des letzteren

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad x_3 = \frac{x_1^4}{k}, \quad x_4 = \frac{k^3}{x_1^8}, \quad x_5 = \frac{x_1^{16}}{k^5}. \tag{2}$$

Bezeichnet man die dritten Schnittpunkte der Diagonalen x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, x_4x_1, x_5x_2 der Reihe nach mit $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5$ (Fig. 6), so ist

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{k}{x_1x_3} = \frac{k^2}{x_1^5} \\
\xi_2 &= \frac{k}{x_2x_4} = \frac{x_1^{10}}{k^3} \\
\xi_3 &= \frac{k}{x_3x_5} = \frac{k^7}{x_1^{20}} \\
\xi_4 &= \frac{k}{x_4x_1} = \frac{x_1^7}{k^2} \\
\xi_5 &= \frac{k}{x_5x_2} = \frac{k^5}{x_1^{14}}
\end{aligned} \tag{3}$$

oder wenn man unter Beachtung von (1) auf ξ_1 zurückführt

$$\xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{k}{\xi_1^2}, \quad \xi_3 = \frac{\xi_1^4}{k}, \quad \xi_4 = \frac{k^3}{\xi_1^8}, \quad \xi_5 = \frac{\xi_1^{16}}{k^5}; \tag{3*}$$

weil überdies $\xi_1^{33} = \frac{k^{66}}{x_1^{165}} = k^{11}$, so ist $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5$ wieder ein der C_3 um- und eingeschriebenes Fünfeck.

Versucht man auf dieses den nämlichen Vorgang anzuwenden, so ergibt sich als erste Ecke

$$\xi_1' = \frac{k^2}{\xi_1^5} = \frac{k^2}{\left(\frac{k^2}{x_1^5}\right)^5} = \frac{x_1^{25}}{k^8} = \frac{x_1^{33}}{k^8 x_1^8} = \frac{k^8}{x_1^8} = x_4,$$

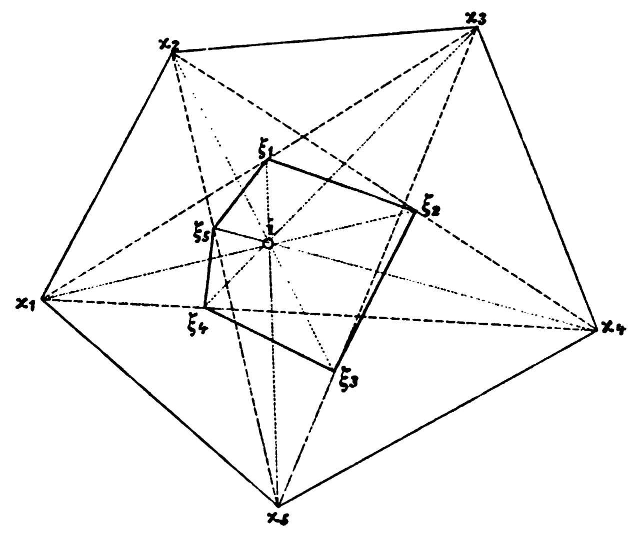


Fig. 6.

d. h. man kommt wieder auf das ursprüngliche Fünfeck zurück, so dass sich auf dem angedeuteten Wege n u r e i n z w e i t e s Fünfeck gewinnen lässt.

54. »Der durch die Ecken eines der C_3 um- und eingeschriebenen Fünfecks gelegte Kegelschnitt schneidet die Curve zum sechstenmale in einem Inflexionspunkte.«

Erster Beweis. Wenn die sechs Punkte x_m $(m = 1, 2, \ldots 6)$ der C_3 auf einer C_2 liegen, so liegen ihre Tangentialpunkte auch auf einer C_2 (siehe Artikel 22); diese beiden Kegelschnitte müssen

aber als durch die fünf Punkte $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ gehend identisch sein und C_3 weiter in einem Punkte schneiden, der sein eigener Tangentialpunkt, also ein Inflexionspunkt ist.

Zweiter Beweis. Auf Grund von (2) ist der sechste Schnittpunkt

$$x_6 = \frac{k^2}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} = \frac{k^4}{x_1^{11}},$$

also ist

$$x_6^3 = \frac{k^{12}}{x_1^{33}}$$

und mit Rücksicht auf (1)

$$x_6^3 = k,$$

wodurch die Behauptung ebenfalls erwiesen ist.

Für das aus dem Fünfeck (x) abgeleitete Fünfeck (ξ) ist der sechste Schnittpunkt der ihm umschriebenen C_2

$$\xi_6 = \frac{k^4}{\xi_1^{11}} = \frac{k^4}{\left(\frac{k^2}{x_1^5}\right)^{11}} = \frac{x_1^{55}}{k^{18}} = \frac{x_1^{66}}{k^{18} x_1^{11}} = \frac{k^4}{x_1^{11}} = x_6;$$

es geht hienach der dem abgeleiteten Fünfeck umschriebene Kegelschnitt durch denselben Inflexionspunkt, welchen das ursprüngliche Fünfeck ergeben hat.

55. Aus dem Bisherigen ist der Schluss zu ziehen, dass die 216 Fünfecke in Gruppen von je 24 unter einander gepaarten Fünfecken auf die 9 Inflexionspunkte sich vertheilen werden, und es handelt sich darum, die 24 Fünfecke einer solchen Gruppe zu finden. Zunächst könnte der Versuch hiezu auf Grund der folgenden Sätze unternommen werden.

Satz I. »Wenn x_2 der Tangentialpunkt von x_1 und $y_2 y_1$ die Tangentialpunkte μ^{ter} Ordnung von $x_2 x_1$ sind, so ist auch y_2 der Tangentialpunkt von y_1«.

Denn nach Annahme ist

$$x_1^2 x_2 = k \qquad x_1^{3\mu-1} y_1 = k^\mu \qquad x_2^{3\mu-1} y_2 = k^\mu,$$

quadrirt man die zweite Gleichung und multiplicirt sie mit der dritten, so ergibt sich

$$(x_1^2 x_2)^{3\mu-1} y_1^2 y_2 = k^{3\mu}$$

und daraus wegen der ersten Gleichung thatsächlich

$$y_1^2 y_2 = k.$$

Allgemeiner noch ist

Satz II. »Wenn x_2 der Tangentialpunkt ν^{ter} Ordnung von x_1 und $y_2 y_1$ respective die Tangentialpunkte μ^{ter} Ordnung von $x_2 x_1$ sind, so ist auch y_2 der Tangentialpunkt ν^{ter} Ordnung von y_1«.

Laut Annahme ist nämlich

$$x_1^{3\nu-1} x_2 = k^\nu \qquad x_1^{3\mu-1} y_1 = k^\mu \qquad x_2^{3\mu-1} y_2 = k^\mu;$$

erhebt man die zweite Gleichung in die Potenz $3\nu-1$ und multiplicirt dann mit der dritten, so kommt

$$(x_1^{3\nu-1} x_2)^{3\mu-1} y_1^{3\nu-1} y_2 = k^{3\mu\nu}$$

und dies gibt vermöge der ersten Gleichung

$$y_1^{3\nu-1} y_2 = k^\nu, \text{ w. z. b. w.}$$

Aus dem ersten dieser Sätze folgt weiter:

Satz III. »Ist $x_1 x_2 \ldots x_n$ ein der C_3 um- und eingeschriebenes n-Eck und sind $y_1 y_2 \ldots y_n$ die Tangentialpunkte μ^{ter} Ordnung seiner Ecken, so ist $y_1 y_2 \ldots y_n$ auch ein um- und eingeschriebenes n-Eck«. Dazu muss jedoch bemerkt werden, dass sich dieses letztere, wenn p ein Theiler von n ist, auch auf ein p-Eck reduciren, beziehungsweise dass es in einen Inflexionspunkt übergehen kann. Das n-Eck $y_1 y_2 \ldots y_n$ soll als »n-Eck der Tangentialpunkte μ^{ter} Ordnung« bezeichnet werden.

Wir suchen nun die auf diesem Wege aus einem gegebenen n-Eck sich ergebenden abgeleiteten n-Ecke und führen diese Betrachtung für $n = 3$ und $n = 5$ durch.

Es sei also $x_1 x_2 x_3$ ein der C_3 um- und eingeschriebenes Dreieck, daher

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad x_3 = \frac{x_1^4}{k} \text{ und } x_1^9 = k^3.$$

Für $\mu = 1$ ergibt sich selbstverständlich immer das nämliche Polygon; für $\mu = \mu$ ist

$$y_1 = \frac{k^\mu}{x_1^{3\mu-1}} = \frac{k^\mu x_1}{x_1^{3\mu}};$$

ist nun μ durch 3 theilbar, also $\mu = 3\nu$, so hat man

$$y_1 = \frac{k^{3\nu} x_1}{(x_1^3)^{3\nu}} = \frac{k^{3\nu} x_1}{k^{3\nu}} = x_1;$$

ist dagegen μ nicht theilbar durch 3, also $\mu = 3\nu \pm 1$, so ist

$$y_1 = \frac{k^{3\nu\pm1} x_1}{x_1^{9\nu} x_1^{\pm3}} = \frac{k^{3\nu\pm1} x_1}{k^{3\nu} x_1^{\pm3}} = k^{\pm1} x_1^{1\mp3},$$

also entweder $y_1 = \frac{k}{x_1^2} = x_2$ oder $y_1 = \frac{x_1^4}{k} = x_3$. Aus einem Dreiecke kann daher in dieser Art ein neues Dreieck nicht abgeleitet werden.

An zweiter Stelle sei x_1 eine Ecke eines um- und eingeschriebenen Fünfecks und y_1 ihr Tangentialpunkt μ^{ter} Ordnung. Dann ist

$$x_1^{33} = k^{11} \text{ und } y_1 = \frac{k^\mu}{x_1^{3\mu-1}};$$

bringt man μ auf die Form $\mu = 11\nu + r$, so wird

$$y_1 = \frac{k^{11\nu+3}}{x_1^{33\nu+3r-1}} = \frac{k^{11\nu+r}}{k^{11\nu} x_1^{3r-1}} = \frac{k^r}{x_1^{3r-1}},$$

worin der Reihe nach $r = 0, 1, 2 \ldots 10$ zu setzen ist. Man erhält

$$\text{für } r = 0 \ldots y_1 = x_1$$

$$\text{»} \quad = 1 \qquad = \frac{k}{x_1^2} = x_2$$

$$\text{»} \quad = 3 \qquad = \frac{k^3}{x_1^8} = x_4$$

$$\text{»} \quad = 6 \qquad = \frac{k^6}{x_1^{17}} = \frac{k^6 x_1^{16}}{x_1^{33}} = \frac{x_1^{16}}{k^5} = x_5$$

$$\text{»} \quad = 10 \qquad = \frac{k^{10}}{x_1^{29}} = \frac{k^{10} x_1^4}{x_1^{33}} = \frac{x_1^4}{k} = x_3$$

$$\text{»} \quad r = 4 \ldots y_1 = \frac{k^4}{x_1^{11}}, \text{ daher } y_1^3 = \frac{k^{12}}{x_1^{33}} = k;$$

$$\text{für } r = 2 \ldots y_1 = \frac{k^2}{x_1^5} = \xi_1$$

$$» \quad = 5 \qquad = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \xi_5$$

$$» \quad = 7 \qquad = \frac{k^7}{x_1^{20}} = \xi_3$$

$$» \quad = 8 \qquad = \frac{k^8}{x_1^{23}} = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \xi_2$$

$$» \quad = 9 \qquad = \frac{k^9}{x_1^{26}} = \frac{x_1^7}{k^2} = \xi_4.$$

Aus einem Fünfeck lässt sich also durch die Tangentialpunkte höherer Ordnungen nur ein zweites ableiten, und zwar ist es dasselbe, welches wir gleich eingangs aus den dritten Schnittpunkten der Diagonalen gebildet haben. Insbesondere entsteht aus dem Punkte x_1

für $r = 0, 1, 3, 6, 10$ respective $x_1 x_2 x_4 x_5 x_3$
» $r = 4$ der adjungirte Inflexionspunkt
» $r = 2, 5, 7, 8, 9$ respective $\xi_1 \xi_5 \xi_3 \xi_2 \xi_4$.

56. »Die beiden Fünfecke $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ und $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5$ liegen perspectivisch in Bezug auf den Inflexionspunkt, mit welchem sie verknüpft sind.«

Dem Artikel 54 zufolge ist nämlich dieser Inflexionspunkt

$$i = \frac{k^4}{x_1^{11}}; \tag{4}$$

demnach ist, wenn wir die Projection von x_m aus i auf C_3 mit x'_m bezeichnen,

$$x'_1 = \frac{k}{i x_1} = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \xi_2$$

$$x'_2 = \frac{k}{i x_2} = \frac{x_1^{13}}{k^4} = \frac{k^7}{x_1^{20}} = \xi_3$$

$$x'_3 = \frac{k}{i x_3} = \frac{x_1^7}{k^2} = \xi_4$$

$$x'_4 = \frac{k}{ix_4} = \frac{x_1^{19}}{k^6} = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \xi_5$$

$$x'_5 = \frac{k}{ix_5} = \frac{k^2}{x_1^5} = \xi_1.$$

Dadurch ist die perspectivische Lage erwiesen, und zwar gehen durch i die Geraden $x_1\xi_2$, $x_2\xi_3$, $x_3\xi_4$, $x_4\xi_5$, $x_5\xi_1$.

Mit Hilfe der Gleichung (4) und der aus ihr resultirenden

$$i^{11} = \frac{k^{44}}{x_1^{121}} = \frac{x_1^{132}}{x_1^{121}} = x_1^{11} \quad (= x_2^{11} = \ldots = x_5^{11}) \qquad (5)$$

lassen sich sämmtliche Punkte x und ξ durch i und x_1 darstellen; man erhält, von den Gleichungen (2) und (3) Gebrauch machend:

$$x_1 = x_1 \qquad \xi_1 = \frac{k^2}{x_1^5} = \frac{k^4}{k^2x_1^5} = \frac{ix_1^{11}}{i^6x_1^5} = \frac{i^6}{x_1^5}$$

$$x_2 = \frac{k}{x_1^2} = \frac{k^4}{k^3x_1^2} = \frac{ix_1^{11}}{i^9x_1^2} = \frac{i^3}{x_1^2} \qquad \xi_2 = \frac{x_1^{10}}{k^3} = \frac{kx_1^{10}}{k^4} = \frac{kx_1^{10}}{ix_{11}^{11}} = \frac{i^2}{x_1}$$

$$x_3 = \frac{x_1^4}{k} = \frac{k^3x_1^4}{k^4} = \frac{i^9x_1^4}{ix_1^{11}} = \frac{x_1^4}{i^3} \qquad \xi_3 = \frac{k^7}{x_1^{20}} = \frac{k^3ix_1^{11}}{x_1^{20}} = \frac{i^{11}x_1^{11}}{ix_1^{20}} = \frac{x_1^2}{i}$$

$$x_4 = \frac{k^3}{x_1^8} = \frac{k^4}{kx_1^8} = \frac{ix_1^{11}}{i^3x_1^8} = \frac{x_1^3}{i^2} \qquad \xi_4 = \frac{x_1^7}{k^2} = \frac{k^2x_1^7}{ix_1^{11}} = \frac{i^5}{x_1^4}$$

$$x_5 = \frac{x_1^{16}}{k^5} = \frac{x_1^{16}}{kix_1^{11}} = \frac{x_1^5}{i^4} \qquad \xi_5 = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \frac{kix_1^{11}}{x_1^{14}} = \frac{i^4}{x_1^3}$$

Auf Grund dieser Darstellung erkennt man nun leicht, dass die eilf Punkte i, x und ξ einen eilfgliedrigen Cyklus in der E-Beziehung $E(ix_1)$ bilden; in der That ist in $E(ix_1)$ die Reihenfolge der Punkte, in welcher jeder folgende dem vorangehenden entspricht, die nachstehende:

$$\begin{array}{cccccccccccc} i & x_1 & \frac{x_1^2}{i} & \frac{x_1^3}{i^2} & \frac{x_1^4}{i^3} & \frac{x_1^5}{i^4} & \frac{i^6}{x_1^5} & \frac{i^5}{x_1^4} & \frac{i^4}{x_1^3} & \frac{i^3}{x_1^2} & \frac{i^2}{x_1} & (i \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ i & x_1 & \xi_3 & x_4 & x_3 & x_5 & \xi_1 & \xi_4 & \xi_5 & x_2 & \xi_2 & (i \end{array}$$

Den 12 existirenden E_{11} entsprechen, von i ausgehend, 12 solche Gruppen, von denen jede i und zwei in Bezug auf

dieses perspectivische Fünfecke enthält, so dass man thatsächlich zu den 2.12 = 24 mit i verknüpften Fünfecken gelangt.

D. Sechsecke.

57. Es sei x_1 ein Punkt, welcher der Gleichung

$$x^{63} = k^{21} \tag{1}$$

genügt; dann lässt sich von ihm aus ein der C_3 um- und eingeschriebenes Sechseck (oder Dreieck, weil die Gleichung (1) eine Folgerung der Gleichung $x^9 = k^3$ ist) construiren, dessen aufeinanderfolgende Ecken sind:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = x_1, & x_2 = \dfrac{k}{x_1^2}, & x_3 = \dfrac{x_1^4}{k}, & x_4 = \dfrac{k^3}{x_1^8}, \\ & x_5 = \dfrac{x_1^{16}}{k^5}, & x_6 = \dfrac{k^{11}}{x_1^{32}}. & \end{array}\right\} \tag{2}$$

Bestimmt man die dritten Schnitte der Diagonalen x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, x_4x_6, x_5x_1, x_6x_2 mit C_3, so ergibt sich ein neues um- und eingeschriebenes Sechseck (ξ), dessen Ecken sind:[1]

$$\left.\begin{array}{llll} \xi_1 = \dfrac{k}{x_1x_3} = \dfrac{k^2}{x_1^5}, & \xi_2 = \dfrac{x_1^{10}}{k^3}, & \xi_3 = \dfrac{k^7}{x_1^{20}}, & \xi_4 = \dfrac{x_1^{40}}{k^{13}}, \\ & \xi_5 = \dfrac{k^6}{x_1^{17}}, & \xi_6 = \dfrac{x_1^{34}}{k^{11}}. & \end{array}\right\} \tag{3}$$

Verfährt man mit diesem Sechseck in derselben Weise, so kommt ein drittes, (ξ'), zu Stande, nämlich

$$\left.\begin{array}{lll} \xi_1' = \dfrac{k}{\xi_1\xi_3} = \dfrac{x_1^{25}}{k^8}, & \xi_2' = \dfrac{x_1^{13}}{k^4}, & \xi_3' = \dfrac{k^9}{x_1^{26}}, \\ \xi_4' = \dfrac{k^4}{x_1^{11}}, & \xi_5' = \dfrac{x_1^{22}}{k^7}, & \xi_6' = \dfrac{x_1^{19}}{k^6}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Wiederholt man denselben Vorgang auch mit diesem, so ergibt sich als erster Punkt

---

[1] Man überzeugt sich leicht, dass jeder folgende Punkt Tangentialpunkt des vorangehenden, der erste Tangentialpunkt des letzten ist.

$$\xi_1'' = \frac{k}{\xi_1' \xi_3'} = \frac{k^{21}}{x_1^{62}} = \frac{k^{21} x_1}{x_1^{63}} = x_1 ;$$

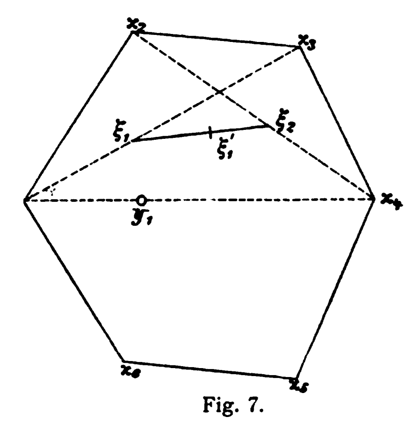


Fig. 7.

man kommt mithin wieder auf das ursprüngliche Sechseck zurück. Es lassen sich also aus jedem Sechsecke noch zwei andere ableiten, so dass sich die der C_3 um- und eingeschriebenen Sechsecke zu dreien gruppiren (siehe Fig. 7).

Die dritten Schnittpunkte der Diagonalen $x_1 x_4$, $x_2 x_5$, $x_3 x_6$ seien der Reihe nach y_1, y_2, y_3; dann ist

$$y_1 = \frac{k}{x_1 x_4} = \frac{x_1^7}{k^2}, \qquad y_2 = \frac{k}{x_2 x_5} = \frac{k^5}{x_1^{14}}, \qquad y_3 = \frac{k}{x_3 x_6} = \frac{x_1^{28}}{k^9};$$

man überzeugt sich aber durch leichte Rechnung, bei welcher auf die Gleichung (1) Rücksicht zu nehmen ist, dass

$$y_1^2 y_2 = k, \qquad y_2^2 y_3 = k, \qquad y_3^2 y_1 = k;$$

mithin liegen die drei Punkte $y_1 y_2 y_3$ derart, dass sie die Ecken eines der C_3 um- und eingeschriebenen Dreiecks bilden.

Die analogen Punkte für das Sechseck (ξ) sind

$$\eta_1 = \frac{\xi_1^7}{k^2} = \frac{k^{12}}{x_1^{35}} = \frac{k^{12} x_1^{28}}{x_1^{63}} = \frac{x_1^{28}}{k^9} = y_3, \qquad \eta_2 = y_2, \qquad \eta_3 = y_1;$$

und für das Sechseck (ξ')

$$\eta_1' = \frac{\xi_1'^7}{k^2} = \frac{k^5}{x_1^{14}} = y_2, \qquad \eta_2' = y_3, \qquad \eta_3' = y_1.$$

»Es gehören also die drei Sechsecke eines Tripels (x) (ξ) (ξ') zu einem und demselben der C_3 um- und eingeschriebenen Dreiecke.«

58. Der Tangentialpunkt μ^{ter} Ordnung von x_1 heisse z_1, und es werde μ auf die Form $\mu = 21\nu + r$ gebracht; dann ist wegen (1)

$$z_1 = \frac{k^{\mu}}{x_1^{3\mu-1}} = \frac{k^{21\nu+r}}{x^{63\nu}x_1^{3r-1}} = \frac{k^r}{x_1^{3r-1}},$$

worin der Reihe nach $r = 0, 1, 2, \ldots 20$ zu setzen ist. Diese Substitutionen führen zu dem folgenden Tableau:

$r =$	$z_1 =$	$r =$	$z_1 =$
0 ...	x_1	11 ...	x_6
1 ...	x_2	12 ...	y_3
2 ...	ξ_1	13 ...	ξ'_1
3 ...	x_4	14 ...	ξ'_5
4 ...	ξ'_4	15 ...	ξ'_6
5 ...	y_2	16 ...	x_5
6 ...	ξ_5	17 ...	ξ'_2
7 ...	ξ_3	18 ...	ξ_2
8 ...	ξ_4	19 ...	y_1
9 ...	ξ'_3	20 ...	x_3
10 ...	ξ_6		

Es ist also

für $r = 0,\ 1,\ 3,\ 11,\ 16,\ 20 \ldots z_1 \equiv x_1x_2x_4x_6x_5x_3$

» $r = 2,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 18 \ldots z_1 \equiv \xi_1\xi_5\xi_3\xi_4\xi_6\xi_2$

» $r = 4,\ 9,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17 \ldots z_1 \equiv \xi'_4\xi'_3\xi'_1\xi'_5\xi'_6\xi'_2$

» $r = 5,\ 12,\ 19 \qquad \ldots z_1 \equiv y_2y_3y_1.$

Man erhält demnach durch Benützung der Tangentialpunkte beliebig hoher Ordnung immer nur dieselben drei Sechsecke und das mit ihnen verknüpfte Dreieck.

59. Ausser den Sechsecken der eben betrachteten Art, welche mit Dreiecken associirt sind, gibt es noch Sechsecke einer zweiten Art, welche zu Inflexionspunkten gehören. Es sind dies solche, deren Ecken nicht allein der Gleichung (1), sondern auch der engeren

$$x^{21} = x^{7} \tag{5}$$

genügen, von welcher (1) eine Folgerung ist. Findet nämlich diese Gleichung statt, so ist

$$y_1 = \frac{x_1^7}{k^2}, \qquad y_2 = \frac{k^5}{x_1^{14}} = \frac{k^5 x_1^7}{x_1^{21}} = \frac{x_1^7}{k^2}, \qquad y_3 = \frac{x_1^{28}}{k^9} = \frac{x_1^7}{k^2},$$

also

$$y_1 = y_2 = y_3 = \frac{x_1^7}{k^2} = y$$

und

$$y^3 = \frac{x_1^{21}}{k^6} = k,$$

d. h. das Dreieck $y_1 y_2 y_3$ reducirt sich in diesem Falle auf einen Inflexionspunkt i. Aber auch die drei oben gefundenen Sechsecke (x), (ξ), (ξ') fallen in eines zusammen, da

$$\xi_1 = \frac{k^2}{x_1^5} = \frac{k^2 x_1^{16}}{x_1^{21}} = \frac{x_1^{16}}{k^5} = x_5$$

$$\xi_1' = \frac{x_1^{25}}{k^8} = \frac{k^7 x_1^4}{k^8} = \frac{x_1^4}{k} = x_3,$$

und dieses eine Sechseck ist in Beziehung auf den Punkt i perspectivisch; denn man hat

$$x_1 i x_4 = x_1 \cdot \frac{x_1^7}{k^2} \cdot \frac{k^3}{x_1^8} = k$$

$$x_2 i x_5 = \frac{k}{x_1^2} \cdot \frac{x_1^7}{k^2} \cdot \frac{x_1^{16}}{k^5} = k$$

$$x_3 i x_6 = \frac{x_1^4}{k} \cdot \frac{x_1^7}{k^2} \cdot \frac{k^{11}}{x_1^{32}} = k.$$

Die zu einem Inflexionspunkt i gehörigen Sechsecke ergeben sich durch Vervollständigung des siebenelementigen Cyklus in der $E(ix_1)$:

$$i, \quad x_1, \quad \frac{x_1^2}{i} = x_5, \quad \frac{x_1^3}{i^2} = x_6, \quad \frac{x_1^4}{i^3} = x_3, \quad \frac{x_1^5}{i^4} = x_2, \quad \frac{x_1^6}{i^5} = x_4;$$

solcher siebengliedrigen Cyklen ergeben sich $7+1=8$, so dass jeder Inflexionspunkt zu acht Sechsecken der zweiten Art Veranlassung gibt.

VI. Einer Raumcurve R_4 vierter Ordnung erster Species gleichzeitig um- und eingeschriebene Polygone.

60. In der Reihe der Punkte $x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}$ auf einer R_4 sei jeder Punkt der Schnittpunkt der Schmiegungsebene des vorangehenden Punktes. Wird die Involution J_3^4 der ebenen Quadrupel durch die Gleichung $xx'x''x''' = k$ charakterisirt, so bestehen zwischen obigen Punkten die Relationen

$$x_1^3 x_2 = k$$
$$x_2^3 x_3 = k$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n^3 x_{n+1} = k.$$

Erhebt man diese Gleichungen der Reihe nach zu den Potenzen $3^{n-1}, 3^{n-2}, \ldots 3^0$, so wird

für gerade n:	für ungerade n:
$x_1^{3^n} x_2^{3^{n-1}} = k^{3^{n-1}}$	$x_1^{3^n} x_2^{3^{n-1}} = k^{3^{n-1}}$
$k^{3^{n-2}} = x_2^{3^{n-1}} x_3^{3^{n-2}}$	$k^{3^{n-2}} = x_2^{3^{n-1}} x_3^{3^{n-2}}$
$\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots$
$x_{n-1}^{3^2} x_n^3 = k^3$	$k^3 = x_{n-1}^{3^2} x_n^3$
$k = x_n^3 x_{n+1}$	$x_n^3 x_{n+1} = k$;

durch Multiplication dieser Gleichungssysteme erhält man

für gerade n: $\quad x_1^{3^n} k^{3^{n-2}+3^{n-4}+\ldots+3^0} = x_{n+1} k^{3^{n-1}+3^{n-3}+\ldots+3^1}$

für ungerade n: $\quad x_1^{3^n} x_{n+1} k^{3^{n-2}+3^{n+4}+\ldots+3^1} = k^{3^{n-1}+3^{n-3}+\ldots+3^0}$

und nach Summirung der geometrischen Progressionen

für gerade n: $\quad x_1^{3^n} = x_{n+1} k^{\frac{3^n-1}{4}}$

für ungerade n: $\quad x_{n+1} x_1^{3^n} = k^{\frac{3^n+1}{4}}$;

beide Gleichungen lassen sich in die eine zusammenfassen:

$$x_1^{3^n} = (x_{n+1})^{(-1)^n} k^{\frac{3^n-(-1)^n}{4}}. \tag{1}$$

Sollen die Punkte ein geschlossenes Polygon, ein n-Eck bilden, so muss der letzte mit dem ersten zusammenfallen, also $x_{n+1} \equiv x_1$ sein; demnach hat ein Punkt auf R_4, von welchem ausgehend sich derselben ein n-Eck um- und einschreiben lässt, der Gleichung

$$x^{3^n-(-1)^n} = k^{\frac{3^n-(-1)^n}{4}} \tag{2}$$

zu genügen.

Hiernach lauten die charakteristischen Gleichungen für Zwei-, Drei-,...Siebenecke... wie folgt:

$$\begin{array}{ll} n = 2 & x^8 = k^2 \\ = 3 & x^{28} = k^7 \\ = 4 & x^{80} = k^{20} \\ = 5 & x^{244} = k^{61} \\ = 6 & x^{728} = k^{182} \\ = 7 & x^{2188} = k^{547} \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Da sich unter den $[3^n-(-1)^n]^2$ Lösungen der Gleichung (2) (siehe Artikel 41) auch die 16 Wendeberührungspunkte als Wurzeln der Gleichung $x^4 = k$ befinden, so bleiben nach Ausscheidung dieser, da sie als Ecken nicht auftreten können, noch

$$N_n = [3^n-(-1)^n]^2-16$$

Punkte übrig; daher ist die Anzahl der einer R_4 um- und eingeschriebenen n-Ecke, sofern n eine Primzahl bedeutet,

$$\xi_n = \frac{[3^n-(-1)^n]^2-16}{n}; \tag{3}$$

hat dagegen n die von einander verschiedenen Theiler $t_1, t_2, \ldots$ (mit Einschluss von 2), so gilt die Formel

$$\zeta_n = \frac{[3^n-(-1)^n]^2-16-\sum t_i \zeta_{t_i}}{n} \tag{4}$$

Für die oben angeführten speciellen Werthe von n gibt diese Formel:

Eckenzahl	Anzahl der Polygone
2	$24 = \frac{8^2-16}{2}$
3	$256 = \frac{28^2-16}{3}$
4	$1584 = \frac{80^2-16-2.24}{4}$
5	$11904 = \frac{244^2-16}{5}$
6	$88192 = \frac{728^2-16-2.24-3.256}{6}$
7	$683904 = \frac{2188^2-16}{7}$, u. s. w.

VII. Die Küpper'schen Sätze über die Steiner'schen Polygone.[1]

61. Auf C_3 sei eine Reihe fester Fundamentalpunkte *abcde*... gegeben; man ziehe von dem beliebigen Punkte 0 der C_3 ausgehend nach einander die Geraden $0a1$, $1b2$, $2c3$, $3d4$,... derart, dass die Punkte 1, 2, 3, 4,...ν,...$\nu+\delta$,... ebenso wie 0 auf C_3 liegen. [δ möge als Abstand des Punktes $\nu+\delta$ von dem Punkte ν bezeichnet werden; hiernach hat der Punkt $\nu-\delta$ von ν den Abstand $-\delta$; unter »Abstand der Punkte $2k$ und $2l+1$« soll immer der Abstand des unpaaren von dem paaren, also die Differenz $2l+1-2k = 2(l-k)+1$ verstanden sein.]

Auf Grund des Entstehungsgesetzes obiger Punktreihe gelten die Gleichungen

$$0a1 = 1b2 = 2c3 = 3d4 = \ldots = k.$$

Wir betrachten nun die Punkte ν und $\nu+\delta$ (wobei δ eine ungerade Zahl sein soll) und nennen die zwischenliegenden Fundamentalpunkte $a_1 a_2 \ldots a_\delta$; dann ist

$$\nu a_1(\nu+1) = (\nu+1)a_2(\nu+2) = (\nu+2)a_3(\nu+3) = \ldots =$$
$$= (\nu+\delta-1)a_\delta(\nu+\delta) = k;$$

[1] Mathem. Annalen, Bd. XXIV.

daraus folgt

$$\nu(\nu+1)=\frac{k}{a_1}$$

$$\frac{k}{a_2}=(\nu+1)(\nu+2)$$

$$(\nu+2)(\nu+3)=\frac{k}{a_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\nu+\delta-1)(\nu+\delta)=\frac{k}{a_\delta}\cdot$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so ergibt sich

$$\nu(\nu+\delta)=\frac{a_2a_4\ldots a_{\delta-1}}{a_1a_3\ldots a_\delta}k;$$

bezeichnet man den dritten Schnittpunkt der Geraden $\overline{\nu(\nu+\delta)}$ mit C_3 durch f, so ist

$$f=\frac{k}{\nu(\nu+\delta)}=\frac{a_1a_3\ldots a_\delta}{a_2a_4\ldots a_{\delta-1}};$$

d. h. »die Gerade, welche einen bestimmten Punkt ν mit dem um eine bestimmte ungerade Zahl $+\delta$ von ihm entfernten Punkte verbindet, trifft die C_3 in einem festen Punkte, dessen Lage nämlich von der Wahl des Ausgangspunktes 0, also von der Punktreihe, in der man sich gerade befindet, unabhängig ist.«

62. Es seien nur zwei von einander verschiedene Fundamentalpunkte a, b gegeben, welche abwechselnd der obigen Vorschrift gemäss benutzt werden, so dass die Reihe $abcd\ldots$ übergeht in $abab\ldots$ Man hat dann die Gleichungen

$$0a1=1b2=2a3=3b4=\ldots$$
$$=2\nu a(2\nu+1)=\ldots=(2\mu-1)b.2\mu=\ldots=k,$$

aus welchen sich ergibt

$$1 = \frac{k}{a0} \qquad 2 = \frac{k}{b1} = \frac{a0}{b}$$

$$3 = \frac{k}{a2} = \frac{kb}{a^2 0} \qquad 4 = \frac{k}{b3} = \frac{a^2 0}{b^2}$$

$$5 = \frac{k}{a4} = \frac{kb^2}{a^3 0} \qquad 6 = \frac{k}{b5} = \frac{a^3 0}{b^3}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

also in zusammenfassender Darstellung:

$$1 = \frac{k}{a0} \qquad 2 = \frac{a}{b} 0.$$

$$3 = \frac{b}{a} \frac{k}{a0} \qquad 4 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 0$$

$$5 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{k}{a0} \qquad 6 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 0$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$2\nu + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^\nu \frac{k}{a0} \qquad 2\nu = \left(\frac{a}{b}\right)^\nu 0.$$

Auf Grund der allgemeinen Endformeln dieser zwei Reihen lässt sich nun der folgende Satz beweisen: »Die Gerade, welche zwei Punkte verbindet, deren Abstand eine bestimmte ungerade Zahl ist, geht durch einen festen, d. i. von der Lage des Ausgangspunktes 0 unabhängigen Punkt der C_3«.

Die beiden Punkte mögen mit μ, μ' bezeichnet werden. Zunächst sei μ gerad, etwa $\mu = 2\nu$; dann ist $\mu' = 2\nu + \delta$ und daher

$$\mu = 2\nu = \left(\frac{a}{b}\right)^\nu 0$$

$$\mu' = [2\nu + (\delta - 1)] + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu + \frac{\delta - 1}{2}} \frac{k}{a0};$$

somit hat man

$$\mu\mu' = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\delta - 1}{2}} \frac{k}{a};$$

wird der dritte Schnittpunkt von $\mu\mu'$ mit C_3 durch f bezeichnet, so ist

$$f = \frac{k}{\mu\mu'} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\delta-1}{2}} a,$$

also f thatsächlich ein Punkt, dessen Lage nur von a, b und δ abhängt.

Ist hingegen μ ungerad $= 2\nu - \delta$, so ist $\mu' = 2\nu$, der Abstand beider Punkte $\mu - \mu' = -\delta$ negativ. Es ist dann

$$\mu = [2\nu - (\delta + 1)] + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu - \frac{\delta+1}{2}} \frac{k}{a0}$$

$$\mu' = 2\nu = \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu} 0,$$

folglich

$$\mu\mu' = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{\delta+1}{2}} \frac{k}{a}$$

und der dritte Schnittpunkt f' von $\overline{\mu\mu'}$ mit C_3

$$f' = \frac{k}{\mu\mu'} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{\delta+1}{2}} a$$

wieder ein fester Punkt. Die Gerade $\overline{ff'}$ schneide C_3 weiter in c, so ist

$$= \frac{k}{ff'} = \frac{k}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} a^2} = \frac{k}{ab}.$$

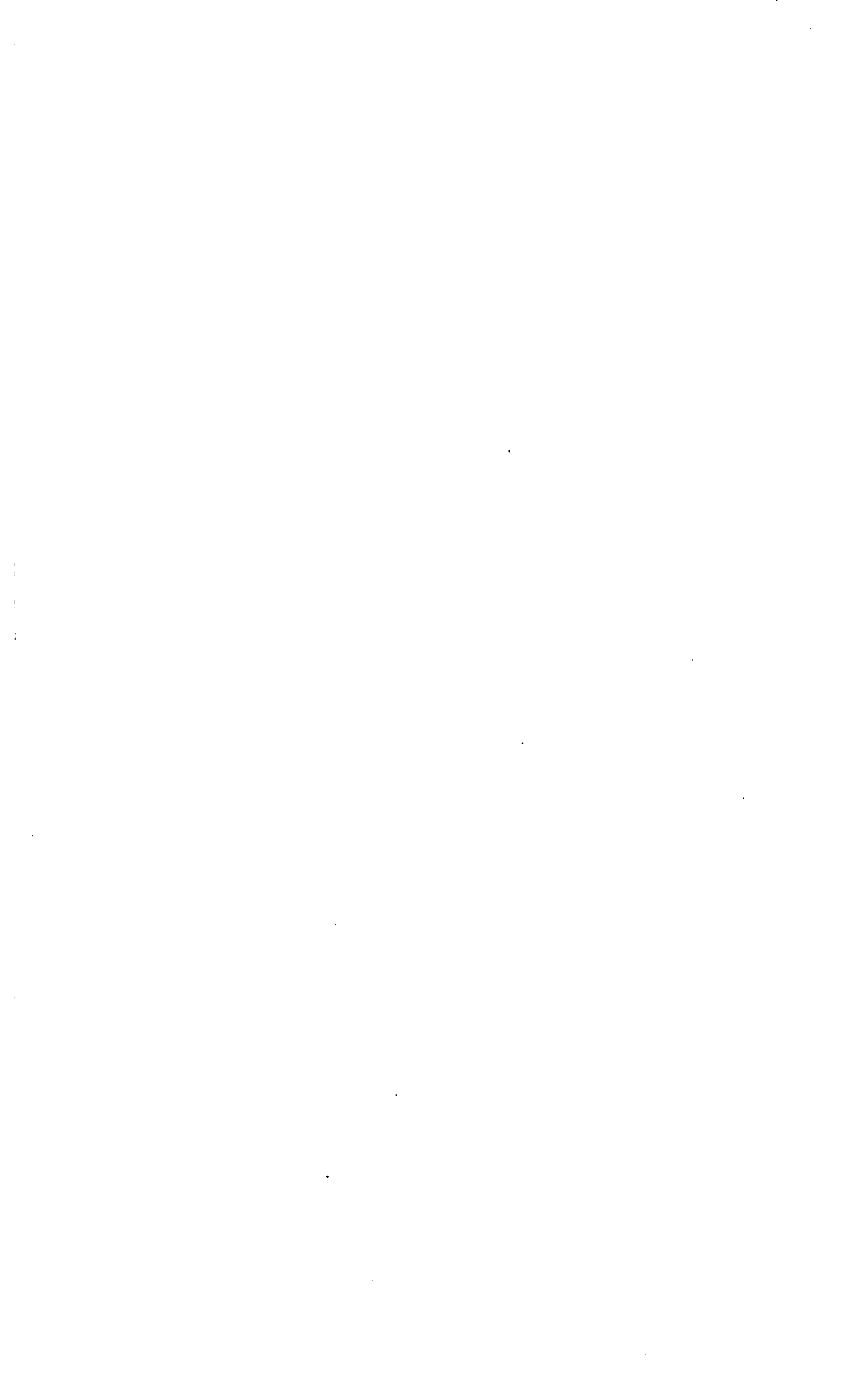
Da dieser Punkt von δ nicht mehr abhängt — es ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie der Fundamentalpunkte — so gelangt man zu dem Satze:

»Die Punkte f, welche als Schnittpunkte der C_3 mit den Verbindungslinien von je einem paaren und unpaaren Punkte in allen denkbaren Reihen auftreten, liegen zu je zweien auf den Strahlen eines Büschels, dessen Scheitel c auf C_3 liegt.«

Soll sich das Polygon schliessen, nachdem jeder Fundamentalpunkt n-mal durchlaufen wurde, so muss $2n \equiv 0$ werden, also

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n 0 = 0,$$

d. h. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1$ oder $a^n = b^n$ sein; sind also die Fundamentalpunkte a, b Hauptpunkte einer Involution J_{n-1}^n n^{ten} Grades, so schliesst sich das Steiner'sche Polygon zu einem $2n$-Eck, von welchem Punkte der C_3 man auch ausgehen mag.



Dyadische Coordination der bis 100.000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen

von

Dr. **Eduard Suchanek.**

Schreibt man die ungeraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe nach Einführung symbolischer Exponenten als sogenannte dyadische Producte, so bilden die letzteren lauter Specialisirungen des Gleichungssystems:

$$D_1 = 1^{c_1}, \quad D_2 = 1^{c_1} 0^{c_2} 1^{c_3}, \ldots$$
$$D_r = 1^{c_1} 0^{c_2} 1^{c_3} \ldots . 0^{c_{2r-2}} 1^{c_{2r-1}} \ldots .$$

und begründen daher eine Eintheilung aller ungeraden Zahlen in solche erster, zweiter, ...r^{ter} Ordnung, welche — unter s_k allgemein die Summe:

$$c_k + c_{k+1} + c_{k+2} + \ldots + c_{2r-1}$$

verstanden — bekanntlich auch durch die Ausdrücke:

$$D_1 = 2^{c_1} - 1, \quad D_2 = 2^{c_1+c_2+c_3} - 2^{c_2+c_3} + 2^{c_3} - 1, \ldots .$$
$$D_r = 2^{s_1} - 2^{s_2} + 2^{s_3} - \ldots + 2^{s_{2r-1}} - 1, \ldots .$$

definirbar sind.[1] Hiebei bedeuten c_1, c_2, ... c_{2r-1} nunmehr Potenzexponenten, deren jeweilige Summen direct die An-

[1] Man vergleiche hierüber Dr. O. Simony's Abhandlung: Über den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung (Sitzb. der kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, 96. Bd., II. Abth., S. 191—286), auf welche sich auch alle folgenden Citate beziehen. Dieselbe Arbeit enthält bereits die dyadische Coordination der bis $2^{14} = 16384$ vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen.

zahlen: A_1, A_2, ... A_r der zur vollständigen dyadischen Aufschreibung der betreffenden Zahlen erster, zweiter, ...r^{ter} Ordnung nöthigen Ziffern bestimmen. — Die Fortsetzung der Transcription von 3, 5, 7...in 1^2, 101, 1^3...bis zu irgend einer Potenz von 2, etwa 2^n, liefert dann im Ganzen $2^{n-1}-1$ dyadische Producte und zwar in unmittelbarem Zusammenhange mit der binomischen Entwicklung von 2^{n-1} speciell $n-1$ Zahlen erster Ordnung, ferner:

$$\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}=\binom{n}{3}$$

Zahlen zweiter Ordnung und allgemein:

$$\binom{n-1}{2k-2}+\binom{n-1}{2k-1}=\binom{n}{2k-1}$$

Zahlen k^{ter} Ordnung, so dass für gerade Werthe von n im Ganzen noch n Zahlen die höchste überhaupt vorkommende Ordnungszahl $\frac{1}{2}n$ besitzen, während für ungerade Werthe von n noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Zahlen die Ordnungszahl $\frac{1}{2}(n-1)$ aufweisen und nur einer einzigen Zahl, nämlich:

$$2^{n-1}+2^{n-3}+\ldots+2^2+1=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$$

die höchste überhaupt vertretene Ordnungszahl $\frac{1}{2}(n+1)$ zukommt.

Die charakteristischen Exponenten: c_1, c_2, c_3, ... der verschiedenen ungeraden Zahlen vermitteln ihrerseits eigenthümliche Kriterien für deren Theilbarkeit durch 3, sobald man aus c_1, c_2, c_3, ... nach dem Schema:

$$I=\cfrac{1}{c_1+\cfrac{1}{c_2+\cfrac{1}{c_3+\ldots\text{ in inf.}}}}$$

Kettenbrüche bildet und dieselben in gemeine Brüche verwandelt, welche augenscheinlich insgesammt der Reihe der

aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche von $I: \frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \ldots \frac{Z_p}{N_p} \ldots$ angehören. Es besitzen nämlich die auf solche Art abgeleiteten gemeinen Brüche gerade oder ungerade Nenner: N_p, je nachdem die erzeugenden Zahlen durch 3 theilbar sind oder nicht, in welch' letzterem Falle N_{p-1} für Zahlen von der Form $6l-1$ gerade, hingegen für jene von der Gestalt $6l+1$ ungerade ist.[1]

Anderseits treten die den Nennern: N_{p-1}, N_p zugehörigen Zähler: Z_{p-1}, Z_p in eine bisher unbekannt gebliebene Beziehung zur jeweiligen Anzahl: A der dyadischen Ziffern der erzeugenden Zahl, welcher Zusammenhang sich zunächst für beliebige Zahlen zweiter Ordnung leicht mathematisch präcisiren lässt. — Indem wir hiebei gerade und ungerade Specialisirungen von c_1, c_2, c_3, A_2; Z_2, Z_3; N_2, N_3 durch Zuordnung der Buchstaben: g und u von einander sondern, ergibt sich auf Grundlage der Gleichungen:

$$Z_2 = c_2, \quad N_2 = c_1 c_2 + 1;$$
$$Z_3 = c_2 c_3 + 1, \quad N_3 = c_1 c_2 c_3 + c_1 + c_3$$

das alle möglichen Fälle umfassende Schema:

c_1	c_2	c_3	A_2	Z_2	Z_3	N_2	N_3	D_2
g	g	g	g	g	u	u	g	$3l$
„	g	u	u	g	u	u	u	$6l+1$
„	u	g	u	u	u	u	g	$3l$
„	u	u	g	u	g	u	u	$6l+1$
u	g	g	u	g	u	u	u	$6l+1$
„	g	u	g	g	u	u	g	$3l$
„	u	g	g	u	u	g	u	$6l-1$
„	u	u	u	u	g	g	u	$6l-1$

Hieraus entspringen folgende Wahrscheinlichkeitsschlüsse:

(I) Für jede durch 3 theilbare Zahl bleibt der Zähler: Z_p des ihren dyadischen Exponenten coordinirten Bruches ungerade, während dessen letzter Näherungsbruch einen geraden oder ungeraden Zähler: Z_{p-1} besitzt, je nachdem die dyadische Stellenzahl: A gerade oder ungerade ist.

[1] Vergl. Simony a. a. O. S. 227—230.

(II) Für jede Zahl von der Form $6l-1$ ist Z_p eine ungerade oder gerade Zahl, je nachdem A gerade oder ungerade ist, während Z_{p-1} ungerade bleibt.

(III) Für jede Zahl von der Form $6l+1$ ist Z_p zugleich mit A gerade oder ungerade, während Z_{p-1} ungerade oder gerade wird, je nachdem A eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt.

Da 2^g-1 stets durch 3 theilbar ist, mithin

$$2^n-1 = 2(2^{n-1}-1)+1$$

ausnahmslos die Form $6l+1$ besitzt, und dem zu D_1 gehörigen Bruche; $\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{c_1}$ im Einklange mit den Sätzen (I) und (III) die beiden fictiven Gleichungen: $Z_0 = 0$, $N_0 = 1$ coordinirt werden können, gelten die Schlüsse (I), (II), (III) offenbar auch für alle Zahlen dritter und höherer Ordnungen, sobald unter Voraussetzung ihrer Richtigkeit für Zahlen r^{ter} Ordnung: D_r dieselben Schlüsse für Zahlen $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung: D_{r+1} resultiren. — Dass das Letztere in der That der Fall ist, lässt sich leicht zeigen, wenn wir hiebei die für alle Näherungsbrüche von I giltige Relation:

$$Z_{2r-1}N_{2r-2} - Z_{2r-2}N_{2r-1} = 1$$

berücksichtigen. Vermöge dieser Beziehung kommen nämlich für Z_{2r-2}, Z_{2r-1}; N_{2r-2}, N_{2r-1} überhaupt nur sechs Zahlencombinationen:

$$g, u, u, g; \quad u, u, u, g; \quad u, u, g, u;$$
$$u, g, g, u; \quad u, g, u, u; \quad g, u, u, u$$

in Betracht, welche den Zahlencharakter von A_r und D_r, sowie jenen von Z_{2r}, Z_{2r+1}; N_{2r}, N_{2r+1}; A_{r+1} und D_{r+1} unter Verwerthung der bekannten Formeln:

$$Z_p = c_p Z_{p-1} + Z_{p-2}, \quad N_p = c_p N_{p-1} + N_{p-2}$$

für jede der vier möglichen Zahlencombinationen von c_{2r}, c_{2r+1} eindeutig feststellen lassen. Die diesbezüglichen Ergebnisse gestatten die nachstehende Gruppirung, welche die allgemeine Übertragbarkeit der Schlüsse (I), (II), (III) von D_r auf D_{r+1} klar ersichtlich macht:[1]

---

[1] Wie in der Rubrik von D_r ist auch in jener von D_{r+1} jede der drei Zahlenformen: $3l$, $6l-1$ und $6l+1$ achtmal vertreten.

Z_{2r-2}	Z_{2r-1}	N_{2r-2}	N_{2r-1}	A_r	D_r	c_{2r}	c_{2r+1}	Z_{2r}	Z_{2r+1}	N_{2r}	N_{2r+1}	A_{r+1}	D_{r+1}
g	u	u	g	g	$3l$	g	g	g	u	u	g	g	$3l$
„	„	„	„	„	„	g	u	g	u	u	u	u	$6l+1$
„	„	„	„	„	„	u	g	u	u	u	g	u	$3l$
„	„	„	„	„	„	u	u	u	g	u	u	g	$6l+1$
u	u	u	g	u	$3l$	g	g	u	u	u	g	u	$3l$
„	„	„	„	„	„	g	u	u	g	u	u	g	$6l+1$
„	„	„	„	„	„	u	g	g	u	u	g	g	$3l$
„	„	„	„	„	„	u	u	g	u	u	u	u	$6l+1$
u	u	g	u	g	$6l-1$	g	g	u	u	g	u	g	$6l-1$
„	„	„	„	„	„	g	u	u	g	g	u	u	$6l-1$
„	„	„	„	„	„	u	g	g	u	u	u	u	$6l+1$
„	„	„	„	„	„	u	u	g	u	u	g	g	$3l$
u	g	g	u	u	$6l-1$	g	g	u	g	g	u	u	$6l-1$
„	„	„	„	„	„	g	u	u	u	g	u	g	$6l-1$
„	„	„	„	„	„	u	g	u	g	u	u	g	$6l+1$
„	„	„	„	„	„	u	u	u	u	u	g	u	$3l$
u	g	u	u	g	$6l+1$	g	g	u	g	u	u	g	$6l+1$
„	„	„	„	„	„	g	u	u	u	u	g	u	$3l$
„	„	„	„	„	„	u	g	u	g	g	u	u	$6l-1$
„	„	„	„	„	„	u	u	u	u	g	u	g	$6l-1$
g	u	u	u	u	$6l+1$	g	g	g	u	u	u	u	$6l+1$
„	„	„	„	„	„	g	u	g	u	u	g	g	$3l$
„	„	„	„	„	„	u	g	u	u	g	u	g	$6l-1$
„	„	„	„	„	„	u	u	u	g	g	u	u	$6l-1$

Die hier entwickelten Eigenschaften von N_p, N_{p-1}, Z_p, Z_{p-1} bilden zugleich einfache qualitative Kriterien für die Richtigkeit der Rechnung, falls man zu irgend welchen ungeraden Zahlen die coordinirten Brüche aufsucht, deren Nennern: N_p dann auch umgekehrt die erzeugenden Zahlen durch die Zähler: Z_p zugeordnet werden können.

Eine derartige Zuordnung, welche sich nach ihrem Ursprunge naturgemäss als dyadische bezeichnen lässt, ist hier auf alle bis 100.000 vorkommenden Primzahlen (Z) von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ ausgedehnt worden, wobei auch gewisse topologisch-arithmetische Inductionsschlüsse in weiterem Umfange als bisher eine empirische Bestätigung gefunden haben.

Dieselben betreffen jene stabilen Knotengruppen, welche nach wiederholter Durchschneidung ringförmig geschlossener, von einer einzigen Randcurve begrenzter Streifen längs deren Mittellinien als integrirende Bestandtheile secundärer transformirter Knotenverschlingungen auftreten und sich hinsichtlich ihrer Anordnung — unter U, V die Typensymbole zweier nur durch ihre Windungszahlen verschiedener einfacher Knoten, unter $a_1, a_2 \ldots a_{2n-1}$ lauter positive ganze, der Einheit mindestens gleiche Zahlen verstanden — stets durch Ausdrücke von der Form:

$$P = V^{a_1} U^{a_2} V^{a_3} \ldots U^{a_{2n-2}} V^{a_{2n-1}}$$

charakterisiren lassen.[1] Falls nämlich schon der ursprünglich gegebene Streifen speciell mit einer solchen Knotenverbindung versehen war, wie sie in einem unverdrehten, biegsamen Ringe durch einen nach u-Umläufen und t-Drehungen um je 360° längs dessen Mittellinie in sich selbst zurücklaufenden Schnitt erzeugt werden kann, bleiben die Anzahl und Anordnung der die Gruppe P constituirenden Knoten bei allen möglichen Drehungszahlen unverändert und bestimmen durch Vermittlung des der Gruppe P zugeordneten dyadischen Productes:

$$D_n = 1^{a_1} 0^{a_2} 1^{a_3} \ldots 0^{a_{2n-2}} 1^{a_{2n-1}}$$

erfahrungsgemäss eine Primzahl von der Form $6l-1$ oder $6l+1$.

[1] Vergl. Simony a. a. O. S. 200—206, 213 und 225.

je nachdem die primäre Umlaufszahl: n ungerade oder gerade ist. Da anderseits die Verwandlung des aus der Exponentenreihe von D_n gebildeten Kettenbruches:

$$K = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{2n-1}}}}$$

in einen gemeinen Bruch als Nenner des letzteren im ersten Falle direct die Zahl n, im zweiten $n-1$ liefert, erscheinen jene beiden Primzahlen einer und derselben ungeraden Zahl (N) zugleich dyadisch coordinirt. Ausserdem werden aber der letzteren durch die Reihe der relativen Primzahlen zu N als Zähler durchgängig noch weitere Primzahlen von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ dyadisch zugeordnet, an welche Thatsache sich unmittelbar die Frage knüpft, ob jene mittelbar durch topologische Experimente gewonnenen Primzahlen vielleicht auch in arithmetischer Hinsicht specifische Merkmale besitzen?

Die vorliegende Arbeit liefert für alle bisher bekannt gewordenen stabilen Knotengruppen — 705 an der Zahl — die empirische Bestätigung, dass die denselben entsprechenden Primzahlen die kleinsten sind, welche sich den betreffenden Specialisirungen von N dyadisch coordiniren lassen.

Hieraus entspringt die Folgerung, dass umgekehrt jede Primzahl von der zuletzt angegebenen Beschaffenheit eine stabile Knotengruppe charakterisirt, welche der Umlaufszahl N oder $N+1$ angehört, je nachdem jener Primzahl die Form $6l-1$ oder $6l+1$ zukommt. Es erscheint insoferne angemessen, derartige Primzahlen in der Folge durchwegs als topologische zu bezeichnen und in eine selbstständige aufsteigende Reihe zu bringen, aus welcher dann die Anzahlen: $n_1, n_2, \ldots n_k$ aller überhaupt vorkommenden drei-, vier-, ... $(k+2)$-gliedrigen stabilen Knotengruppen P durch Abzählen der bei dyadischer Schreibweise drei-, vier-, ... $(k+2)$-gliedrigen topologischen Primzahlen zu gewinnen sind.

Auf solche Art ergibt sich das vorläufig bis n_{14} reichende Gleichungssystem:

$n_1 = n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = 6$, $n_6 = 9$, $n_7 = 14$, $n_8 = 33$, $n_9 = 37$, $n_{10} = 64$, $n_{11} = 112$, $n_{12} = 145$, $n_{13} = 250$, $n_{14} = 421$, welches bis incl. n_{13} auch nach topologischen Untersuchungen der Wirklichkeit entspricht. Ebenso hat sich das bereits bei der topologischen Feststellung aller fünfzehngliedrigen stabilen Knotengruppen erhaltene Resultat, dass bis zur Umlaufszahl: $u = 2^{10}$ höchstens siebzehngliedrige stabile Knotengruppen auftreten, deren zugehörige Primzahlen nur für

$$u = 861, \quad P = V^2UVU^2V^5UVUV^3,$$
$$u = 951, \quad P = V^2U^3VUVU^2VU^4V^2$$

gemäss den Gleichungen:

$$D_5 = 1^2010^21^50101^3 = 108503 \quad (Z_9 = 332)$$
$$D_5 = 1^20^31010^210^41^2 = 100931 \quad (Z_9 = 418)$$

über 100.000 liegen, nunmehr durch directe Bestimmung der den Primzahlen 16411 bis 99991 dyadisch coordinirten Zahlen als richtig herausgestellt.[1]

Die Einbeziehung weiterer Primzahlen erschien um so weniger nothwendig, als gemäss den einleitenden Bemerkungen schon die Reihe der ungeraden Zahlen bis 1024 neun Zahlen erster Ordnung, ferner je 120 Zahlen zweiter und vierter Ordnung, 252 Zahlen dritter und zehn Zahlen fünfter Ordnung, nämlich:

$341 = 101010101$, $597 = 10^21010101$, $661 = 1010^210101$,
$677 = 101010^2101$, $681 = 10101010^21$, $683 = 101010101^2$,
$685 = 1010101^201$, $693 = 10101^20101$, $725 = 101^2010101$,
$853 = 1^201010101$

umfasst, welch' letzteren sich nach den Resultaten der vorliegenden Arbeit noch:

---

[1] Anlässlich zweier am 20. und 23 September 1887 in der mathematischen Section der 60. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Wiesbaden abgehaltener topologischer Vorträge hat Dr. Simony, wie aus seinen diesbezüglichen mir zur Einsicht überlassenen Rechnungen hervorgeht, die zu 861 und 951 gehörigen topologischen Primzahlen, sowie jene von 2047, nämlich:

$$D_6 = 10^21^301^20^21010^21^2 = 161363 \; (Z_{11} = 1421)$$
$$D_7 = 1010^21010^410101^2 = 169003 \; (Z_{13} = 1296)$$

mittelst der charakteristischen Exponenten aller dyadischen Coordinirten von 861, 951 und 2047 direct arithmetisch controlirt, wonach meinerseits weitere Proberechnungen überflüssig gewesen wären.

$1109 = 10^3 1010101$, $1173 = 10^2 10^2 10101$, $1189 = 10^2 1010^2 101$,
$1193 = 10^2 101010^2 1$, $1205 = 10^2 101^2 0101$, $1237 = 10^2 1^2 010101$,
$1317 = 1010^2 10^2 101$, $1321 = 1010^2 1010^2 1$, $1323 = 1010^2 10101^2$,
$1325 = 1010^2 101^2 01$, $1333 = 1010^2 1^2 0101$, $1357 = 101010^2 1^2 01$,
$1363 = 10101010^2 1^2$, $1367 = 101010101^3$, $1387 = 10101^2 0101^2$,
$1397 = 10101^3 0101$, $1429 = 101^2 0^2 10101$, $1493 = 101^3 010101$,

sowie die einzige dyadisch eilfzifferige Zahl sechster Ordnung:

$$\frac{1}{3}(2^{12}-1) = 1365 = 10101010101$$

mit ausnahmslos unter 100.000 gelegenen topologischen Primzahlen anschliessen. Sollte mithin zwischen den dyadischen Exponenten ungerader Zahlen und jenen ihrer coordinirten topologischen Primzahlen irgend ein mathematisch präcisirbarer Zusammenhang bestehen, so dürften die betreffenden Formeln durch die hier mitgetheilten empirischen Resultate bereits ausreichend controlirt werden können.

Vermöge der vollen Übereinstimmung zweier umfangreicher Reihen speciell er Ergebnisse, welche scheinbar völlig heterogenen Forschungszweigen, der Lehre von den Primzahlen und jener von den möglichen Verschlingungen ringförmig geschlossener, aus gegenseitig undurchdringlichen Elementen bestehenden Gebilde angehören, gewinnt consequent die topologische Gliederung der Primzahlen in zwei Hauptgruppen von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ ein hervorragendes Interesse, welches auch eine selbstständige Zählung der Glieder beider Gruppen rechtfertigt.

Im Hinblicke hierauf enthält die nachstehende Exponententabelle der von 2^{14} bis 100.000 vorkommenden Primzahlen, welche behufs völliger Sicherung aller numerischer Angaben einerseits von dem Verfasser anderseits auf dessen Kosten von einem langjährigen Calculator des k. k. österr. Gradmessungs-Bureaus, Herrn J. Strobl, separat berechnet worden ist, die jeweiligen Anzahlen: z', z'' beider Zahlenformen bis zur nebenstehenden Zahl Z in gesonderter Numerirung, sowie schliesslich der neben jedem Bruchnenner: N angegebene Nenner: $\overline{N}$ des letzten Näherungsbruches eine directe Controle der Form von Z ermöglicht.

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	940	16411	●9, 2●2	31	83	—	951	16651	●5●4●●2	75	191	—	963	16921	●4●4, 2, 2●	157	221
—	941	16417	●8●4●	49	59	—	952	16657	●5●3●3●	129	163	—	964	16927	●4●4, 5	29	151
960	—	16421	●8●2●●●	68	107	974	—	16661	●5●3●●●●●	156	251	987	—	16931	●4●3●3, 2	110	249
961	—	16427	●8●●●●2	48	125	975	—	16673	●5●2●4●	128	155	988	—	16937	●4●3●●●●2●	214	295
962	—	16433	●8, 2, 3●	66	85	976	—	16691	●5●2, 2, 2, 2	114	275	989	—	16943	●4●3●●4	52	237
—	942	16447	●8, 6	9	55	—	953	16693	●5●2, 2●●●●	181	295	—	965	16963	●4●2●4, 2	109	241
963	—	16451	●7●4, 2	44	97	—	954	16699	●5●2, 3●2	87	241	990	—	16979	●4●2●●●●2, 2	166	395
—	943	16453	●7●3●●●	79	123	977	—	16703	●5●2, 6	20	127	—	966	16981	●4●2●●●●●●●●	269	435
—	944	16477	●7●●3●●	77	137	—	955	16729	●5●●●●2, 2●	205	291	—	967	16987	●4●2●●●2●2	143	389
964	—	16481	●7, 2, 4●	76	93	—	956	16741	●5●●2, 2●●●	191	303	—	968	16993	●4●2, 2, 4●	177	217
965	—	16487	●7, 2, 2, 3	42	143	—	957	16747	●5●●2●●●2	125	329	—	969	17011	●4●2, 3, 2, 2	131	319
966	—	16493	●7, 2●2●●	92	159	—	958	16759	●5●●3●3	59	223	991	—	17021	●4●2, 5●●	108	199
—	945	16519	●6●4, 3	39	125	978	—	16763	●5●●4●2	72	203	992	—	17027	●4●●●5, 2	96	209
967	—	16529	●6●2●3●	116	147	979	—	16787	●5, 2, 2●2, 2	122	289	—	970	17029	●4●●●4●●●	175	271
968	—	16547	●6●●●3, 2	84	191	980	—	16811	●5, 2●●●●●2	134	351	993	—	17033	●4●●●3●2●	220	299
969	—	16553	●6●●●●●●2●	160	221	981	—	16823	●5, 2●2●3	70	261	—	971	17041	●4●●●2●3●	231	293
—	946	16561	●6●●2, 3●	129	167	982	—	16829	●5, 2●4●●	108	197	—	972	17047	●4●●●2●●3	107	383
—	947	16567	●6●●2●3	53	197	—	959	16831	●5, 2●6	19	127	—	973	17053	●4●●●2, 3●●	197	349
—	948	16573	●6●●4●●	83	151	—	960	16843	●5, 3, 2●●2	107	277	—	974	17077	●4●●●●2●●●●	275	449
—	949	16603	●6, 2●2●2	81	221	983	—	16871	●5, 4, 2, 3	56	193	994	—	17093	●4●●2, 3●●●	218	341
970	—	16607	●6, 2●5	22	125	—	961	16879	●5, 4●4	31	149	995	—	17099	●4●●2, 2●●2	162	419
971	—	16619	●6, 3●●●2	80	211	984	—	16883	●5, 5, 2, 2	68	167	—	975	17107	●4●●2●●2, 2	173	413
972	—	16631	●6, 4●3	36	137	985	—	16889	●5, 6, 2●	80	117	996	—	17117	●4●●2●3●●	184	329
—	950	16633	●6, 5, 2●	79	115	986	—	16901	●4●6●●●	88	135	997	—	17123	●4●●3, 3, 2	128	295
973	—	16649	●5●4●2●	116	157	—	962	16903	●4●6, 3	41	129	—	976	17137	●4●●4, 3●	161	211

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
998	—	17159	●4, 2, 5, 3	60	191	1009	—	17393	●4, 6, 3●	98	129	—	1005	17623	●3●2, 2●●●3	127	461
—	977	17167	●4, 2, 4, 4	49	207	—	991	17401	●4, 7, 2●	77	113	1020	—	17627	●3●2, 2●2●2	174	475
999	—	17183	●4, 2, 3, 5	38	201	1010	—	17417	●3●6●2●	112	151	1021	—	17657	●3●2, 5, 2●	164	239
1000	—	17189	●4, 2, 2●2●●●	244	385	—	992	17419	●3●6●●2	73	185	—	1006	17659	●3●2, 5●2	89	253
—	978	17191	●4, 2, 2●2, 3	103	347	—	993	17431	●3●5●●3	63	223	1022	—	17669	●3●●●5●●●	172	265
—	979	17203	●4, 2, 2, 2, 2, 2	157	379	—	994	17443	●3●4●3, 2	111	251	1023	—	17681	●3●●●3●3●	246	311
1001	—	17207	●4, 2, 2, 2●3	92	341	—	995	17449	●3●4●●●2●	217	299	—	1007	17683	●3●●●3●2, 2	181	427
—	980	17209	●4, 2, 2, 3, 2●	211	303	—	996	17467	●3●4, 3●2	101	279	—	1008	17707	●3●●●2●●●●2	227	593
1002	—	17231	●4, 2●●2, 4	70	307	1011	—	17471	●3●4, 6	24	149	—	1009	17713	●3●●●2, 2, 3●	301	389
—	981	17239	●4, 2●●●●●3	113	409	1012	—	17477	●3●3●3●●●	206	321	1024	—	17729	●3●●●●●●5●	208	245
—	982	17257	●4, 2●2●●2●	263	365	1013	—	17483	●3●3●2●●2	158	407	—	1010	17737	●3●●●●●2●2●	365	499
1003	—	17291	●4, 3, 3●●2	122	313	1014	—	17489	●3●3●●●3●	244	311	1025	—	17747	●3●●●●●●●●2, 2	254	605
—	983	17293	●4, 3, 3, 2●●	175	297	—	997	17491	●3●3●●●2, 2	177	421	—	1011	17749	●3●●●●●●●●●●●●	411	665
—	984	17299	●4, 3, 2●2, 2	143	339	—	998	17497	●3●3●●2, 2●	263	373	—	1012	17761	●3●●●●2, 4●	263	323
—	985	17317	●4, 3●●2●●●	227	359	—	999	17509	●3●3, 2, 2●●●	253	401	1026	—	17783	●3●●●●3●3	106	401
1004	—	17321	●4, 3●●●●2●	248	343	1015	—	17519	●3●3, 2●4	62	291	1027	—	17789	●3●●●●5●●	152	281
1005	—	17327	●4, 3●●●4	58	269	—	1000	17539	●3●2●5, 2	109	237	—	1013	17791	●3●●●●7	23	175
1006	—	17333	●4, 3●2●●●●	216	353	—	1001	17551	●3●2●3, 4	71	303	1028	—	17807	●3●●2, 3, 4	78	335
—	986	17341	●4, 3●4●●	121	221	—	1002	17569	●3●2●●●4●	241	293	—	1014	17827	●3●●2●●3, 2	197	449
1007	—	17351	●4, 4, 3, 3	68	225	1016	—	17573	●3●2●●●2●●●	326	515	1029	—	17837	●3●●2●●●2●●	316	545
—	987	17359	●4, 4, 2, 4	47	209	1017	—	17579	●3●2●●●●●●●2	222	581	—	1015	17839	●3●●2●●●4	87	403
—	988	17377	●4, 5, 4●	109	135	—	1003	17581	●3●2●●●●●2●●	307	529	—	1016	17851	●3●●2●3●2	151	421
—	989	17383	●4, 5, 2, 3	57	197	1018	—	17597	●3●2●●4●●	184	335	—	1017	17863	●3●●3, 3, 3	105	347
1008	—	17387	●4, 5●●●2	88	233	—	1004	17599	●3●2●●6	33	217	—	1018	17881	●3●●3●2, 2●	269	383
—	990	17389	●4, 5●2●●	119	207	1019	—	17609	●3●2, 2, 2●2●	306	419	1030	—	17891	●3●●4, 3, 2	132	305

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1031	—	17903	●3●●4●4	50	241	—	1031	18121	●3, 2●2, 2●2●	319	437	1054	—	18329	●3, 4, 2, 2, 2●	224	317
1032	—	17909	●3●●5●●●●	168	277	—	1032	18127	●3, 2●2, 2, 4	83	367	1055	—	18341	●3, 4●●2●●●	232	367
—	1019	17911	●3●●5●3	59	227	1044	—	18131	●3, 2●2●●2, 2	214	511	1056	—	18353	●3, 4●2, 3●	198	257
1033	—	17921	●3, 2, 8●	76	85	—	1033	18133	●3, 2●2●●●●●●	345	559	—	1046	18367	●3, 4●6	21	143
—	1020	17923	●3, 2, 7, 2	67	143	1045	—	18143	●3, 2●2●5	48	275	1057	—	18371	●3, 5, 4, 2	88	197
—	1021	17929	●3, 2, 5●2●	165	223	1046	—	18149	●3, 2●3, 2●●●	266	423	—	1047	18379	●3, 5, 2●●2	113	293
1034	—	17939	●3, 2, 4●2, 2	138	325	—	1034	18169	●3, 2●5, 2●	161	235	—	1048	18397	●3, 5●3●●	121	217
1035	—	17957	●3, 2, 3●2●●●	262	413	—	1035	18181	●3, 3, 5●●●	151	233	1058	—	18401	●3, 6, 4●	104	129
—	1022	17959	●3, 2, 3●2, 3	111	373	1047	—	18191	●3, 3, 4, 4	56	237	1059	—	18413	●3, 6●2●●	112	195
—	1023	17971	●3, 2, 3, 2, 2, 2	173	417	—	1036	18199	●3, 3, 3●●3	99	353	—	1049	18427	●3, 8●2	37	107
—	1024	17977	●3, 2, 3, 3, 2●	235	337	—	1037	18211	●3, 3, 2●3, 2	159	361	—	1050	18433	●2● 10 ●	43	47
1036	—	17981	●3, 2, 3, 4●●	164	297	—	1038	18217	●3, 3, 2●●●2●	305	421	—	1051	18439	●2●8, 3	35	109
1037	—	17987	●3, 2, 2●4, 2	146	323	—	1039	18223	●3, 3, 2●●4	73	335	1060	—	18443	●2●7●●2	66	167
—	1025	17989	●3, 2, 2●3●●●	261	407	—	1040	18229	●3, 3, 2, 2●●●●	279	455	—	1052	18451	●2●6●2, 2	89	209
—	1026	18013	●3, 2, 2●●3●●	243	433	1048	—	18233	●3, 3, 2, 3, 2●	236	339	—	1053	18457	●2●6, 2, 2●	143	201
1038	—	18041	●3, 2, 2, 4, 2●	216	313	1049	—	18251	●3, 3●●2●●2	184	475	1061	—	18461	●2●6, 3●●	112	197
—	1027	18043	●3, 2, 2, 4●2	119	335	—	1041	18253	●3, 3●●2, 2●●	261	445	—	1054	18481	●2●5, 2, 3●	173	223
1039	—	18047	●3, 2, 2, 7	22	163	1050	—	18257	●3, 3●●●●3●	278	355	—	1055	18493	●2●5, 4●●	119	215
—	1028	18049	●3, 2●●6●	145	167	1051	—	18269	●3, 3●●●3●●	218	389	1062	—	18503	●2●4●3, 3	88	287
1040	—	18059	●3, 2●●3●●2	180	461	1052	—	18287	●3, 3●2●4	64	303	—	1056	18517	●2●4●●●●●●●	279	451
—	1029	18061	●3, 2●●3, 2●●	259	439	—	1042	18289	●3, 3●3, 3●	209	273	1063	—	18521	●2●4●●2, 2●	256	363
1041	—	18077	●3, 2●●2, 3●●	250	443	—	1043	18301	●3, 3●5●●	115	213	—	1057	18523	●2●4●●2●2	149	405
1042	—	18089	●3, 2●●●●●●●2●	390	539	—	1044	18307	●3, 4, 5, 2	89	195	1064	—	18539	●2●4, 2●●●2	164	431
—	1030	18097	●3, 2●●●2, 3●	311	403	1053	—	18311	●3, 4, 4, 3	72	233	—	1058	18541	●2●4, 2●2●●	225	389
1043	—	18119	●3, 2●2, 3, 3	118	389	—	1045	18313	●3, 4, 3●2●	199	271	—	1059	18553	●2●4, 4, 2●	179	259

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1060	18583	●2●3●2●●3	125	447	1081	—	18911	●2●2, 3●5	48	277	—	1079	19183	●2●●●●3●4	83	397
1065	—	18587	●2●3●2, 2●2	178	481	—	1069	18913	●2●2, 4, 4●	203	251	—	1080	19207	●2●●2, 5, 3	97	309
1066	—	18593	●2●3●●●4●	246	299	1082	—	18917	●2●2, 4, 2●●●	262	417	1096	—	19211	●2●●2, 4●●2	176	449
1067	—	18617	●2●3●●3, 2●	276	397	—	1070	18919	●2●2, 4, 2, 3	107	369	—	1081	19213	●2●●2, 4, 2●●	255	431
—	1061	18637	●2●3, 2, 2, 2●●	283	483	1083	—	18947	●2●●●7, 2	84	179	—	1082	19219	●2●●2, 3●2, 2	219	517
—	1062	18661	●2●3, 3, 2●●●	275	437	1084	—	18959	●2●●●5, 4	62	259	—	1083	19231	●2●●2, 3, 5	61	323
1068	—	18671	●2●3, 3●4	64	305	—	1071	18973	●2●●●4, 3●●	215	379	—	1084	19237	●2●●2, 2●2●●●	391	617
—	1063	18679	●2●3, 4●3	79	301	—	1072	18979	●2●●●3●3, 2	193	437	—	1085	19249	●2●●2, 2, 2, 3●	355	459
—	1064	18691	●2●2●6, 2	101	217	1085	—	19001	●2●●●3, 3, 2●	302	433	1097	—	19259	●2●●2, 2, 3●2	190	527
1069	—	18701	●2●2●4, 2●●	228	385	—	1073	19009	●2●●●2●5●	229	269	—	1086	19267	●2●●2●●4, 2	197	437
1070	—	18713	●2●2●3, 2, 2●	310	437	1086	—	19013	●2●●●2●3●●●	338	527	—	1087	19273	●2●●2●●2●2●	419	573
1071	—	18719	●2●2●3, 5	56	295	1087	—	19031	●2●●●2●●●●3	178	643	1098	—	19289	●2●●2●●●2, 2●	426	605
1072	—	18731	●2●2●2●●●●2	250	653	1088	—	19037	●2●●●2●●3●●	316	563	1099	—	19301	●2●●2●2, 2●●●	390	619
1073	—	18743	●2●2●2, 2●3	138	511	—	1074	19051	●2●●●2, 2●●●2	265	697	—	1088	19309	●2●●2●2●2●●	347	601
1074	—	18749	●2●2●2, 4●●	220	399	—	1075	19069	●2●●●2, 5●●	185	341	1100	—	19319	●2●●2●3●3	118	447
—	1065	18757	●2●2●●●3●●●	339	529	1089	—	19073	●2●●●●●●6●	192	221	—	1089	19333	●2●●3, 4●●●	239	371
1075	—	18773	●2●2●●●●●●●●●	458	741	1090	—	19079	●2●●●●●●4, 3	134	431	1101	—	19373	●2●●3●●●2●●	324	559
—	1066	18787	●2●2●●2, 3, 2	227	521	—	1076	19081	●2●●●●●●3●2●	373	507	1102	—	19379	●2●●3●2, 2, 2	210	509
—	1067	18793	●2●2●●2●●2●	413	573	—	1077	19087	●2●●●●●●3, 4	105	449	—	1090	19381	●2●●3●2●●●●	331	541
1076	—	18797	●2●2●●2●2●●	346	599	1091	—	19121	●2●●●●●●●2, 3●	416	539	—	1091	19387	●2●●3●3●2	153	427
1077	—	18803	●2●2●●3, 2, 2	212	517	1092	—	19139	●2●●●●●2, 4, 2	206	459	1103	—	19391	●2●●3●6	32	217
1078	—	18839	●2●2, 2, 2●●3	152	545	—	1078	19141	●2●●●●●2, 3●●●	365	571	1104	—	19403	●2●●4, 2●●2	174	451
—	1068	18859	●2●2, 2●●●●●2	263	689	1093	—	19157	●2●●●●●2●●●●●●	466	755	—	1092	19417	●2●●4●2, 2●	259	369
1079	—	18869	●2●2, 2●2●●●●	374	611	1094	—	19163	●2●●●●●2●2●2	242	661	1105	—	19421	●2●●4●3●●	183	337
1080	—	18899	●2●2, 3●●2, 2	218	521	1095	—	19181	●2●●●●●3●2●●	314	545	—	1093	19423	●2●●4●5	39	227

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1106	—	19427	●2●●5, 3, 2	124	287	1117	—	19661	●2, 2, 2, 2, 2, 2●●	338	577	1128	—	19913	●2, 2●3, 2●2●	326	447
—	1094	19429	●2●●5, 2●●●	209	333	—	1108	19681	●2, 2, 2, 3, 4●	249	307	1129	—	19919	●2, 2●3, 2, 4	84	373
1107	—	19433	●2●●5●●2●	216	301	—	1109	19687	●2, 2, 2, 3, 2, 3	133	457	—	1122	19927	●2, 2●3●●●3	131	477
—	1095	19441	●2●●6, 3●	145	191	1118	—	19697	●2, 2, 2, 4, 3●	242	317	1130	—	19937	●2, 2●4, 4●	198	245
—	1096	19447	●2●●6●3	53	205	—	1110	19699	●2, 2, 2, 4, 2, 2	167	409	1131	—	19949	●2, 2●4●2●●	218	379
1108	—	19457	●2, 2, 9●	66	73	1119	—	19709	●2, 2, 2, 6●●	126	235	1132	—	19961	●2, 2●6, 2●	144	211
1109	—	19463	●2, 2, 7, 3	52	163	—	1111	19717	●2, 2●●5●●●	207	319	—	1123	19963	●2, 2●6●2	77	221
1110	—	19469	●2, 2, 6, 2●●	142	239	1120	—	19727	●2, 2●●4, 4	78	329	1133	—	19973	●2, 3, 6●●●	136	209
—	1097	19471	●2, 2, 6, 4	45	187	1121	—	19739	●2, 2●●3, 2●2	200	539	1134	—	19979	●2, 3, 5●●2	116	295
—	1098	19477	●2, 2, 5●●●●●●	211	339	1122	—	19751	●2, 2●●2●2, 3	166	559	1135	—	19991	●2, 3, 4●●3	96	341
—	1099	19483	●2, 2, 5, 2●2	121	325	—	1112	19753	●2, 2●●2●●●2●	437	603	—	1124	19993	●2, 3, 4, 2, 2●	235	331
—	1100	19489	●2, 2, 4●4●	183	221	—	1113	19759	●2, 2●●2●●4	105	481	1136	—	19997	●2, 3, 4, 3●●	182	321
—	1101	19501	●2, 2, 4●●2●●	245	421	1123	—	19763	●2, 2●●2, 2, 2, 2	254	613	—	1125	20011	●2, 3, 3●●●●●2	195	509
—	1102	19507	●2, 2, 4, 2, 2, 2	169	407	—	1114	19777	●2, 2●●●●5●	247	291	1137	—	20021	●2, 3, 3, 2●●●●	294	479
—	1103	19531	●2, 2, 3●2●●2	203	523	1124	—	19793	●2, 2●●●●●●3●	416	531	—	1126	20023	●2, 3, 3, 2●3	109	403
1111	—	19541	●2, 2, 3●●●●●●●●	368	595	—	1115	19801	●2, 2●●●●●2, 2●	443	629	—	1127	20029	●2, 3, 3, 4●●	175	317
—	1104	19543	●2, 2, 3●●●●●3	141	509	—	1116	19813	●2, 2●●●2, 2●●●	409	649	—	1128	20047	●2, 3, 2●2, 4	89	389
1112	—	19553	●2, 2, 3, 2, 4●	244	299	—	1117	19819	●2, 2●●●2●●●2	267	703	1138	—	20051	●2, 3, 2●●●2, 2	234	557
1113	—	19559	●2, 2, 3, 2, 2, 3	134	457	1125	—	19841	●2, 2●2, 6●	172	199	1139	—	20063	●2, 3, 2●●5	56	313
1114	—	19571	●2, 2, 3, 3, 2, 2	182	443	—	1118	19843	●2, 2●2, 5, 2	145	317	—	1129	20071	●2, 3, 2, 2, 2, 3	135	461
1115	—	19577	●2, 2, 3, 4, 2●	230	333	1126	—	19853	●2, 2●2, 3, 2●●	300	509	—	1130	20089	●2, 3, 2, 4, 2●	227	329
1116	—	19583	●2, 2, 3, 7	24	175	—	1119	19861	●2, 2●2, 2●●●●●	401	647	—	1131	20101	●2, 3●●4●●●	233	361
—	1105	19597	●2, 2, 2●3, 2●●	291	493	—	1120	19867	●2, 2●2, 2, 2●2	219	593	—	1132	20107	●2, 3●●3●●2	187	479
—	1106	19603	●2, 2, 2●2●2, 2	243	575	1127	—	19889	●2, 2●2●2, 3●	340	441	—	1133	20113	●2, 3●●2●3●	305	387
—	1107	19609	●2, 2, 2●2, 2, 2●	373	527	—	1121	19891	●2, 2●2●2, 2, 2	239	579	1140	—	20117	●2, 3●●2●●●●●	364	587

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1141	—	20123	●2, 3●●2, 2●2	200	541	—	1145	20359	●2, 5, 4, 3	67	217	1166	—	20639	●●●4●2, 5	48	257
1142	—	20129	●2, 3●●●●4●	272	331	1155	—	20369	●2, 5, 2●3●	188	239	—	1159	20641	●●●4●●●4●	223	271
—	1134	20143	●2, 3●●●●●4	95	439	—	1146	20389	●2, 5●●2●●●	213	337	1167	—	20663	●●●4●●2●3	110	409
1143	—	20147	●2, 3●●●2, 2, 2	226	547	1156	—	20393	●2, 5●●●●2●	232	321	1168	—	20681	●●●4, 2, 2●2●	290	397
—	1135	20149	●2, 3●●●2●●●●	357	583	1157	—	20399	●2, 5●●●4	54	251	1169	—	20693	●●●4, 2●●●●●●	318	515
—	1136	20161	●2, 3●2, 5●	193	229	—	1147	20407	●2, 5●2●3	73	273	—	1160	20707	●●●4, 3, 3, 2	149	343
—	1137	20173	●2, 3●2, 2, 2●●	291	497	1158	—	20411	●2, 5●3●2	92	257	1170	—	20717	●●●4, 3●2●●	222	385
1144	—	20177	●2, 3●2●●3●	304	389	—	1148	20431	●2, 6, 2, 4	41	183	—	1161	20719	●●●4, 3●4	59	281
1145	—	20183	●2, 3●2●●●3	134	487	1159	—	20441	●2, 6●2, 2●	148	211	—	1162	20731	●●●4, 5●2	87	247
1146	—	20201	●2, 3●3●●2●	284	395	—	1149	20443	●2, 6●2●2	85	233	—	1163	20743	●●●3●5, 3	81	257
1147	—	20219	●2, 3●5●2	88	251	1160	—	20477	●2, 10 ●●	34	65	1171	—	20747	●●●3●4●●2	148	377
1148	—	20231	●2, 4, 5, 3	68	217	—	1150	20479	●2, 12	3	37	—	1164	20749	●●●3●4, 2●●	215	363
—	1138	20233	●2, 4, 4●2●	191	259	1161	—	20483	●●●10, 2	32	67	1172	—	20753	●●●3●3●3●	254	321
1149	—	20249	●2, 4, 3, 2, 2●	236	333	1162	—	20507	●●●7, 2●2	72	193	1173	—	20759	●●●3●3●●3	120	427
1150	—	20261	●2, 4, 2●2●●●	268	423	—	1151	20509	●●●7, 3●●	95	167	1174	—	20771	●●●3●2●3, 2	198	449
—	1139	20269	●2, 4, 2●●2●●	255	439	—	1152	20521	●●●6●●●2●	175	241	—	1165	20773	●●●3●2●2●●●	343	541
—	1140	20287	●2, 4, 2, 6	29	187	—	1153	20533	●●●6, 2●●●●	169	275	1175	—	20789	●●●3●2, 2●●●●	354	577
1151	—	20297	●2, 4●●2●2●	280	383	1163	—	20543	●●●6, 6	20	123	1176	—	20807	●●●3●●●3, 3	142	465
—	1141	20323	●2, 4●2, 3, 2	151	347	1164	—	20549	●●●5●3●●●	174	271	—	1166	20809	●●●3●●●2●2●	387	529
1152	—	20327	●2, 4●2, 2, 3	106	363	—	1154	20551	●●●5●3, 3	77	251	1177	—	20849	●●●3●●3, 3●	292	381
1153	—	20333	●2, 4●2●2●●	228	395	—	1155	20563	●●●5●●●2, 2	151	359	—	1167	20857	●●●3●●4, 2●	253	367
—	1142	20341	●2, 4●3●●●●	215	353	—	1156	20593	●●●5, 3, 3●	179	233	1178	—	20873	●●●3, 2, 3●2●	308	419
—	1143	20347	●2, 4●4●2	93	263	—	1157	20599	●●●5, 3●3	71	267	1179	—	20879	●●●3, 2, 3, 4	86	369
—	1144	20353	●2, 5, 6●	99	115	—	1158	20611	●●●4●5, 2	99	215	—	1168	20887	●●●3, 2, 2●●3	147	527
1154	—	20357	●2, 5, 4●●●	150	233	1165	—	20627	●●●4●2●2, 2	178	421	1180	—	20897	●●●3, 2●●4●	280	341

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1169	20899	●●●3, 2●●3, 2	219	499	1193	—	21143	●●●2●●●2●●3	188	673	—	1194	21391	●●●2, 3, 3, 4	89	383
1181	—	20903	●●●3, 2●●2, 3	158	535	1194	—	21149	●●●2●●●2, 3●●	346	613	—	1195	21397	●●●2, 3, 2●●●●●	391	631
1182	—	20921	●●●3, 2●3, 2●	302	435	—	1182	21157	●●●2●●●●●2●●●	493	779	1206	—	21401	●●●2, 3, 2, 2, 2●	364	515
—	1170	20929	●●●3, 3, 5●	191	227	—	1183	21163	●●●2●●●●●●●●2	335	877	1207	—	21407	●●●2, 3, 2, 5	62	337
1183	—	20939	●●●3, 3, 2●●2	202	523	—	1184	21169	●●●2●●●●2, 3●	433	561	1208	—	21419	●●●2, 3●●●●●2	256	671
—	1171	20947	●●●3, 3●●2, 2	213	509	1195	—	21179	●●●2●●●●3●2	226	629	—	1196	21433	●●●2, 3●3, 2●	299	431
—	1172	20959	●●●3, 3●5	47	271	—	1185	21187	●●●2●●2, 4, 2	215	479	1209	—	21467	●●●2, 4●2●2	164	449
1184	—	20963	●●●3, 4, 3, 2	152	351	1196	—	21191	●●●2●●2, 3, 3	166	547	—	1197	21481	●●●2, 5●●2●	239	333
1185	—	20981	●●●3, 5●●●●	196	323	—	1186	21193	●●●2●●2, 2●2●	449	615	—	1198	21487	●●●2, 5●4	51	247
—	1173	20983	●●●3, 5●3	69	265	—	1187	21211	●●●2●●2●2●2	253	691	1210	—	21491	●●●2, 6, 2, 2	110	271
—	1174	21001	●●●2●5●2●	211	285	1197	—	21221	●●●2●●3, 2●●●	378	601	—	1199	21493	●●●2, 6●●●●	169	279
1186	—	21011	●●●2●4●2, 2	178	419	1198	—	21227	●●●2●●3●●●2	242	639	—	1200	21499	●●●2, 7●2	67	193
—	1175	21013	●●●2●4●●●●●	293	471	—	1188	21247	●●●2●●8	19	163	1211	—	21503	●●●2, 10	8	83
1187	—	21017	●●●2●4, 2, 2●	282	397	1199	—	21269	●●●2, 2, 3●●●●●	382	615	—	1201	21517	●●●●●6, 2●●	167	281
—	1176	21019	●●●2●4, 2●2	167	449	—	1189	21277	●●●2, 2, 3, 3●●	279	493	1212	—	21521	●●●●●5●3●	204	257
1188	—	21023	●●●2●4, 5	52	271	—	1190	21283	●●●2, 2, 2●3, 2	241	547	—	1202	21523	●●●●●5●2, 2	151	355
—	1177	21031	●●●2●3●2, 3	145	487	—	1191	21313	●●●2, 2●●5●	257	303	—	1203	21529	●●●●●5, 2, 2●	241	339
1189	—	21059	●●●2●2●4, 2	194	429	1200	—	21317	●●●2, 2●●3●●●	376	587	1213	—	21557	●●●●●4, 2●●●●	320	521
—	1178	21061	●●●2●2●3●●●	347	541	—	1192	21319	●●●2, 2●●3, 3	165	541	—	1204	21559	●●●●●4, 2●3	119	439
—	1179	21067	●●●2●2●2●●2	265	683	1201	—	21323	●●●2, 2●●2●●2	284	733	1214	—	21563	●●●●●4, 3●2	156	431
1190	—	21089	●●●2●2, 2, 4●	314	385	1202	—	21341	●●●2, 2●●●3●●	338	603	1215	—	21569	●●●●●3●5●	214	251
1191	—	21101	●●●2●2, 2●2●●	374	647	1203	—	21347	●●●2, 2●2, 3, 2	246	565	—	1205	21577	●●●●●3●2●2●	383	523
1192	—	21107	●●●2●2, 3, 2, 2	232	565	1204	—	21377	●●●2, 3, 6●	170	197	1216	—	21587	●●●●●3●●●2, 2	272	647
—	1180	21121	●●●2●●●6●	199	229	—	1193	21379	●●●2, 3, 5, 2	143	313	—	1206	21589	●●●●●3●●●●●●●	441	713
—	1181	21139	●●●2●●●2●2, 2	297	703	1205	—	21383	●●●2, 3, 4, 3	116	375	1217	—	21599	●●●●●3●●5	66	367

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1207	21601	●●●●●3, 2, 4●	293	359	1230	—	21851	●●●●●●●●●●●2●2	322	877	1243	—	22091	●●●●2, 2●2●●2	282	727
1218	—	21611	●●●●●3, 2●●●2	256	673	—	1220	21859	●●●●●●●●●2, 3, 2	301	691	—	1232	22093	●●●●2, 2●2, 2●●	401	683
—	1208	21613	●●●●●3, 2●2●●	351	607	1231	—	21863	●●●●●●●●●2, 2, 3	212	725	1244	—	22109	●●●●2, 2●●3●●	344	613
1219	—	21617	●●●●●3, 3, 3●	314	409	—	1221	21871	●●●●●●●●●2●4	123	581	—	1233	22111	●●●●2, 2●●5	75	419
1220	—	21647	●●●●●2●3, 4	108	461	1232	—	21881	●●●●●●●●●4, 2●	348	505	—	1234	22123	●●●●2, 2, 2●●●2	287	755
—	1209	21649	●●●●●2●2●3●	403	511	1233	—	21893	●●●●●●2, 4●●●	332	515	—	1235	22129	●●●●2, 2, 3, 3●	349	455
—	1210	21661	●●●●●2●2, 3●●	345	611	1234	—	21911	●●●●●●2, 2●●3	196	703	1245	—	22133	●●●●2, 2, 3●●●●	380	623
—	1211	21673	●●●●●2●●●●●●2●	545	753	1235	—	21929	●●●●●●2●●●●2●	546	755	—	1236	22147	●●●●2●●5, 2	173	377
1221	—	21683	●●●●●2●●2, 2, 2	308	745	—	1222	21937	●●●●●●2●2, 3●	431	559	—	1237	22153	●●●●2●●3●2●	395	537
1222	—	21701	●●●●●2, 2, 3●●●	392	613	—	1223	21943	●●●●●●2●2●3	175	653	1246	—	22157	●●●●2●●3, 2●●	364	617
1223	—	21713	●●●●●2, 2●●3●	434	555	—	1224	21961	●●●●●●3, 2●2●	415	569	—	1238	22159	●●●●2●●3, 4	111	475
—	1212	21727	●●●●●2, 2●5	71	405	1236	—	21977	●●●●●●3●2, 2●	394	561	—	1239	22171	●●●●2●●2, 2●2	271	733
1224	—	21737	●●●●●2, 3●●2●	418	581	—	1225	21991	●●●●●●4, 2, 3	133	459	—	1240	22189	●●●●2●●●●●2●●	467	805
—	1213	21739	●●●●●2, 3●●●2	255	673	—	1226	21997	●●●●●●4●2●●	279	485	1247	—	22193	●●●●2●●●2, 3●	436	565
—	1214	21751	●●●●●2, 4●3	113	431	—	1227	22003	●●●●●●5, 2, 2	159	391	1248	—	22229	●●●●2●2●●●●●●	482	781
—	1215	21757	●●●●●2, 6●●	155	289	1237	—	22013	●●●●●●7●●	112	211	1249	—	22247	●●●●2●3, 2, 3	152	523
1225	—	21767	●●●●●●●●5, 3	118	375	—	1228	22027	●●●●2, 5●●2	153	389	1250	—	22259	●●●●2●4, 2, 2	188	461
1226	—	21773	●●●●●●●●4, 2●●	312	527	1238	—	22031	●●●●2, 5, 4	70	293	1251	—	22271	●●●●2●8	18	157
—	1216	21787	●●●●●●●●3, 2●2	249	671	1239	—	22037	●●●●2, 4●●●●●	324	521	—	1241	22273	●●●●3, 7●	131	149
—	1217	21799	●●●●●●●●2●2, 3	207	697	—	1229	22039	●●●●2, 4●●3	127	451	1252	—	22277	●●●●3, 5●●●	208	321
1227	—	21803	●●●●●●●●2●●●●2	338	883	—	1230	22051	●●●●2, 3●3, 2	215	487	—	1242	22279	●●●●3, 5, 3	95	303
—	1218	21817	●●●●●●●●2, 3, 2●	427	613	—	1231	22063	●●●●2, 3●●4	101	461	1253	—	22283	●●●●3, 4●●2	172	439
1228	—	21821	●●●●●●●●2, 4●●	296	537	1240	—	22067	●●●●2, 3, 2, 2, 2	246	593	—	1243	22291	●●●●3, 3●2, 2	213	503
1229	—	21839	●●●●●●●●●●2, 4	144	631	1241	—	22073	●●●●2, 3, 3, 2●	334	479	—	1244	22303	●●●●3, 3, 5	59	313
—	1219	21841	●●●●●●●●●●●●●3●	521	665	1242	—	22079	●●●●2, 3, 6	44	277	1254	—	22307	●●●●3, 2●3, 2	218	495

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1255	—	22343	●●●●3●●3, 3	146	479	1268	—	22619	●●2, 4●●2●2	174	473	1283	—	22853	●●2, 2●●●3●●●	380	593
1256	—	22349	●●●●3●●2, 2●●	356	607	—	1257	22621	●●2, 4●●3●●	223	397	1284	—	22859	●●2, 2●●●2●●2	288	743
1257	—	22367	●●●●3●●●5	64	361	1269	—	22637	●●2, 4, 2●2●●	262	453	—	1267	22861	●●2, 2●●●2, 2●●	409	697
—	1245	22369	●●●●3●2, 4●	279	343	—	1258	22639	●●2, 4, 2●4	71	333	1285	—	22871	●●2, 2●●●●●●3	196	709
—	1246	22381	●●●●3●2●2●●	325	563	1270	—	22643	●●2, 4, 3, 2, 2	164	399	1286	—	22877	●●2, 2●●●●3●●	346	617
1258	—	22391	●●●●3●3●3	110	417	—	1259	22651	●●2, 4, 4●2	115	323	1287	—	22901	●●2, 2●●3●●●●	370	607
1259	—	22397	●●●●3●5●●	156	289	—	1260	22669	●●2, 3●3, 2●●	271	459	1288	—	22907	●●2, 2●●4●2	162	457
1260	—	22409	●●●●4, 3●2●	268	365	1271	—	22679	●●2, 3●2●●3	144	515	—	1268	22921	●●2, 2, 2, 3●2●	355	483
1261	—	22433	●●●●4●●4●	232	283	1272	—	22691	●●2, 3●●●3, 2	222	505	1289	—	22937	●●2, 2, 2, 2, 2, 2●	408	577
—	1247	22441	●●●●4●●●●2●	339	469	1273	—	22697	●●2, 3●●●●●2●	422	583	1290	—	22943	●●2, 2, 2, 2, 5	70	379
—	1248	22447	●●●●4●●●4	79	367	—	1261	22699	●●2, 3●●●●●●2	261	683	1291	—	22961	●●2, 2, 2●2, 3●	374	485
—	1249	22453	●●●●4●2●●●●	293	479	1274	—	22709	●●2, 3●●2●●●●	378	617	—	1269	22963	●●2, 2, 2●2, 2, 2	263	637
1262	—	22469	●●●●5, 3●●●	206	323	—	1262	22717	●●2, 3●●4●●	217	395	1292	—	22973	●●2, 2, 2●4●●	234	427
1263	—	22481	●●●●5●●3●	216	277	1275	—	22721	●●2, 3, 2, 5●	212	251	—	1270	22993	●●2, 2, 3●●3●	335	429
—	1250	22483	●●●●5●●2, 2	155	371	1276	—	22727	●●2, 3, 2, 3, 3	134	441	1293	—	23003	●●2, 2, 3●2●2	200	547
—	1251	22501	●●●●6, 2●●●	175	279	1277	—	22739	●●2, 3, 2●●2, 2	246	587	—	1271	23011	●●2, 2, 4, 3, 2	171	395
1264	—	22511	●●●●6●4	38	185	—	1263	22741	●●2, 3, 2●●●●●●	397	643	—	1272	23017	●●2, 2, 4●●2●	301	419
—	1252	22531	●●2, 9, 2	47	99	1278	—	22751	●●2, 3, 2●5	56	319	1294	—	23021	●●2, 2, 4●2●●	248	431
1265	—	22541	●●2, 7, 2●●	116	195	1279	—	22769	●●2, 3, 4, 3●	236	309	1295	—	23027	●●2, 2, 5, 2, 2	142	349
—	1253	22543	●●2, 7, 4	37	153	—	1264	22777	●●2, 3, 5, 2●	197	287	—	1273	23029	●●2, 2, 5●●●●	219	361
—	1254	22549	●●2, 6●●●●●	175	281	—	1265	22783	●●2, 3, 8	17	141	1296	—	23039	●●2, 2, 9	12	113
—	1255	22567	●●2, 5●2, 3	91	305	1280	—	22787	●●2, 2●6, 2	114	245	—	1274	23041	●●2●●8●	103	115
1266	—	22571	●●2, 5●●●●2	150	391	—	1266	22807	●●2, 2●3●●3	143	509	—	1275	23053	●●2●●5, 2●●	213	359
—	1256	22573	●●2, 5●●2●●	209	359	1281	—	22811	●●2, 2●3, 2●2	206	555	1297	—	23057	●●2●●4●3●	256	323
1267	—	22613	●●2, 4●●●●●●●	326	527	1282	—	22817	●●2, 2●2●4●	298	361	—	1276	23059	●●2●●4●2, 2	189	445

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1298	—	23063	●●2●●4●●3	122	433	1310	—	23327	●●2●2, 3, 5	64	339	1324	—	23603	●●3, 4, 2, 2, 2	164	395
—	1277	23071	●●2●●4, 5	55	287	1311	—	23333	●●2●2, 2●2●●●	410	647	1325	—	23609	●●3, 4, 3, 2●	224	321
1299	—	23081	●●2●●3●●●2●	404	557	1312	—	23339	●●2●2, 2●●●●2	282	737	—	1301	23623	●●3, 3●3, 3	113	369
1300	—	23087	●●2●●3●●4	98	447	1313	—	23357	●●2●2, 2, 4●●	244	443	1326	—	23627	●●3, 3●2●●2	196	505
1301	—	23099	●●2●●3, 3●2	184	509	1314	—	23369	●●2●2●●2●2●	438	599	—	1302	23629	●●3, 3●2, 2●●	279	475
1302	—	23117	●●2●●2●2, 2●●	394	671	—	1290	23371	●●2●2●●2●●2	277	715	1327	—	23633	●●3, 3●●●3●	302	385
—	1278	23131	●●2●●2●●2●2	265	721	1315	—	23399	●●2●2●2, 2, 3	168	575	1328	—	23663	●●3, 3, 2●4	76	357
—	1279	23143	●●2●●2, 2, 2, 3	179	611	1316	—	23417	●●2●2●4, 2●	272	395	1329	—	23669	●●3, 3, 3●●●●	274	449
1303	—	23159	●●2●●2, 3●3	136	513	—	1291	23431	●●2●3, 4, 3	111	359	—	1303	23671	●●3, 3, 3●3	99	373
—	1280	23167	●●2●●2, 7	31	229	1317	—	23447	●●2●3, 2●●3	144	517	—	1304	23677	●●3, 3, 5●●	145	267
—	1281	23173	●●2●●●●4●●●	317	491	1318	—	23459	●●2●3●●3, 2	210	479	1330	—	23687	●●3, 2●4, 3	108	347
1304	—	23189	●●2●●●●2●●●●●	498	803	—	1292	23473	●●2●3●2, 3●	309	401	—	1305	23689	●●3, 2●3●2●	301	409
—	1282	23197	●●2●●●●2, 3●●	355	629	—	1293	23497	●●2●4, 2●2●	285	391	—	1306	23719	●●3, 2●●●2, 3	163	551
1305	—	23201	●●2●●●●●●4●	374	455	—	1294	23509	●●2●4●●●●●●●	299	485	1331	—	23741	●●3, 2●●4●●	218	397
—	1283	23203	●●2●●●●●●3, 2	293	667	1319	—	23531	●●2●5●●●2	134	355	—	1307	23743	●●3, 2●●6	39	257
—	1284	23209	●●2●●●●●●●●2●	555	767	1320	—	23537	●●2●6, 3●	148	195	1332	—	23747	●●3, 2, 2, 4, 2	172	383
—	1285	23227	●●2●●●●●3●2	231	643	—	1295	23539	●●2●6, 2, 2	101	249	1333	—	23753	●●3, 2, 2, 2●2●	360	493
—	1286	23251	●●2●●●2●●2, 2	307	733	1321	—	23549	●●2●8●●	68	129	—	1308	23761	●●3, 2, 2●●3●	337	431
—	1287	23269	●●2●●●3, 2●●●	383	609	—	1296	23557	●●3, 7●●●	109	167	—	1309	23767	●●3, 2, 2●●●3	149	541
1306	—	23279	●●2●●●3●4	88	421	1322	—	23561	●●3, 6●2●	146	197	—	1310	23773	●●3, 2, 2●3●●	259	463
1307	—	23291	●●2●●●5●2	126	359	—	1297	23563	●●3, 6●●2	95	241	1334	—	23789	●●3, 2, 3●2●●	268	465
—	1288	23293	●●2●●●6●●	145	271	1323	—	23567	●●3, 6, 4	44	183	1335	—	23801	●●3, 2, 5, 2●	190	277
1308	—	23297	●●2●2, 7●	140	159	—	1298	23581	●●3, 5, 3●●	155	273	1336	—	23813	●●3●●5●●●	194	299
—	1289	23311	●●2●2, 4, 4	83	351	—	1299	23593	●●3, 4●●●2●	275	379	1337	—	23819	●●3●●4●●2	162	413
1309	—	23321	●●2●2, 3, 2, 2●	358	505	—	1300	23599	●●3, 4●●4	67	305	—	1311	23827	●●3●●3●2, 2	203	479

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1338	—	23831	●●3●●3●●3	130	463	—	1328	24061	●●3●7●●	79	149	1359	—	24317	●●4●6●●	86	161
—	1312	23833	●●3●●3, 2, 2●	317	447	1347	—	24071	●●4, 6, 3	56	177	1360	—	24329	●●5, 4●2●	160	217
—	1313	23857	●●3●●2, 2, 3●	335	433	1348	—	24077	●●4, 5, 2●●	150	253	—	1341	24337	●●5, 3●3●	173	219
—	1314	23869	●●3●●2, 4●●	221	401	1349	—	24083	●●4, 4●2, 2	132	311	1361	—	24359	●●5, 2●2, 3	94	317
1339	—	23873	●●3●●●●●5●	230	271	—	1329	24091	●●4, 4, 2●2	123	331	1362	—	24371	●●5, 2, 2, 2, 2	142	343
1340	—	23879	●●3●●●●●3, 3	148	485	—	1330	24097	●●4, 3●4●	181	219	—	1342	24373	●●5, 2, 2●●●●	225	367
—	1315	23887	●●3●●●●●2, 4	107	469	—	1331	24103	●●4, 3●2, 3	105	353	—	1343	24379	●●5, 2, 3●2	107	297
—	1316	23893	●●3●●●●●●●●●●●●	453	733	1350	—	24107	●●4, 3●●●●2	172	449	—	1344	24391	●●5●●3, 3	85	279
—	1317	23899	●●3●●●●●●2●2	239	651	—	1332	24109	●●4, 3●●2●●	239	411	1363	—	24407	●●5●●●●●3	98	355
1341	—	23909	●●3●●●●2, 2●●●	380	603	1351	—	24113	●●4, 3, 2, 3●	230	297	1364	—	24413	●●5●●●3●●	172	307
—	1318	23911	●●3●●●●2, 2, 3	157	537	—	1333	24121	●●4, 3, 3, 2●	221	317	1365	—	24419	●●5●2, 3, 2	124	285
—	1319	23917	●●3●●●●2●2●●	339	587	—	1334	24133	●●4, 2●3●●●	243	379	—	1345	24421	●●5●2, 2●●●	211	335
—	1320	23929	●●3●●●●4, 2●	257	373	1352	—	24137	●●4, 2●2●2●	292	399	—	1346	24439	●●5●3●3	63	239
1342	—	23957	●●3●2, 2●●●●●	370	597	—	1335	24151	●●4, 2●●●●3	127	459	1366	—	24443	●●5●4●2	76	215
—	1321	23971	●●3●2●●3, 2	211	481	—	1336	24169	●●4, 2, 2●●2●	305	423	—	1347	24469	●●6, 2●●●●●	179	289
—	1322	23977	●●3●2●●●●●2●	397	549	1353	—	24179	●●4, 2, 3, 2, 2	158	385	1367	—	24473	●●6, 2, 2, 2●	166	235
1343	—	23981	●●3●2●●●●2●●	338	583	—	1337	24181	●●4, 2, 3●●●●	247	405	—	1348	24481	●●6●●4●	127	155
1344	—	23993	●●3●2●3, 2●	288	415	1354	—	24197	●●4●●4●●●	202	313	—	1349	24499	●●6●2, 2, 2	101	245
—	1323	24001	●●3●3, 5●	179	213	1355	—	24203	●●4●●3●●2	162	415	1368	—	24509	●●6●4●●	88	161
—	1324	24007	●●3●3, 3, 3	111	367	—	1338	24223	●●4●●2, 5	51	275	—	1350	24517	●●7, 3●●●	109	171
—	1325	24019	●●3●3●●2, 2	197	471	—	1339	24229	●●4●●●●2●●●	317	501	1369	—	24527	●●7, 2, 4	32	143
1345	—	24023	●●3●3●●●3	120	437	1356	—	24239	●●4●●●●●4	82	379	1370	—	24533	●●7●●●●●●●	130	211
1346	—	24029	●●3●3●3●●	206	369	—	1340	24247	●●4●●●2●3	113	421	—	1351	24547	●●8, 3, 2	53	123
—	1326	24043	●●3●4●●●2	147	389	1357	—	24251	●●4●●●3●2	144	401	1371	—	24551	●●8, 2, 3	36	125
—	1327	24049	●●3●5, 3●	165	217	1358	—	24281	●●4●2●2, 2●	272	387	—	1352	24571	●●10●2	23	67

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1372	—	24593	2, 8●3●	74	93
1373	—	24611	2, 7●3, 2	66	149
1374	—	24623	2, 7●●4	32	145
—	1353	24631	2, 7, 2●3	47	173
1375	—	24659	2, 6●●●2, 2	114	271
1376	—	24671	2, 6●●5	28	155
1377	—	24677	2, 6, 2, 2●●●	166	263
1378	—	24683	2, 6, 2●●●2	110	289
—	1354	24691	2, 6, 3, 2, 2	95	231
—	1355	24697	2, 6, 4, 2●	121	175
—	1356	24709	2, 5●4●●●	139	215
—	1357	24733	2, 5●2, 3●●	161	285
1379	—	24749	2, 5●●●●2●●	220	379
—	1358	24763	2, 5●●3●2	109	303
1380	—	24767	2, 5●●6	24	157
—	1359	24781	2, 5, 2, 2, 2●●	201	343
—	1360	24793	2, 5, 2●2, 2●	223	317
—	1361	24799	2, 5, 2●5	35	199
1381	—	24809	2, 5, 3●●2●	208	289
1382	—	24821	2, 5, 4●●●●	160	263
—	1362	24841	2, 4●4●2●	181	245
—	1363	24847	2, 4●4, 4	53	223
1383	—	24851	2, 4●3●2, 2	148	349
—	1364	24859	2, 4●3, 2●2	137	369
—	1365	24877	2, 4●2●●2●●	261	449

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1366	24889	2, 4●2, 3, 2●	239	343
—	1367	24907	2, 4●●●2●●2	195	503
1384	—	24917	2, 4●●●●●●●●●	348	563
—	1368	24919	2, 4●●●●●●3	133	481
1385	—	24923	2, 4●●●●2●2	184	501
—	1369	24943	2, 4●●2●4	71	335
1386	—	24953	2, 4●●4, 2●	202	293
—	1370	24967	2, 4, 2, 4, 3	89	287
1387	—	24971	2, 4, 2, 3●●2	158	405
1388	—	24977	2, 4, 2, 2●3●	256	325
—	1371	24979	2, 4, 2, 2●2, 2	187	443
1389	—	24989	2, 4, 2, 2, 3●●	216	383
1390	—	25013	2, 4, 2●2●●●●	292	477
1391	—	25031	2, 4, 3, 3, 3	96	317
—	1372	25033	2, 4, 3, 2●2●	259	355
1392	—	25037	2, 4, 3, 2, 2●●	230	393
—	1373	25057	2, 4, 4, 4●	161	199
1393	—	25073	2, 4, 5, 3●	150	197
—	1374	25087	2, 4, 9	9	83
1394	—	25097	2, 3●5●2●	174	235
—	1375	25111	2, 3●4●●3	95	337
—	1376	25117	2, 3●4, 3●●	181	319
1395	—	25121	2, 3●3●4●	206	249
1396	—	25127	2, 3●3●2, 3	120	403
—	1377	25147	2, 3●3, 3●2	145	401

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1378	25153	2, 3●2●5●	195	229
1397	—	25163	2, 3●2●2●●2	220	567
1398	—	25169	2, 3●2●●●3●	338	431
—	1379	25171	2, 3●2●●●2, 2	245	583
—	1380	25183	2, 3●2●●5	59	329
—	1381	25189	2, 3●2, 2, 2●●●	345	547
—	1382	25219	2, 3●●●5, 2	141	307
1399	—	25229	2, 3●●●3, 2●●	298	505
—	1383	25237	2, 3●●●2●●●●●	405	653
—	1384	25243	2, 3●●●2, 2●2	223	603
1400	—	25247	2, 3●●●2, 5	66	355
1401	—	25253	2, 3●●●●●2●●●	412	651
—	1385	25261	2, 3●●●●●●2●●	387	667
1402	—	25301	2, 3●●2●●●●●●	408	661
—	1386	25303	2, 3●●2●●●3	155	563
1403	—	25307	2, 3●●2●2●2	212	579
—	1387	25309	2, 3●●2●3●●	269	481
—	1388	25321	2, 3●●3●●2●	333	463
—	1389	25339	2, 3●●5●2	105	299
1404	—	25343	2, 3●●8	16	137
1405	—	25349	2, 3, 2. 5●●●	190	293
—	1390	25357	2, 3, 2, 4, 2●●	229	387
1406	—	25367	2, 3, 2, 3●●3	126	449
1407	—	25373	2, 3, 2, 3, 3●●	236	417
1408	—	25391	2, 3, 2, 2●●4	94	431

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1409	—	25409	2, 3, 2●●5●	218	257	—	1404	25657	2, 2●4, 3, 2●	245	351	1433	—	25919	2, 2●●●2, 6	50	319
—	1391	25411	2, 3, 2●●4, 2	179	397	1421	—	25667	2, 2●3●4, 2	158	349	1434	—	25931	2, 2●●●●●2●●2	312	805
—	1392	25423	2, 3, 2●●2, 4	101	443	1422	—	25673	2, 2●3●2●2●	342	467	—	1417	25933	2, 2●●●●●2, 2●●	443	755
1410	—	25439	2, 3, 2●●●5	62	349	1423	—	25679	2, 2●3●2, 4	92	401	—	1418	25939	2, 2●●●●●●●2, 2	343	817
—	1393	25447	2, 3, 2●2, 2, 3	147	503	—	1405	25693	2, 2●3●●3●●	269	479	1435	—	25943	2, 2●●●●●●●●3	212	767
—	1394	25453	2, 3, 2●2●2●●	317	549	1424	—	25703	2, 2●3, 2, 2, 3	144	491	—	1419	25951	2, 2●●●●●●5	81	455
1411	—	25457	2, 3, 2●3, 3●	278	363	—	1406	25717	2, 2●3, 3●●●●	307	503	—	1420	25969	2, 2●●●●3, 3●	367	479
1412	—	25463	2, 3, 2●3●3	108	409	1425	—	25733	2, 2●2●4●●●	272	421	—	1421	25981	2, 2●●●●5●●	205	379
1413	—	25469	2, 3, 2●5●●	154	285	—	1407	25741	2, 2●2●3, 2●●	317	537	1436	—	25997	2, 2●●2, 3, 2●●	346	587
—	1395	25471	2, 3, 2●7	23	177	—	1408	25747	2, 2●2●2●2, 2	265	627	—	1422	25999	2, 2●●2, 3, 4	105	451
1414	—	25523	2, 3, 3●2, 2, 2	196	475	—	1409	25759	2, 2●2●2, 5	71	381	1437	—	26003	2, 2●●2, 2●2, 2	284	673
—	1396	25537	2, 3, 4, 5●	157	187	1426	—	25763	2, 2●2●●●3, 2	258	587	—	1423	26017	2, 2●●2●●4●	339	413
1415	—	25541	2, 3, 4, 3●●●	224	351	—	1410	25771	2, 2●2●●●●●●●2	303	793	1438	—	26021	2, 2●●2●●2●●●	456	721
—	1397	25561	2, 3, 4●2, 2●	245	349	1427	—	25793	2, 2●2, 2, 5●	244	289	—	1424	26029	2, 2●●2●●●2●●	425	733
1416	—	25577	2, 3, 5●●2●	206	287	1428	—	25799	2, 2●2, 2, 3, 3	154	507	—	1425	26041	2, 2●●2●3, 2●	363	523
—	1398	25579	2, 3, 5●●●2	125	331	—	1411	25801	2, 2●2, 2, 2●2●	417	571	—	1426	26053	2, 2●●3, 3●●●	325	509
1417	—	25583	2, 3, 5●4	44	213	—	1412	25819	2, 2●2, 2●2●2	237	647	—	1427	26083	2, 2●●4, 3, 2	177	409
1418	—	25589	2, 3, 6●●●●	146	241	1429	—	25841	2, 2●2, 4, 3●	268	351	1439	—	26099	2, 2●●5, 2, 2	146	359
1419	—	25601	2, 2●9●	68	75	1430	—	25847	2, 2●2, 4●3	102	389	—	1428	26107	2, 2●●6●2	91	261
—	1399	25603	2, 2●8, 2	61	129	—	1413	25849	2, 2●2, 5, 2●	223	325	1440	—	26111	2, 2●●9	12	115
—	1400	25609	2, 2●6●2●	155	209	—	1414	25867	2, 2●●●4●●2	195	497	—	1429	26113	2, 2, 2, 8●	101	113
—	1401	25621	2, 2●5●●●●●	221	355	—	1415	25873	2, 2●●●3●3●	333	421	—	1430	26119	2, 2, 2, 6, 3	77	243
—	1402	25633	2, 2●4●4●	193	233	1431	—	25889	2, 2●●●2●4●	326	395	1441	—	26141	2, 2, 2, 4, 3●●	224	395
—	1403	25639	2, 2●4●2, 3	113	379	—	1416	25903	2, 2●●●2●●4	119	545	1442	—	26153	2, 2, 2, 3●●●2●	388	535
1420	—	25643	2, 2●4●●●●2	186	485	1432	—	25913	2, 2●●●2, 3, 2●	388	557	—	1431	26161	2, 2, 2, 3, 2, 3●	323	417

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1443	—	26171	2, 2, 2, 3, 3●2	176	487
1444	—	26177	2, 2, 2, 2●5●	234	275
1445	—	26183	2, 2, 2, 2●3, 3	152	497
1446	—	26189	2, 2, 2, 2●2, 2●●	374	637
—	1432	26203	2, 2, 2, 2●●2●2	251	683
—	1433	26209	2, 2, 2, 2, 2, 4●	309	379
—	1434	26227	2, 2, 2, 2, 3, 2, 2	227	553
1447	—	26237	2, 2, 2, 2, 5●●	186	343
1448	—	26249	2, 2, 2●●3●2●	370	503
—	1435	26251	2, 2, 2●●3●●2	237	607
1449	—	26261	2, 2, 2●●2●●●●●	462	745
—	1436	26263	2, 2, 2●●2●●3	179	641
1450	—	26267	2, 2, 2●●2, 2●2	254	687
—	1437	26293	2, 2, 2●●●2●●●●	455	743
1451	—	26297	2, 2, 2●●●3, 2●	380	547
1452	—	26309	2, 2, 2●2, 3●●●	356	557
—	1438	26317	2, 2, 2●2, 2, 2●●	373	637
1453	—	26321	2, 2, 2●2●●3●	390	499
1454	—	26339	2, 2, 2●3, 3, 2	206	475
—	1439	26347	2, 2, 2●3●●●2	223	589
1455	—	26357	2, 2, 2●4●●●●	274	451
—	1440	26371	2, 2, 3, 6, 2	107	231
1456	—	26387	2, 2, 3, 3●2, 2	202	477
1457	—	26393	2, 2, 3, 3, 2, 2●	314	443
1458	—	26399	2, 2, 3, 3, 5	56	297

z'	z''	Z	Exponenten	N	N
—	1441	26407	2, 2, 3, 2●2, 3	151	509
1459	—	26417	2, 2, 3, 2, 2, 3●	324	419
1460	—	26423	2, 2, 3, 2, 2●3	134	497
—	1442	26431	2, 2, 3, 2, 6	39	251
—	1443	26437	2, 2, 3●●3●●●	317	495
—	1444	26449	2, 2, 3●●●●3●	361	461
1461	—	26459	2, 2, 3●●●2●2	222	605
—	1445	26479	2, 2, 3●2●4	83	393
1462	—	26489	2, 2, 3●4, 2●	232	337
—	1446	26497	2, 2, 4, 6●	137	159
1463	—	26501	2, 2, 4, 4●●●	208	323
1464	—	26513	2, 2, 4, 2●3●	262	333
—	1447	26539	2, 2, 4●●●●●2	201	527
—	1448	26557	2, 2, 4●4●●	157	287
1465	—	26561	2, 2, 5, 5●	140	167
1466	—	26573	2, 2, 5, 2, 2●●	204	349
1467	—	26591	2, 2, 5●5	32	187
1468	—	26597	2, 2, 6, 2●●●	170	271
1469	—	26627	2●●9, 2	48	101
1470	—	26633	2●●7●2●	124	167
—	1449	26641	2●●6●3●	147	185
—	1450	26647	2●●6●●3	71	251
1471	—	26669	2●●5●●2●●	216	371
1472	—	26681	2●●5, 3, 2●	206	295
—	1451	26683	2●●5, 3●2	117	323

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1473	—	26687	2●●5, 6	28	173
1474	—	26693	2●●4●3●●●	242	377
1475	—	26699	2●●4●2●●2	186	479
—	1452	26701	2●●4●2, 2●●	265	451
1476	—	26711	2●●4●●●●3	130	469
—	1453	26713	2●●4●●2, 2●	311	441
1477	—	26717	2●●4●●3●●	232	413
1478	—	26723	2●●4, 2, 3, 2	176	403
1479	—	26729	2●●4, 2●●2●	324	449
—	1454	26731	2●●4, 2●●●2	199	523
—	1455	26737	2●●4, 3, 3●	245	319
1480	—	26759	2●●3●4, 3	110	353
1481	—	26777	2●●3●2, 2, 2●	366	517
1482	—	26783	2●●3●2, 5	64	343
1483	—	26801	2●●3●●2, 3●	356	461
1484	—	26813	2●●3●●4●●	228	415
—	1456	26821	2●●3, 2, 3●●●	323	505
—	1457	26833	2●●3, 2●●3●	359	459
—	1458	26839	2●●3, 2●●●3	159	577
1485	—	26849	2●●3, 3, 4●	254	313
1486	—	26861	2●●3, 3●2●●	290	503
—	1459	26863	2●●3, 3●4	77	367
1487	—	26879	2●●3, 8	18	149
—	1460	26881	2●●2●7●	139	157
1488	—	26891	2●●2●4●●2	188	479

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1461	26893	2●●2●4, 2●●	273	461	1501	—	27143	2●●●●6, 3	86	271	—	1487	27457	2●●●2●●5●	279	329
1489	—	26903	2●●2●3●●3	152	541	1502	—	27179	2●●●●3●●●●2	274	715	1513	—	27479	2●●●2●●●●●3	208	753
1490	—	26921	2●●2●2●●●2●	482	665	1503	—	27191	2●●●●3, 2●3	154	569	—	1488	27481	2●●●2●●●2, 2●	495	703
1491	—	26927	2●●2●2●●4	116	531	1504	—	27197	2●●●●3, 4●●	248	449	—	1489	27487	2●●●2●●●5	79	445
—	1462	26947	2●●2●●●4, 2	227	503	—	1474	27211	2●●●●2●2●●2	303	781	1514	—	27509	2●●●2●3●●●●	382	627
1492	—	26951	2●●2●●●3, 3	178	583	1505	—	27239	2●●●●2, 2, 2, 3	196	669	1515	—	27527	2●●●3, 4, 3	124	401
—	1463	26953	2●●2●●●2●2●	485	663	—	1475	27241	2●●●●2, 2●●2●	507	703	—	1490	27529	2●●●3, 3●2●	343	467
—	1464	26959	2●●2●●●2, 4	129	565	—	1476	27253	2●●●●2, 3●●●●	413	677	1516	—	27539	2●●●3, 2●2, 2	256	607
1493	—	26981	2●●2●●2, 2●●●	462	733	—	1477	27259	2●●●●2, 4●2	183	515	—	1491	27541	2●●●3, 2●●●●●	417	673
1494	—	26987	2●●2●●2●●●2	302	795	—	1478	27271	2●●●●●●4, 3	157	505	1517	—	27551	2●●●3, 2, 5	66	359
1495	—	26993	2●●2●●3, 3●	364	475	—	1479	27277	2●●●●●●3, 2●●	403	683	1518	—	27581	2●●●3●4●●	214	391
1496	—	27011	2●●2, 2, 5, 2	168	367	1506	—	27281	2●●●●●●2●3●	458	581	—	1492	27583	2●●●3●6	37	251
1497	—	27017	2●●2, 2, 3●2●	380	517	—	1480	27283	2●●●●●●2●2, 2	335	793	1519	—	27611	2●●●4●2●2	172	471
—	1465	27031	2●●2, 2, 2●●3	181	649	1507	—	27299	2●●●●●●●●3, 2	322	733	1520	—	27617	2●●●5, 4●	188	233
—	1466	27043	2●●2, 2●●3, 2	269	613	1508	—	27329	2●●●●●2, 5●	296	351	—	1493	27631	2●●●5●4	53	257
1498	—	27059	2●●2, 2●2, 2, 2	282	683	—	1481	27337	2●●●●●2, 2●2●	503	689	1521	—	27647	2●●●10	8	85
—	1467	27061	2●●2, 2●2●●●●●	445	727	—	1482	27361	2●●●●●3, 4●	325	401	1522	—	27653	2●2, 7●●●	126	193
—	1468	27067	2●●2, 2●3●2	207	577	—	1483	27367	2●●●●●3, 2, 3	173	595	—	1494	27673	2●2, 5, 2, 2●	231	325
—	1469	27073	2●●2, 3, 5●	233	277	—	1484	27397	2●●●2, 5●●●	247	381	1523	—	27689	2●2, 4●●●2●	320	441
1499	—	27077	2●●2, 3, 3●●●	334	523	1509	—	27407	2●●●2, 4, 4	92	389	—	1495	27691	2●2, 4●●●●2	199	519
—	1470	27091	2●●2, 3●●2, 2	259	619	—	1485	27409	2●●●2, 3●3●	347	439	—	1496	27697	2●2, 4, 2, 3●	269	347
—	1471	27103	2●●2, 3●5	57	329	—	1486	27427	2●●●2, 2●3, 2	263	597	1524	—	27701	2●2, 4, 2●●●●	304	495
1500	—	27107	2●●2, 4, 3, 2	184	425	1510	—	27431	2●●●2, 2●2, 3	192	647	—	1497	27733	2●2, 3●●●●●●●●	415	671
—	1472	27109	2●●2, 4, 2●●●	311	495	1511	—	27437	2●●●2, 2●●2●●	434	747	1525	—	27737	2●2, 3●●2, 2●	380	539
—	1473	27127	2●●2, 5●3	83	319	1512	—	27449	2●●●2, 2, 3, 2●	392	563	—	1498	27739	2●2, 3●●2●2	221	601

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1526	—	27743	2●2, 3●●5	62	345	1540	—	27953	2●2●●2, 2, 3●	400	517	—	1524	28219	2●3, 3, 3●2	155	429
1527	—	27749	2●2, 3, 2, 2●●●	364	577	—	1510	27961	2●2●●2, 3, 2●	381	547	1551	—	28229	2●3, 2●3●●●	302	471
—	1499	27751	2●2, 3, 2, 2, 3	151	515	—	1511	27967	2●2●●2, 6	49	313	1552	—	28277	2●3, 2, 3●●●●	308	505
—	1500	27763	2●2, 3, 3, 2, 2	205	499	1541	—	27983	2●2●●●●2, 4	128	561	—	1525	28279	2●3, 2, 3●3	111	419
1528	—	27767	2●2, 3, 3●3	116	437	—	1512	27997	2●2●●●●●●3●●	365	651	1553	—	28283	2●3, 2, 4●2	136	383
1529	—	27773	2●2, 3, 5●●	170	313	1542	—	28001	2●2●●●2, 4●	346	425	1554	—	28289	2●3●●6●	164	189
1530	—	27779	2●2, 2●5, 2	154	335	1543	—	28019	2●2●●●3, 2, 2	248	605	—	1526	28297	2●3●●3●2●	317	431
1531	—	27791	2●2, 2●3, 4	100	427	—	1513	28027	2●2●●●4●2	169	477	1555	—	28307	2●3●●2●2, 2	242	573
—	1501	27793	2●2, 2●2●3●	373	473	1544	—	28031	2●2●●●7	30	229	—	1527	28309	2●3●●2●●●●●	395	637
—	1502	27799	2●2, 2●2●●3	173	619	—	1514	28051	2●2●2, 2●2, 2	273	647	1556	—	28319	2●3●●2, 5	64	345
1532	—	27803	2●2, 2●2, 2●2	246	665	—	1515	28057	2●2●2, 2, 2, 2●	415	587	1557	—	28349	2●3●●●4●●	220	401
1533	—	27809	2●2, 2●●●4●	338	411	—	1516	28069	2●2●2●●2●●●	437	691	—	1528	28351	2●3●●●6	39	259
—	1503	27817	2●2, 2●●●●●2●	503	695	—	1517	28081	2●2●2●2, 3●	377	489	—	1529	28387	2●3●3, 3, 2	173	399
—	1504	27823	2●2, 2●●●●4	119	549	—	1518	28087	2●2●2●2●3	153	571	—	1530	28393	2●3●3●●2●	307	427
1534	—	27827	2●2, 2●●2, 2, 2	284	687	1545	—	28097	2●2●3, 5●	216	257	1558	—	28403	2●3●4, 2, 2	148	363
—	1505	27847	2●2, 2, 2, 3, 3	157	517	—	1519	28099	2●2●3, 4, 2	175	391	1559	—	28409	2●3●5, 2●	176	257
1535	—	27851	2●2, 2, 2, 2●●2	268	693	1546	—	28109	2●2●3, 2, 2●●	320	547	—	1531	28411	2●3●5●2	95	271
—	1506	27883	2●2, 2, 3●●●2	233	615	—	1520	28111	2●2●3, 2, 4	93	413	—	1532	28429	2●4, 4, 2●●	191	323
1536	—	27893	2●2, 2, 4●●●●	290	477	—	1521	28123	2●2●3●2●2	197	539	1560	—	28433	2●4, 3●3●	222	281
—	1507	27901	2●2, 2, 6●●	141	263	1547	—	28151	2●2●5●3	74	285	1561	—	28439	2●4, 3●●3	104	371
1537	—	27917	2●2●●4, 2●●	280	473	1548	—	28163	2●3, 7, 2	80	171	—	1533	28447	2●4, 3, 5	45	239
—	1508	27919	2●2●●4, 4	87	367	1549	—	28181	2●3, 4●●●●●	268	431	1562	—	28463	2●4, 2●●4	76	349
1538	—	27941	2●2●●2●2●●●	438	691	—	1522	28183	2●3, 4●●3	105	373	—	1534	28477	2●4, 2, 4●●	169	307
—	1509	27943	2●2●●2●2, 3	185	623	—	1523	28201	2●3, 3●●●2●	343	473	1563	—	28493	2●4●●2, 2●●	268	457
1539	—	27947	2●2●●2●●●●2	302	789	1550	—	28211	2●3, 3, 2, 2, 2	202	487	1564	—	28499	2●4●●●●2, 2	206	491

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1535	28513	2●4●2, 4●	209	257	1576	—	28697	3, 7, 2, 2●	116	163	1584	—	28949	3, 3●3●●●●●	284	457
1565	—	28517	2●4●2, 2●●●	274	435	1577	—	28703	3, 7, 5	22	113	1585	—	28961	3, 3●2●4●	232	281
—	1536	28537	2●4●4, 2●	181	263	—	1549	28711	3, 6●2, 3	63	211	1586	—	28979	3, 3●2, 2, 2, 2	206	497
1566	—	28541	2●4●5●●	116	215	—	1550	28723	3, 6, 2, 2, 2	101	243	1587	—	29009	3, 3●●●●●3●	344	439
1567	—	28547	2●5, 5, 2	88	193	—	1551	28729	3, 6, 3, 2●	139	199	—	1566	29017	3, 3●●●●2, 2●	367	521
—	1537	28549	2●5, 4●●●	159	247	1578	—	28751	3, 5●2, 4	54	235	1588	—	29021	3, 3●●●●3●●	272	485
1568	—	28559	2●5, 3, 4	54	233	—	1552	28753	3, 5●●●3●	197	251	—	1567	29023	3, 3●●●●5	59	331
1569	—	28571	2●5, 2, 2●2	128	347	—	1553	28759	3, 5●●●●3	89	321	1589	—	29027	3, 3●●2, 3, 2	200	459
—	1538	28573	2●5, 2, 3●●	165	293	—	1554	28771	3, 5, 2, 3, 2	121	277	1590	—	29033	3, 3●●2●●2●	364	505
—	1539	28579	2●5●●3, 2	131	299	—	1555	28789	3, 5, 3●●●●	185	303	—	1568	29059	3, 3, 2, 5, 2	125	273
—	1540	28591	2●5●●●4	57	265	1579	—	28793	3, 5, 4, 2●	150	217	1591	—	29063	3, 3, 2, 4, 3	102	329
—	1541	28597	2●5●2●●●●	211	345	—	1556	28807	3, 4●4, 3	77	247	—	1569	29077	3. 3, 2, 2●●●●●	349	563
—	1542	28603	2●5●3●2	97	271	—	1557	28813	3, 4●3. 2●●	199	337	—	1570	29101	3, 3, 2●●●2●●	323	557
1570	—	28607	2●5●6	20	137	1580	—	28817	3, 4●2●3●	228	289	1592	—	29123	3, 3, 3, 4, 2	142	317
1571	—	28619	2●6, 2●●2	106	275	—	1558	28837	3. 4●●●2●●●	283	447	1593	—	29129	3, 3. 3, 2●2●	294	403
—	1543	28621	2●6, 2, 2●●	149	255	—	1559	28843	3, 4●●●●●●2	193	505	—	1571	29131	3, 3, 3, 2●●2	185	479
—	1544	28627	2●6●●2, 2	109	261	1581	—	28859	3, 4●●3●2	132	367	—	1572	29137	3, 3, 3●●3●	271	347
1572	—	28631	2●6●●●3	66	241	—	1560	28867	3, 4, 2, 4, 2	129	287	1594	—	29147	3, 3, 3●2●2	162	443
1573	—	28643	2●7, 3, 2	72	167	1582	—	28871	3, 4, 2, 3, 3	100	329	1595	—	29153	3, 3, 4, 4●	182	225
1574	—	28649	2●7●●2●	124	173	—	1561	28879	3, 4, 2, 2, 4	71	313	—	1573	29167	3, 3, 4●4	53	255
—	1545	28657	2●8, 3●	81	107	1583	—	28901	3, 4, 3, 2●●●	236	375	—	1574	29173	3, 3, 5●●●●	179	295
1575	—	28661	2●8●●●●	84	139	—	1562	28909	3, 4, 3●2●●	207	359	—	1575	29179	3, 3, 6●2	73	209
—	1546	28663	2●8●3	29	113	—	1563	28921	3, 4, 5, 2●	149	217	—	1576	29191	3, 2●6, 3	67	211
—	1547	28669	2●10●●	35	67	—	1564	28927	3, 4, 8	13	107	1596	—	29201	3, 2●4●3●	218	275
—	1548	28687	3, 8, 4	25	103	—	1565	28933	3, 3●5●●●	163	251	1597	—	29207	3, 2●4●●3	104	369

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1577	29209	3, 2●4, 2, 2●	255	359	1611	—	29453	3, 2, 2, 4, 2●●	242	409	1625	—	29759	3●●4, 6	32	199
—	1578	29221	3, 2●3●2●●●	309	487	—	1589	29473	3, 2, 2, 2●4●	273	331	—	1600	29761	3●●3●5●	185	217
1598	—	29231	3, 2●3●●4	84	383	1612	—	29483	3, 2, 2, 2●●●●2	256	669	1626	—	29789	3●●3●●3●●	260	463
1599	—	29243	3, 2●3, 3●2	158	437	1613	—	29501	3, 2, 2, 2, 4●●	222	403	—	1601	29803	3●●3, 2●●●2	221	581
—	1579	29251	3, 2●2●4, 2	175	387	—	1590	29527	3, 2, 2●●●●●●3	171	619	1627	—	29819	3●●3, 4●2	132	371
—	1580	29269	3, 2●2●●●●●●●●	431	697	1614	—	29531	3, 2, 2●●●2●2	236	643	—	1602	29833	3●●2●3●2●	329	447
—	1581	29287	3, 2●2, 2, 2, 3	155	529	1615	—	29537	3, 2, 2●2, 4●	284	349	1628	—	29837	3●●2●3, 2●●	304	515
1600	—	29297	3, 2●2, 3, 3●	300	391	1616	—	29567	3, 2, 2●7	24	185	—	1603	29851	3●●2●2, 2●2	229	619
1601	—	29303	3, 2●2, 3●3	118	445	—	1591	29569	3, 2, 3, 6●	151	175	—	1604	29863	3●●2●●●2, 3	179	605
—	1582	29311	3, 2●2, 7	27	199	1617	—	29573	3, 2, 3, 4●●●	230	357	1629	—	29867	3●●2●●●●●●●2	290	759
1602	—	29327	3, 2●●●3, 4	98	419	—	1592	29581	3, 2, 3, 3, 2●●	261	443	1630	—	29873	3●●2●●2, 3●	376	487
1603	—	29333	3, 2●●●2●●●●●●	436	703	—	1593	29587	3, 2, 3, 2●2, 2	213	505	1631	—	29879	3●●2●●2●3	154	573
1604	—	29339	3, 2●●●2, 2●2	240	649	—	1594	29599	3, 2, 3, 2, 5	55	299	—	1605	29881	3●●2●●3, 2●	351	505
—	1583	29347	3, 2●●●●●3, 2	257	585	—	1595	29611	3, 2, 3●●●●●●2	227	595	—	1606	29917	3●●2, 2●3●●	287	513
1605	—	29363	3, 2●●●●2, 2, 2	274	663	—	1596	29629	3, 2, 3●4●●	179	327	1632	—	29921	3●●2, 3, 4●	262	323
—	1584	29383	3, 2●●2, 3, 3	149	491	1618	—	29633	3, 2, 4, 5●	162	193	1633	—	29927	3●●2, 3, 2, 3	140	481
1606	—	29387	3, 2●●2, 2●●2	254	657	—	1597	29641	3, 2, 4, 2●2●	269	369	—	1607	29947	3●●2, 5●2	115	327
—	1585	29389	3, 2●●2, 2, 2●●	359	613	1619	—	29663	3, 2, 4●5	38	221	—	1608	29959	3●●●●5, 3	101	321
1607	—	29399	3, 2●●2●●●3	166	603	1620	—	29669	3, 2, 5, 2●●●	204	325	—	1609	29983	3●●●●3, 5	65	343
—	1586	29401	3, 2●●2●2, 2●	393	559	—	1598	29671	3, 2, 5, 2, 3	83	287	—	1610	29989	3●●●●2●2●●●	419	661
1608	—	29411	3, 2●●3, 3, 2	200	461	—	1599	29683	3, 2, 6, 2, 2	97	239	1634	—	30011	3●●●●2, 3●2	206	571
1609	—	29423	3, 2●●3●4	78	373	1621	—	29717	3●●5●●●●●	216	347	—	1611	30013	3●●●●2, 4●●	253	459
1610	—	29429	3, 2●●4●●●●	268	441	1622	—	29723	3●●5, 2●2	124	333	1635	—	30029	3●●●●●●●2, 2●●	416	709
—	1587	29437	3, 2●●6●●	129	241	1623	—	29741	3●●4●●2●●	252	433	1636	—	30047	3●●●●●●●●5	76	427
—	1588	29443	3, 2, 2, 6, 2	109	235	1624	—	29753	3●●4, 3, 2●	238	341	1637	—	30059	3●●●●●●2●●●2	286	753

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1638	—	30071	3●●●●●3●3	134	507	—	1627	30307	3●2, 2, 2, 3, 2	215	493	—	1640	30577	3●3●3, 3●	235	307
1639	—	30089	3●●●2, 3●2●	352	479	—	1628	30313	3●2, 2, 2●●2●	393	545	1660	—	30593	3●4, 6●	118	137
—	1612	30091	3●●●2, 3●●2	225	577	—	1629	30319	3●2, 2, 2●4	89	419	—	1641	30631	3●4●●2, 3	107	363
—	1613	30097	3●●●2, 2●3●	363	461	1648	—	30323	3●2, 2, 3, 2, 2	204	497	—	1642	30637	3●4●●●2●●	237	409
—	1614	30103	3●●●2, 2●●3	167	599	1649	—	30341	3●2●●4●●●	264	409	—	1643	30643	3●4●2, 2, 2	153	371
—	1615	30109	3●●●2, 2, 3●●	305	541	1650	—	30347	3●2●●3●●2	212	543	—	1644	30649	3●4●3, 2●	199	287
1640	—	30113	3●●●2●●4●	316	385	—	1630	30367	3●2●●2, 5	67	361	—	1645	30661	3●5, 3●●●	169	265
1641	—	30119	3●●●2●●2, 3	178	603	1651	—	30389	3●2●●●2●●●●	406	663	1661	—	30671	3●5, 2, 4	50	223
—	1616	30133	3●●●2●2●●●●	407	665	—	1631	30391	3●2●●●2●3	149	555	1662	—	30677	3●5●●●●●●	204	331
1642	—	30137	3●●●2●3, 2●	338	487	—	1632	30403	3●2●2, 4, 2	179	399	1663	—	30689	3●6, 4●	112	139
—	1617	30139	3●●●2●3●2	189	527	—	1633	30427	3●2●2●2●2	209	571	—	1646	30697	3●6●●2●	147	205
1643	—	30161	3●●●3●●3●	324	415	1652	—	30431	3●2●2●5	56	321	—	1647	30703	3●6●4	31	151
—	1618	30169	3●●●3●2, 2●	335	477	1653	—	30449	3●2●4, 3●	228	299	1664	—	30707	3●7, 2, 2	66	163
—	1619	30181	3●●●4, 2●●●	277	441	1654	—	30467	3●3, 6, 2	94	203	1665	—	30713	3●8, 2●	74	109
—	1620	30187	3●●●4●●●2	175	463	—	1634	30469	3●3, 5●●●	173	267	—	1648	30727	4, 8, 3	33	103
1644	—	30197	3●●●5●●●●	208	343	1655	—	30491	3●3, 3, 2●2	162	437	—	1649	30757	4, 5●2●●●	167	263
1645	—	30203	3●●●6●2	84	241	—	1635	30493	3●3, 3, 3●●	211	373	—	1650	30763	4, 5●●●●2	117	305
—	1621	30211	3●2, 7, 2	81	173	1656	—	30497	3●3, 2●4●	230	279	1666	—	30773	4, 5, 2●●●●	180	293
—	1622	30223	3●2, 5, 4	59	247	1657	—	30509	3●3, 2●●2●●	298	513	—	1651	30781	4, 5, 4●●	109	197
—	1623	30241	3●2, 3●4●	229	277	—	1636	30517	3●3, 2, 2●●●●	317	517	1667	—	30803	4, 4●●●2, 2	156	371
—	1624	30253	3●2, 3●●2●●	303	521	—	1637	30529	3●3●●5●	189	223	1668	—	30809	4, 4●●2, 2●	232	329
—	1625	30259	3●2, 3, 2, 2, 2	207	499	1658	—	30539	3●3●●2●●2	208	537	—	1652	30817	4, 4, 2, 4●	169	207
1646	—	30269	3●2, 3, 4●●	196	355	—	1638	30553	3●3●●●2, 2●	333	473	—	1653	30829	4, 4, 2●2●●	203	351
—	1626	30271	3●2, 3, 6	37	233	1659	—	30557	3●3●●●3●●	246	439	1669	—	30839	4, 4, 3●3	72	271
1647	—	30293	3●2, 2●●●●●●●	426	689	—	1639	30559	3●3●●●5	53	299	—	1654	30841	4, 4, 4, 2●	161	233

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1670	—	30851	4, 3●5, 2	98	213	1683	—	31121	4, 2, 2, 2●3●	278	353	—	1679	31321	4●●2●●2, 2●	339	481
—	1655	30853	4, 3●4●●●	179	277	—	1667	31123	4, 2, 2, 2●2, 2	203	481	—	1680	31327	4●●2●●5	55	307
—	1656	30859	4, 3●3●●2	145	371	1684	—	31139	4, 2, 2●●3, 2	190	433	—	1681	31333	4●●2, 2, 2●●●	321	509
1671	—	30869	4, 3●2●●●●●	286	461	—	1668	31147	4, 2, 2●●●●●2	221	579	1696	—	31337	4●●2, 2●●2●	344	477
—	1657	30871	4, 3●2●●3	111	397	1685	—	31151	4, 2, 2●●●4	84	389	—	1682	31357	4●●2, 5●●	147	271
1672	—	30881	4, 3●●●4●	218	265	—	1669	31153	4, 2, 2●2, 3●	283	367	1697	—	31379	4●●●●2●2, 2	226	535
1673	—	30893	4, 3●●●●2●●	278	479	—	1670	31159	4, 2, 2●2●3	115	429	—	1683	31387	4●●●●2, 2●2	203	549
1674	—	30911	4, 3●●6	30	197	—	1671	31177	4, 2, 3, 2●2●	275	377	1698	—	31391	4●●●●2, 5	60	323
—	1658	30931	4, 3, 2●●2, 2	189	451	1686	—	31181	4, 2, 3, 2, 2●●	244	417	—	1684	31393	4●●●●●●●4●	277	337
—	1659	30937	4, 3, 2●2, 2●	275	391	—	1672	31183	4, 2, 3, 2, 4	71	315	1699	—	31397	4●●●●●●●2●●●	374	591
1675	—	30941	4, 3, 2●3●●	202	361	—	1673	31189	4, 2, 3●●●●●●	293	475	1700	—	31469	4●●●3●2●●	246	427
—	1660	30949	4, 3, 3, 2●●●	241	383	1687	—	31193	4, 2, 3●2, 2●	262	373	—	1685	31477	4●●●4●●●●	223	367
1676	—	30971	4, 3, 5●2	82	233	—	1674	31219	4, 2, 5, 2, 2	107	263	1701	—	31481	4●●●5, 2●	172	251
1677	—	30977	4, 2●7●	100	113	1688	—	31223	4, 2, 5●3	58	223	—	1686	31489	4●2, 7●	103	117
1678	—	30983	4, 2●5, 3	74	235	—	1675	31231	4, 2, 9	9	85	1702	—	31511	4●2, 3●●3	108	385
1679	—	31013	4, 2●2●2●●●	310	489	—	1676	31237	4●●6●●●	127	195	—	1687	31513	4●2, 3, 2, 2●	263	371
1680	—	31019	4, 2●2●●●●2	214	559	1689	—	31247	4●●5, 4	50	209	1703	—	31517	4●2, 3, 3●●	202	357
—	1661	31033	4, 2●2, 3, 2●	271	389	—	1677	31249	4●●4●3●	191	241	—	1688	31531	4●2, 2●●●●2	207	541
—	1662	31039	4, 2●2, 6	35	223	1690	—	31253	4●●4●●●●●	232	373	1704	—	31541	4●2, 2, 2●●●●	306	499
—	1663	31051	4, 2●●●2●●2	219	565	1691	—	31259	4●●4, 2●2	132	355	—	1689	31543	4●2, 2, 2●3	113	419
—	1664	31063	4, 2●●●●●●3	149	539	—	1678	31267	4●●3●3, 2	155	351	1705	—	31547	4●2, 2, 3●2	146	405
—	1665	31069	4, 2●●●●3●●	263	469	1692	—	31271	4●●3●2, 3	114	383	—	1690	31567	4●2●●2, 4	85	373
1681	—	31079	4, 2●●2, 2, 3	136	465	1693	—	31277	4●●3●●2●●	260	447	—	1691	31573	4●2●●●●●●●●●	359	581
—	1666	31081	4, 2●●2●●2●	351	487	1694	—	31307	4●●2●2●●2	206	531	1706	—	31583	4●2●●●5	52	293
1682	—	31091	4, 2●●3, 2, 2	180	439	1695	—	31319	4●●2●●●●3	142	513	1707	—	31601	4●2●3, 3●	232	303

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1708	—	31607	4●2●3●3	90	341	—	1703	31891	5, 2●2●2, 2	161	381	—	1714	32173	5●2●●●2●●	229	395
—	1692	31627	4●3, 3●●2	143	367	1722	—	31907	5, 2●●●3, 2	156	355	1736	—	32183	5●2●2●3	86	321
1709	—	31643	4●3, 2, 2●2	148	401	—	1704	31957	5, 2, 2●●●●●●●	271	439	1737	—	32189	5●2●4●●	132	241
1710	—	31649	4●3●●4●	196	239	—	1705	31963	5, 2, 2●2●2	141	385	—	1715	32191	5●2●6	23	155
—	1693	31657	4●3●●●●●2●	287	397	1723	—	31973	5, 2, 3, 2●●●	212	337	—	1716	32203	5●3, 2●●2	127	329
—	1694	31663	4●3●●●4	67	311	—	1706	31981	5, 2, 3●2●●	185	321	1738	—	32213	5●3●●●●●●●	214	347
1711	—	31667	4●3●2, 2, 2	158	383	1724	—	31991	5, 2, 4●3	60	229	—	1717	32233	5●4●●2●	163	227
—	1695	31687	4●4, 3, 3	77	255	1725	—	32003	5●●6, 2	72	155	1739	—	32237	5●4●2●●	134	233
—	1696	31699	4●4●●2, 2	135	323	1726	—	32009	5●●4●2●	172	233	—	1718	32251	5●6●2	47	135
1712	—	31721	4●5●●2●	160	223	1727	—	32027	5●●3, 2●2	128	345	—	1719	32257	6, 8●	49	55
—	1697	31723	4●5●●●2	97	257	—	1707	32029	5●●3, 3●●	167	295	1740	—	32261	6, 6●●●	80	123
1713	—	31727	4●5●4	34	165	1728	—	32051	5●●2, 2, 2, 2	162	391	1741	—	32297	6, 3●●●2●	182	251
—	1698	31729	4●6, 3●	107	141	1729	—	32057	5●●2, 3, 2●	218	313	—	1720	32299	6, 3●●●●2	113	295
—	1699	31741	4●8●●	49	93	—	1708	32059	5●●2, 3●2	123	341	1742	—	32303	6, 3●●4	44	201
1714	—	31751	5, 7, 3	36	113	1730	—	32063	5●●2, 6	28	179	1743	—	32309	6, 3, 2●●●●	170	277
1715	—	31769	5, 5, 2, 2●	140	197	1731	—	32069	5●●●●3●●●	230	359	1744	—	32321	6, 2●5●	108	127
—	1700	31771	5, 5, 2●2	83	223	—	1709	32077	5●●●●2, 2●●	247	421	—	1721	32323	6, 2●4, 2	89	197
1716	—	31793	5, 4, 2, 3●	162	209	—	1710	32083	5●●●●●●●2, 2	191	455	1745	—	32327	6, 2●3, 3	70	229
1717	—	31799	5, 4, 2●3	68	251	—	1711	32089	5●●●●●2, 2●	281	399	—	1722	32341	6, 2●●●●●●●	217	351
1718	—	31817	5, 3●2●2●	216	295	1732	—	32099	5●●●2, 3, 2	152	349	—	1723	32353	6, 2, 2, 4●	141	173
1719	—	31847	5, 3, 2, 2, 3	90	307	1733	—	32117	5●●●3●●●●	220	361	—	1724	32359	6, 2, 2, 2, 3	77	263
—	1701	31849	5, 3, 2●●2●	233	323	—	1712	32119	5●●●3●3	79	299	1746	—	32363	6, 2, 2●●●2	122	321
1720	—	31859	5, 3, 3, 2, 2	122	297	1734	—	32141	5●2, 3, 2●●	188	319	1747	—	32369	6, 2, 3, 3●	148	193
—	1702	31873	5, 2●6●	107	123	—	1713	32143	5●2, 3, 4	57	245	—	1725	32371	6, 2, 3, 2, 2	103	251
1721	—	31883	5, 2●3●●2	134	343	1735	—	32159	5●2, 2, 5	40	217	—	1726	32377	6, 2, 4, 2●	129	187

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1748	—	32381	6, 2, 5●●	84	155	—	1739	32611	7●2, 3, 2	77	177	1772	—	32909	●7●3, 2●●	114	193
—	1727	32401	6●●2●3●	171	217	1761	—	32621	7●2●2●●	116	201	—	1753	32911	●7●3, 4	35	149
1749	—	32411	6●●2, 2●2	112	303	1762	—	32633	7●4, 2●	86	125	—	1754	32917	●7●2●●●●●	157	253
—	1728	32413	6●●2, 3●●	145	257	—	1740	32647	8, 4, 3	33	107	1773	—	32933	●7●●●2●●●	164	259
1750	—	32423	6●●●●2, 3	86	291	—	1741	32653	8, 3, 2●●	83	141	1774	—	32939	●7●●●●●●2	112	293
1751	—	32429	6●●●●●●2●●	192	331	1763	—	32687	8●●●4	26	121	—	1755	32941	●7●●●●2●●	155	267
1752	—	32441	6●●●3, 2●	166	239	1764	—	32693	8●2●●●●	96	157	1775	—	32957	●7●●4●●	94	171
—	1729	32443	6●●●3●2	93	259	—	1742	32707	9, 4, 2	37	83	1776	—	32969	●7, 2, 2●2●	160	219
—	1730	32467	6●2●●2, 2	121	289	—	1743	32713	9, 2●2●	75	103	—	1756	32971	●7, 2, 2●●2	101	261
—	1731	32479	6●2●5	27	155	1765	—	32717	9, 2, 2●●	66	113	—	1757	32983	●7, 2●●●3	67	243
—	1732	32491	6●3●●●2	95	251	—	1744	32719	9, 2, 4	19	85	1777	—	32987	●7, 2●2●2	92	251
—	1733	32497	6●4, 3●	109	143	—	1745	32749	10●2●●	43	75	1778	—	32993	●7, 3, 4●	108	133
—	1734	32503	6●4●3	41	157	1766	—	32771	●13, 2	14	29	1779	—	32999	●7, 3, 2, 3	58	199
1753	—	32507	6●5●2	48	137	—	1746	32779	●11●●2	25	63	—	1758	33013	●7, 4●●●●	115	189
1754	—	32531	7, 3●2, 2	80	189	1767	—	32783	●11, 4	12	49	1780	—	33023	●7, 8	8	65
—	1735	32533	7, 3●●●●●	131	211	1768	—	32789	●10●●●●●●	58	93	1781	—	33029	●6●5●●●	102	157
1755	—	32537	7, 3, 2, 2●	124	175	—	1747	32797	●10, 3●●	45	79	—	1759	33037	●6●4, 2●●	125	211
1756	—	32561	7, 2, 2, 3●	126	163	1769	—	32801	●9●4●	54	65	—	1760	33049	●6●3, 2, 2●	171	241
—	1736	32563	7, 2, 2, 2, 2	89	215	—	1748	32803	●9●3, 2	43	97	1782	—	33053	●6●3, 3●●	132	233
—	1737	32569	7, 2, 3. 2●	119	171	1770	—	32831	●9, 6	10	61	1783	—	33071	●6●2●●4	54	247
1757	—	32573	7, 2, 4●●	82	149	—	1749	32833	●8●5●	59	69	—	1761	33073	●6●2, 2, 3●	185	239
1758	—	32579	7●●4, 2	68	151	—	1750	32839	●8●3, 3	39	127	1784	—	33083	●6●2, 3●2	100	277
—	1738	32587	7●●2●●2	91	235	1771	—	32843	●8●2●●2	68	175	—	1762	33091	●6●●●4, 2	107	237
1759	—	32603	7●●●2●2	84	229	—	1751	32869	●8, 2, 2●●●	113	179	1785	—	33107	●6●●●●●2, 2	160	381
1760	—	32609	7●2, 4●	100	123	—	1752	32887	●8, 3●3	37	139	1786	—	33113	●6●●●●2, 2●	236	335

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1787	—	33119	●6●●●●5	38	213	—	1774	33391	●5●2, 2●4	67	315	1812	—	33617	●5, 2●●●●3●	300	383
1788	—	33149	●6●●5●●	98	181	—	1775	33403	●5●2, 4●2	107	301	—	1788	33619	●5, 2●●●●2, 2	217	517
—	1763	33151	●6●●7	15	113	—	1776	33409	●5●●●6●	133	153	1813	—	33623	●5, 2●●●●●3	134	485
1789	—	33161	●6, 2, 3●2●	186	253	1801	—	33413	●5●●●4●●●	206	319	1814	—	33629	●5, 2●●●3●●	236	421
1790	—	33179	●6, 2, 2, 2●2	126	341	—	1777	33427	●5●●●2●2, 2	199	471	—	1789	33637	●5, 2●2, 2●●●	293	465
—	1764	33181	●6, 2, 2, 3●●	163	289	—	1778	33457	●5●●●●2, 3●	291	377	1815	—	33641	●5, 2●2●●2●	312	433
1791	—	33191	●6, 2●●2, 3	96	325	1802	—	33461	●5●●●●2●●●●	324	529	1816	—	33647	●5, 2●2●4	70	331
—	1765	33199	●6, 2●●●4	59	273	—	1779	33469	●5●●●●4●●	185	337	—	1790	33679	●5, 3, 3, 4	63	271
1792	—	33203	●6, 2●2, 2, 2	140	339	1803	—	33479	●5●●2, 3, 3	112	369	—	1791	33703	●5, 3●●2, 3	113	383
—	1766	33211	●6, 2●3●2	103	287	—	1780	33487	●5●●2, 2, 4	79	349	1817	—	33713	●5, 3●2, 3●	232	301
—	1767	33223	●6, 3, 3, 3	73	241	—	1781	33493	●5●●2●●●●●●	329	533	—	1792	33721	●5, 3●3, 2●	213	307
—	1768	33247	●6, 3●5	29	167	1804	—	33503	●5●●2●5	46	263	—	1793	33739	●5, 4, 2●●2	137	355
1793	—	33287	●5●6, 3	48	151	1805	—	33521	●5●●4, 3●	190	249	1818	—	33749	●5, 4●●●●●●	230	373
—	1769	33289	●5●5●2●	137	185	—	1782	33529	●5●●5, 2●	157	229	—	1794	33751	●5, 4●●●3	87	317
—	1770	33301	●5●4●●●●●	191	307	1806	—	33533	●5●●6●●	98	183	—	1795	33757	●5, 4●3●●	149	267
1794	—	33311	●5●4, 5	34	177	—	1783	33547	●5, 2, 4●●2	129	329	1819	—	33767	●5, 5, 2, 3	68	235
1795	—	33317	●5●3●2●●●	224	353	1807	—	33563	●5, 2, 3, 2●2	148	399	—	1796	33769	●5, 5●●2●	173	241
1796	—	33329	●5●3, 2, 3●	210	271	1808	—	33569	●5, 2, 2●4●	212	257	1820	—	33773	●5, 5●2●●	142	247
—	1771	33331	●5●3, 2, 2, 2	149	359	—	1784	33577	●5, 2, 2●●●2●	321	443	1821	—	33791	●5, 10	6	61
—	1772	33343	●5●3, 6	27	169	1809	—	33581	●5, 2, 2●●2●●	276	475	1822	—	33797	●4●7●●●	100	153
1797	—	33347	●5●2●4, 2	128	283	1810	—	33587	●5, 2, 2, 2, 2, 2	186	449	1823	—	33809	●4●5●3●	158	199
—	1773	33349	●5●2●3●●●	229	357	—	1785	33589	●5, 2, 2, 2●●●●	295	481	—	1797	33811	●4●5●2, 2	117	275
1798	—	33353	●5●2●2●2●	276	377	1811	—	33599	●5, 2, 2, 6	32	205	1824	—	33827	●4●4●3, 2	134	303
1799	—	33359	●5●2●2, 4	74	323	—	1786	33601	●5, 2●●5●	179	211	—	1798	33829	●4●4●2●●●	233	367
1800	—	33377	●5●2, 2, 4●	208	255	—	1787	33613	●5, 2●●2, 2●●	281	479	1825	—	33851	●4●4, 3●2	122	337

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
1826	—	33857	●4●3●5●	168	197	—	1813	34159	●4●●●●●2●4	101	477	1848	—	34403	●4, 2, 2. 2, 3, 2	222	509
1827	—	33863	●4●3●3, 3	110	359	—	1814	34171	●4●●●●●4●2	157	443	1849	—	34421	●4, 2, 2, 3●●●●●	330	541
—	1799	33871	●4●3●2, 4	81	353	—	1815	34183	●4●●2, 4, 3	123	397	—	1827	34429	●4, 2, 2, 5●●	173	319
—	1800	33889	●4●3, 2, 4●	231	283	1837	—	34211	●4●●2●●3, 2	240	547	1850	—	34439	●4, 2●●4, 3	124	399
1828	—	33893	●4●3, 2, 2●●●	306	485	—	1816	34213	●4●●2●●2●●●●	413	653	1851	—	34457	●4, 2●●2, 2, 2●	404	571
1829	—	33911	●4●3, 3●3	98	369	1838	—	34217	●4●●2●●●●●2●	452	625	1852	—	34469	●4, 2●●●●2●●●	436	689
1830	—	33923	●4●2●5, 2	132	287	—	1817	34231	●4●●2●2●3	145	541	—	1828	34471	●4, 2●●●●2, 3	183	619
—	1801	33931	●4●2●3●●2	195	499	1839	—	34253	●4●●3, 2, 2●●	306	523	—	1829	34483	●4, 2●●●2, 2, 2	269	651
—	1802	33937	●4●2●2●3●	321	407	1840	—	34259	●4●●3●●2, 2	228	545	1853	—	34487	●4, 2●●●2●3	156	581
1831	—	33941	●4●2●2●●●●●	384	619	—	1818	34261	●4●●3●●●●●●	367	595	1854	—	34499	●4, 2●2, 4, 2	188	419
—	1803	33961	●4●2●●●●●●2●	435	601	—	1819	34267	●4●●3●2●2	189	517	—	1830	34501	●4, 2●2, 3●●●	333	521
—	1804	33967	●4●2●●●●●4	103	475	—	1820	34273	●4●●4, 4●	211	261	1855	—	34511	●4, 2●2, 2, 4	102	451
—	1805	33997	●4●2, 2, 2, 2●●	331	565	1841	—	34283	●4●●4●●●2	172	455	—	1831	34513	●4, 2●2●●3●	365	467
1832	—	34019	●4●2, 3, 3, 2	188	433	—	1821	34297	●4●●6, 2●	155	227	—	1832	34519	●4, 2●2●●●3	161	585
1833	—	34031	●4●2, 3●4	74	353	1842	—	34301	●4●●7●●	94	177	—	1833	34537	●4, 2●3●●2●	343	477
—	1806	34033	●4●2, 4, 3●	239	313	—	1822	34303	●4●●9	11	105	—	1834	34543	●4, 2●3●4	75	359
—	1807	34039	●4●2, 4●3	91	347	1843	—	34313	●4, 2, 5●2●	202	273	—	1835	34549	●4, 2●4●●●●	257	423
—	1808	34057	●4●●●4●2●	271	367	1844	—	34319	●4, 2, 5, 4	60	251	1856	—	34583	●4, 3, 3●●3	122	435
1834	—	34061	●4●●●4, 2●●	254	429	—	1823	34327	●4, 2, 4●●3	109	387	1857	—	34589	●4, 3, 3, 3●●	228	403
—	1809	34123	●4●●●●●●2●●2	281	725	1845	—	34337	●4, 2, 3●4●	234	283	—	1836	34591	●4, 3, 3, 5	53	281
1835	—	34127	●4●●●●●2, 4	118	517	—	1824	34351	●4, 2, 3●●4	87	397	—	1837	34603	●4, 3, 2●●●●2	233	609
—	1810	34129	●4●●●●●●●●3●	427	545	1846	—	34361	●4, 2, 3, 3, 2●	288	413	1858	—	34607	●4, 3, 2●●4	90	413
—	1811	34141	●4●●●●●●●3●●	337	601	1847	—	34367	●4, 2, 3, 6	38	239	1859	—	34613	●4, 3, 2, 2●●●●	344	561
—	1812	34147	●4●●●●2, 3, 2	247	567	—	1825	34369	●4, 2, 2●5●	217	255	1860	—	34631	●4, 3●●3, 3	132	433
1836	—	34157	●4●●●●●2●2●●	376	651	—	1826	34381	●4, 2, 2●2, 2●●	347	591	1861	—	34649	●4, 3●●●2, 2●	364	517

z	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1838	34651	●4, 3●●●2●2	211	575	1876	—	34913	●3●4, 2, 4●	236	289	1891	—	35171	●3●2●●2, 3, 2	288	661
1862	—	34667	●4, 3●2●●●2	216	569	1877	—	34919	●3●4, 2, 2, 3	130	443	1892	—	35201	●3●2, 2, 6●	212	245
1863	—	34673	●4, 3●3, 3●	258	337	—	1849	34939	●3●4, 4●2	125	351	—	1859	35221	●3●2, 2, 2●●●●●	499	805
1864	—	34679	●4, 3●3●3	100	379	1878	—	34949	●3●3●4●●●	254	393	—	1860	35227	●3●2, 2, 2, 2●2	273	739
—	1839	34687	●4, 3●7	21	163	1879	—	34961	●3●3●2●3●	340	431	—	1861	35251	●3●2, 2●2, 2, 2	301	729
—	1840	34693	●4, 4, 4●●●	199	309	—	1850	34963	●3●3●2●2, 2	249	589	—	1862	35257	●3●2, 2●3, 2●	395	569
1865	—	34703	●4, 4, 3, 4	68	293	—	1851	34981	●3●3●●●2●●●	421	665	1893	—	35267	●3●2, 3, 4, 2	202	451
1866	—	34721	●4, 4●●4●	214	261	—	1852	35023	●3●3, 2, 2, 4	105	463	1894	—	35279	●3●2, 3, 2, 4	108	479
—	1841	34729	●4, 4●●●●2●	313	433	1880	—	35027	●3●3, 2●●2, 2	272	649	—	1863	35281	●3●2, 3●●3●	385	493
1867	—	34739	●4, 4●2, 2, 2	172	417	1881	—	35051	●3●3, 3●●●2	224	591	1895	—	35291	●3●2, 3●2●2	230	629
—	1842	34747	●4, 4●3●2	125	349	—	1853	35053	●3●3, 3●2●●	305	529	—	1864	35311	●3●2, 4●4	75	361
1868	—	34757	●4, 5, 3●●●	192	301	—	1854	35059	●3●3, 4, 2, 2	181	443	—	1865	35317	●3●2, 5●●●●	253	417
—	1843	34759	●4, 5, 3, 3	83	275	1882	—	35069	●3●3, 6●●	138	257	—	1866	35323	●3●2, 6●2	103	295
1869	—	34763	●4, 5, 2●●2	140	363	1883	—	35081	●3●2●4●2●	308	417	1896	—	35327	●3●2. 9	14	131
1870	—	34781	●4, 5●3●●	150	269	—	1855	35083	●3●2●4●●2	199	507	1897	—	35339	●3●●●5●●2	172	437
—	1844	34807	●4, 7●3	41	159	—	1856	35089	●3●2●3●3●	341	431	—	1867	35353	●3●●●4, 2, 2●	353	497
—	1845	34819	●3●9, 2	49	103	1884	—	35099	●3●2●3, 2●2	232	625	1898	—	35363	●3●●●3●3, 2	246	557
1871	—	34841	●3●6, 2, 2●	180	253	—	1857	35107	●3●2●2●3, 2	265	601	1899	—	35381	●3●●●3, 2●●●●	450	733
—	1846	34843	●3●6, 2●2	107	287	1885	—	35111	●3●2●2●2, 3	194	653	1900	—	35393	●3●●●2●5●	292	343
1872	—	34847	●3●6, 5	34	175	1886	—	35117	●3●2●2●●2●●	440	757	—	1868	35401	●3●●●2●2●2●	519	709
—	1847	34849	●3●5●4●	165	199	1887	—	35129	●3●2●2, 3, 2●	402	577	—	1869	35407	●3●●●2●2, 4	139	607
1873	—	34871	●3●5, 2●3	92	339	1888	—	35141	●3●2●●●3●●●	430	671	—	1870	35419	●3●●●2●●2●2	315	857
1874	—	34877	●3●5, 4●●	150	271	—	1858	35149	●3●2●●●2, 2●●	463	789	1901	—	35423	●3●●●2●●5	88	491
1875	—	34883	●3●4●4, 2	140	309	1889	—	35153	●3●2●●●●●3●	496	633	—	1871	35437	●3●●●2, 2●2●●	463	801
—	1848	34897	●3●4●●●3●	299	381	1890	—	35159	●3●2●●●●●●3	222	803	1902	—	35447	●3●●●2, 3●3	162	611

z'	z''	Z	Exponenten	N	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1872	35449	●3●●●2, 4, 2●	361	523	1915	—	35771	●3●●3●3●2	196	547	1927	—	36011	●3, 2, 2●●●●●●●2	358	937
—	1873	35461	●3●●●●●●4●●●	379	587	—	1885	35797	●3●●4●●●●●●●	373	605	—	1898	36013	●3, 2, 2●●●●●2●●	495	853
—	1874	35491	●3●●●●●●●●3, 2	351	799	1916	—	35801	●3●●4●2, 2●	332	473	1928	—	36017	●3, 2, 2●●2, 3●	464	601
1903	—	35507	●3●●●●●●●2, 2, 2	374	905	—	1886	35803	●3●●4●2●2	191	523	—	1899	36037	●3, 2, 2, 2, 3●●●	415	649
—	1875	35509	●3●●●●●●●2●●●●	591	965	—	1887	35809	●3●●5, 4●	209	259	—	1900	36061	●3, 2, 2, 2●3●●	353	631
—	1876	35521	●3●●●●2, 5●	323	383	1917	—	35831	●3●●6●3	68	263	—	1901	36067	●3, 2, 2, 3, 3, 2	247	569
—	1877	35527	●3●●●●2, 3, 3	203	669	1918	—	35837	●3●●8●●	86	163	—	1902	36073	●3, 2, 2, 3●●2●	441	613
1904	—	35531	●3●●●●2, 2●●2	346	895	—	1888	35839	●3●●10	9	95	1929	—	36083	●3, 2, 2, 4, 2, 2	216	529
—	1878	35533	●3●●●●2, 2, 2●●	489	835	—	1889	35851	●3, 2, 6●●2	125	317	—	1903	36097	●3, 2●●7●	167	189
1905	—	35537	●3●●●●2●●3●	512	655	—	1890	35863	●3, 2, 5●●3	107	379	1930	—	36107	●3, 2●●4●●2	224	571
1906	—	35543	●3●●●●2●●●3	226	821	—	1891	35869	●3, 2, 5, 3●●	205	361	—	1904	36109	●3, 2●●4, 2●●	325	549
—	1879	35569	●3●●●●4, 3●	341	447	1919	—	35879	●3, 2, 4●2, 3	138	463	1931	—	36131	●3, 2●●2●3, 2	294	667
1907	—	35573	●3●●●●4●●●●	364	599	1920	—	35897	●3, 2, 4, 3, 2●	298	427	1932	—	36137	●3, 2●●2●●●●2●	566	781
1908	—	35591	●3●●2, 5, 3	124	395	—	1892	35899	●3, 2, 4, 3●2	169	467	—	1905	36151	●3, 2●●2, 2●3	193	715
—	1880	35593	●3●●2, 4●2●	349	473	—	1893	35911	●3, 2, 3●3, 3	151	493	1933	—	36161	●3, 2●●●●●5●	320	377
1909	—	35597	●3●●2, 4, 2●●	326	551	—	1894	35923	●3, 2, 3●●●2, 2	293	697	—	1906	36187	●3, 2●●●●●●2●2	333	907
1910	—	35603	●3●●2, 3●2, 2	280	661	1921	—	25933	●3, 2, 3●●3●●	324	577	1934	—	36191	●3, 2●●●●●●5	92	517
—	1881	35617	●3●●2, 2●4●	367	445	1922	—	35951	●3, 2, 3, 2●4	102	479	1935	—	36209	●3, 2●●●3, 3●	416	543
—	1882	35671	●3●●2●●●●●●3	229	829	1923	—	35963	●3, 2, 3, 4●2	164	461	—	1907	36217	●3, 2●●●4, 2●	359	521
—	1883	35677	●3●●2●●●3●●	403	719	1924	—	35969	●3, 2, 2●6●	208	239	—	1908	36229	●3, 2●2, 4●●●	341	529
1911	—	35729	●3●●3, 2●3●	388	493	—	1895	35977	●3, 2, 2●3●2●	407	553	—	1909	36241	●3, 2●2, 2●3●	437	555
—	1884	35731	●3●●3, 2●2, 2	283	671	—	1896	35983	●3, 2, 2●3, 4	115	491	1936	—	36251	●3, 2●2, 2, 2●2	284	769
1912	—	35747	●3●●3●●3, 2	260	593	1925	—	35993	●3, 2, 2●2, 2, 2●	482	681	1937	—	36263	●3, 2●2●●2, 3	214	725
1913	—	35753	●3●●3●●●●●2●	488	675	1926	—	35999	●3, 2, 2●2, 5	84	451	1938	—	36269	●3, 2●2●●●2●●	476	821
1914	—	35759	●3●●3●●●4	114	529	—	1897	36007	●3, 2, 2●●●2, 3	221	747	—	1910	36277	●3, 2●2●2●●●●	489	799

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
1939	—	36293	●3, 2●3, 3●●●	362	567	—	1924	36559	●3, 3●2, 2, 4	111	491	—	1936	36787	●3, 5●2, 2, 2	167	405
1940	—	36299	●3, 2●3, 2●●2	266	689	1951	—	36563	●3, 3●2●●2, 2	286	683	1964	—	36791	●3, 5●2●3	96	359
—	1911	36307	●3, 2●3●●2, 2	279	667	—	1925	36571	●3, 3●2●2●2	239	653	—	1937	36793	●3, 5●3, 2●	217	313
—	1912	36313	●3, 2●3●2, 2●	401	571	—	1926	36583	●3, 3●3, 2, 3	145	499	1965	—	36809	●3, 6, 2●2●	212	291
—	1913	36319	●3, 2●3●5	61	353	1952	—	36587	●3, 3●3●●●2	226	597	1966	—	36821	●3, 6●●●●●●	220	357
1941	—	36341	●3, 2●5●●●●	248	409	1953	—	36599	●3, 3●4●3	98	375	1967	—	36833	●3, 7, 4●	120	149
—	1914	36343	●3, 2●5●3	87	335	—	1927	36607	●3, 3●8	17	149	—	1938	36847	●3, 7●4	33	161
1942	—	36353	●3, 3, 8●	108	121	1954	—	36629	●3, 4, 3●●●●●	326	525	1968	—	36857	●3, 9, 2●	78	115
—	1915	36373	●3, 3, 4●●●●●	319	513	—	1928	36637	●3, 4, 3, 3●●	237	419	—	1939	36871	●2●9, 3	39	121
1943	—	36383	●3, 3, 4, 5	56	293	—	1929	36643	●3, 4, 2●3, 2	203	461	—	1940	36877	●2●8 2●●	109	183
1944	—	36389	●3, 3, 3●2●●●	366	577	1955	—	36653	●3, 4, 2●●2●●	334	575	1969	—	36887	●2●7●●3	66	233
—	1916	36433	●3, 3, 2●●●3●	421	537	1956	—	36671	●3, 4, 2, 6	38	245	1970	—	36899	●2●6●3, 2	120	271
—	1917	36451	●3, 3, 2, 2, 3, 2	249	571	1957	—	36677	●3, 4●●3●●●	308	481	—	1941	36901	●2●6●2●●●	209	329
—	1918	36457	●3, 3, 2, 2●●2●	455	631	1958	—	36683	●3, 4●●2●●2	232	599	—	1942	36913	●2●6, 2, 3●	201	259
1945	—	36467	●3, 3, 2, 3, 2, 2	236	575	—	1930	36691	●3, 4●●●●2, 2	253	603	—	1943	36919	●2●6, 2●3	85	313
—	1919	36469	●3, 3, 2, 3●●●●	369	605	—	1931	36697	●3, 4●●●2, 2●	371	527	1971	—	36923	●2●6, 3●2	112	309
1946	—	36473	●3, 3, 2, 4, 2●	296	429	—	1932	36709	●3, 4●2, 2●●●	337	535	1972	—	36929	●2●5●5●	158	185
1947	—	36479	●3, 3, 2, 7	30	223	1959	—	36713	●3, 4●2●●2●	358	497	—	1944	36931	●2●5●4, 2	131	289
—	1920	36493	●3, 3●●3, 2●●	351	595	—	1933	36721	●3, 4●3, 3●	261	341	—	1945	36943	●2●5●2, 4	77	335
1948	—	36497	●3, 3●●2●3●	398	505	—	1934	36739	●3, 5, 5, 2	109	239	1973	—	36947	●2●5●●●2, 2	204	485
—	1921	36523	●3, 3●●●●●●●2	325	851	1960	—	36749	●3, 5, 3, 2●●	222	377	—	1946	36973	●2●5, 2●2●●	269	465
1949	—	36527	●3, 3●●●●●4	124	573	1961	—	36761	●3, 5, 2, 2, 2●	272	385	—	1947	36979	●2●5, 3, 2, 2	169	411
—	1922	36529	●3, 3●●●2, 3●	419	543	1962	—	36767	●3, 5, 2, 5	46	251	—	1948	36997	●2●4●4●●●	245	379
—	1923	36541	●3, 3●●●4●●	265	483	1963	—	36779	●3, 5●●●●●2	188	493	—	1949	37003	●2●4●3●●2	199	509
1950	—	36551	●3, 3●2, 3, 3	158	521	—	1935	36781	●3, 5●●●2●●	259	447	1974	—	37013	●2●4●2●●●●●	394	635

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
1975	—	37019	●2●4●2, 2●2	218	589	1987	—	37313	●2●3, 3, 5●	260	309	—	1976	37549	●2●2●●●●●●●2●●	633	1091
—	1950	37021	●2●4●2, 3●●	283	501	—	1963	37321	●2●3, 3, 2●2●	437	599	—	1977	37561	●2●2●●●●3, 2●	551	793
—	1951	37039	●2●4●●●●4	107	493	1988	—	37337	●2●3, 3●2, 2●	418	595	—	1978	37567	●2●2●●●●6	67	443
1976	—	37049	●2●4●●3, 2●	340	489	—	1964	37339	●2●3, 3●2●2	241	659	1999	—	37571	●2●2●●2, 4, 2	294	655
—	1952	37057	●2●4, 2, 5●	229	271	—	1965	37357	●2●3, 4●2●●	301	523	—	1977	37573	●2●2●●2, 3●●●	521	815
1977	—	37061	●2●4, 2, 3●●●	332	519	1989	—	37361	●2●3, 5, 3●	252	331	—	1980	37579	●2●2●●2, 2●●2	387	1001
—	1953	37087	●2●4, 2●5	61	347	—	1966	37363	●2●3, 5, 2, 2	173	425	2000	—	37589	●2●2●●2●●●●●●	666	1079
1978	—	37097	●2●4, 3●●2●	362	503	—	1967	37369	●2●3. 6, 2●	203	297	—	1981	37591	●2●2●●2●●●3	253	919
—	1954	37117	●2●4, 6●●	137	255	1990	—	37379	●2●2●7, 2	116	247	2001	—	37607	●2●2●●3, 2, 3	212	729
—	1955	37123	●2●3●6, 2	129	277	1991	—	37397	●2●2●4●●●●●	400	643	2002	—	37619	●2●2●●4, 2, 2	264	647
1979	—	37139	●2●3●3●2, 2	254	599	1992	—	37409	●2●2●3●4●	340	411	—	1982	37633	●2●2, 2, 7●	193	219
—	1956	37159	●2●3●2●2, 3	197	663	—	1968	37423	●2●2●3●●4	127	579	2003	—	37643	●2●2, 2, 4●●2	256	653
—	1957	37171	●2●3●2, 2, 2, 2	303	731	—	1969	37441	●2●2●2●5●	321	377	2004	—	37649	●2●2, 2, 3●3●	434	549
1980	—	37181	●2●3●2, 4●●	284	515	—	1970	37447	●2●2●2●3, 3	209	683	—	1983	37657	●2●2, 2, 3, 2, 2●	497	701
—	1958	37189	●2●3●●●3●●●	439	685	1993	—	37463	●2●2●2●●●●3	250	903	—	1984	37663	●2●2, 2, 3, 5	89	471
1981	—	37199	●2●3●●●2, 4	140	613	—	1971	37483	●2●2●2, 2●●●2	373	981	2005	—	37691	●2●2, 2, 2, 3●2	278	771
—	1959	37201	●2●3●●●●●●3●	507	647	—	1972	37489	●2●2●2, 3, 3●	455	593	—	1985	37693	●2●2, 2, 2, 4●●	341	619
1982	—	37217	●2●3●●2, 4●	382	469	1994	—	37493	●2●2●2, 3●●●●	496	813	—	1986	37699	●2●2, 2●●4, 2	289	641
1983	—	37223	●2●3●●2, 2, 3	208	711	—	1973	37501	●2●2●2, 5●●	261	481	—	1987	37717	●2●2, 2●●●●●●●●	689	1115
—	1960	37243	●2●3●●4●2	189	533	—	1974	37507	●2●2●●●5, 2	231	503	—	1988	37747	●2●2, 2●3, 2, 2	311	759
1984	—	37253	●2●3, 2, 4●●●	336	521	1995	—	37511	●2●2●●●4, 3	190	611	2006	—	37781	●2●2, 3, 2●●●●●	536	865
—	1961	37273	●2●3, 2, 2, 2, 2●	483	683	1996	—	37517	●2●2●●●3, 2●●	488	827	—	1989	37783	●2●2, 3, 2●●3	207	743
1985	—	37277	●2●3, 2, 2, 3●●	366	649	1997	—	37529	●2●2●●●2, 2, 2●	622	879	2007	—	37799	●2●2, 3●●2, 3	218	739
1986	—	37307	●2●3, 2●3●2	230	641	—	1975	37537	●2●2●●●●●4●	499	607	2008	—	37811	●2●2, 3●2, 2, 2	314	761
—	1962	37309	●2●3, 2●4●●	279	509	1998	—	37547	●2●2●●●●●●●●●2	458	1199	—	1990	37813	●2●2, 3●2●●●●	495	809

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	1991	37831	●2●2, 4, 3, 3	155	513	—	2006	38149	●2●●●●●5●●●	355	547	—	2016	38377	●2●●●●4●●2●	469	653
2009	—	37847	●2●2, 4●●●3	166	605	2019	—	38153	●2●●●●●4●2●	460	623	2034	—	38393	●2●●●●6, 2●	256	375
2010	—	37853	●2●2, 4●3●●	284	509	—	2007	38167	●2●●●●●3●●3	239	851	—	2017	38431	●2●●2, 4, 5	79	413
—	1992	37861	●2●2, 5, 2●●●	317	505	2020	—	38177	●2●●●●●2●4●	496	601	2035	—	38447	●2●●2, 3●●4	140	639
2011	—	37871	●2●2, 5●4	70	339	2021	—	38183	●2●●●●●2●2, 3	286	963	—	2018	38449	●2●●2, 3, 2, 3●	481	621
—	1993	37879	●2●2, 6●3	81	313	2022	—	38189	●2●●●●●2●●2●●	648	1115	2036	—	38453	●2●●2, 3, 2●●●●	542	883
2012	—	37889	●2●●●9●	106	117	—	2008	38197	●2●●●●●2, 2●●●●	695	1133	2037	—	38459	●2●●2, 3, 3●2	262	725
—	1994	37897	●2●●●6●2●	241	325	2023	—	38201	●2●●●●●2, 3, 2●	590	847	—	2019	38461	●2●●2, 3, 4●●	323	585
2013	—	37907	●2●●●5●2, 2	208	489	2024	—	38219	●2●●●●●●●2●●2	474	1223	2038	—	38501	●2●●2, 2, 2, 2●●●	606	961
—	1995	37951	●2●●●4, 6	51	317	2025	—	38231	●2●●●●●●●●●●3	322	1165	2039	—	38543	●2●●2●●3, 4	154	659
—	1996	37957	●2●●●3●3●●●	437	681	2026	—	38237	●2●●●●●●●●3●●	568	1013	—	2020	38557	●2●●2●●2, 3●●	487	863
—	1997	37963	●2●●●3●2●●2	335	863	—	2009	38239	●2●●●●●●●●5	123	691	2040	—	38561	●2●●2●●●●4●	512	623
2014	—	37967	●2●●●3●2, 4	142	619	2027	—	38261	●2●●●●●●3●●●●	604	991	2041	—	38567	●2●●2●●●●2, 3	290	981
—	1998	37987	●2●●●3, 2, 3, 2	313	717	2028	—	38273	●2●●●●2, 6●	300	347	—	2021	38569	●2●●2●●●●●●2●	759	1049
2015	—	37991	●2●●●3, 2, 2, 3	222	757	—	2010	38281	●2●●●●2, 3●2●	571	777	—	2022	38593	●2●●2●2, 5●	365	433
—	1999	37993	●2●●●3, 2●●2●	575	797	—	2011	38287	●2●●●●2, 3, 4	159	683	2042	—	38603	●2●●2●2, 2●●2	390	1009
2016	—	37997	●2●●●3, 2●2●●	484	837	—	2012	38299	●2●●●●2, 2, 2●2	383	1037	2043	—	38609	●2●●2●2●●3●	576	737
—	2000	38011	●2●●●3, 4●2	211	593	2029	—	38303	●2●●●●2, 2, 5	112	607	—	2023	38611	●2●●2●2●●2, 2	415	991
2017	—	38039	●2●●●2●2●●3	258	923	—	2013	38317	●2●●●●2●●●●2●●	643	1109	—	2024	38629	●2●●2●3, 2●●●	515	819
—	2001	38047	●2●●●2●2, 5	109	585	2030	—	38321	●2●●●●2●2, 3●	596	773	2044	—	38639	●2●●2●3●4	118	565
—	2002	38053	●2●●●2●●●2●●●	683	1079	2031	—	38327	●2●●●●2●2●3	242	903	2045	—	38651	●2●●2●5●2	168	479
2018	—	38069	●2●●●2●●2●●●●	672	1097	—	2014	38329	●2●●●●2●3, 2●	549	791	—	2025	38653	●2●●2●6●●	193	361
—	2003	38083	●2●●●2, 2, 4, 2	305	679	2032	—	38333	●2●●●●2●4●●	372	679	2046	—	38669	●2●●3, 4, 2●●	346	585
—	2004	38113	●2●●●2, 3, 4●	421	519	2033	—	38351	●2●●●●3, 2, 4	148	657	—	2026	38671	●2●●3, 4, 4	107	453
—	2005	38119	●2●●●2, 3, 2, 3	225	773	—	2015	38371	●2●●●●4, 3, 2	267	617	—	2027	38677	●2●●3, 3●●●●●	485	781

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2047	—	38693	●2●●3, 2●2●●●	524	827	—	2040	38923	●2, 2, 7●●2	111	281	2070	—	39191	●2, 2, 2●3●●3	202	719
2048	—	38699	●2●●3, 2●●●●2	360	941	2060	—	38933	●2, 2, 6●●●●●	246	395	—	2055	39199	●2, 2, 2●3, 5	89	469
—	2028	38707	●2●●3, 2, 2, 2, 2	335	809	—	2041	38953	●2, 2, 5●●●2●	339	467	2071	—	39209	●2, 2, 2●2●●●2●	640	883
2049	—	38711	●2●●3, 2, 2●3	196	727	—	2042	38959	●2, 2, 5●●4	83	377	—	2056	39217	●2, 2, 2●2, 2, 3●	527	681
—	2029	38713	●2●●3, 2, 3, 2●	449	645	—	2043	38971	●2, 2, 5, 3●2	159	439	2072	—	39227	●2, 2, 2●2, 3●2	284	787
2050	—	38723	●2●●3●●4, 2	260	577	—	2044	38977	●2, 2, 4●5●	221	259	—	2057	39229	●2, 2, 2●2, 4●●	349	633
2051	—	38729	●2●●3●●2●2●	552	755	2061	—	38993	●2, 2, 4●●●3●	390	497	2073	—	39233	●2, 2, 2●●●5●	366	431
—	2030	38737	●2●●3●●●●3●	527	673	—	2045	39019	●2, 2, 4, 2●●●2	269	707	2074	—	39239	●2, 2, 2●●●3, 3	236	773
2052	—	38747	●2●●3●●●2●2	324	883	2062	—	39023	●2, 2, 4, 2●4	100	469	—	2058	39241	●2, 2, 2●●●2●2●	643	879
—	2031	38749	●2●●3●●●3●●	413	737	2063	—	39041	●2, 2, 3●6●	210	241	2075	—	39251	●2, 2, 2●●●●●2, 2	448	1067
—	2032	38767	●2●●3●2●4	121	573	—	2046	39043	●2, 2, 3●5, 2	179	389	2076	—	39293	●2, 2, 2●●5●●	270	499
2053	—	38783	●2●●3●7	32	249	2064	—	39047	●2, 2, 3●4, 3	148	475	—	2059	39301	●2, 2, 2, 2, 4●●●	403	625
—	2033	38791	●2●●4, 4, 3	135	437	—	2047	39079	●2, 2, 3●●●2, 3	227	767	—	2060	39313	●2, 2, 2, 2, 2●3●	519	659
—	2034	38803	●2●●4, 2●2, 2	277	657	2065	—	39089	●2, 2, 3●●2, 3●	478	619	2077	—	39317	●2, 2, 2, 2, 2●●●●●	618	997
—	2035	38821	●2●●4●●2●●●	433	685	—	2048	39097	●2, 2, 3●●3, 2●	447	643	2078	—	39323	●2, 2, 2, 2, 2, 2●2	338	915
—	2036	38833	●2●●4●2, 3●	369	479	—	2049	39103	●2, 2, 3●●6	55	361	2079	—	39341	●2, 2, 2, 2●●●2●●	570	983
—	2037	38839	●2●●4●2●3	149	557	2066	—	39107	●2, 2, 3, 2, 4, 2	244	543	—	2061	39343	●2, 2, 2, 2●●●4	157	727
—	2038	38851	●2●●5, 4, 2	163	365	2067	—	39113	●2, 2, 3, 2, 2●2●	512	701	2080	—	39359	●2, 2, 2, 2●6	58	389
2054	—	38861	●2●●5, 2, 2●●	294	503	2068	—	39119	●2, 2, 3, 2, 2, 4	134	591	—	2062	39367	●2, 2, 2, 3, 3, 3	191	631
2055	—	38867	●2●●5●●2, 2	216	517	—	2050	39133	●2, 2, 3, 2●3●●	371	663	2081	—	39371	●2, 2, 2, 3, 2●●2	324	839
2056	—	38873	●2●●5●2, 2●	308	439	—	2051	39139	●2, 2, 3, 3, 3, 2	261	601	—	2063	39373	●2, 2, 2, 3, 2, 2●●	457	781
2057	—	38891	●2●●6●●●2	152	403	—	2052	39157	●2, 2, 3, 4●●●●	357	587	2082	—	39383	●2, 2, 2, 3●●●3	208	757
2058	—	38903	●2●●7●3	60	233	2069	—	39161	●2, 2, 3, 5, 2●	278	405	—	2064	39397	●2, 2, 2, 4, 2●●●	409	651
—	2039	38917	●2, 2, 8●●●	125	191	—	2053	39163	●2, 2, 3, 5●2	151	429	—	2065	39409	●2, 2, 2, 5, 3●	293	385
2059	—	38921	●2, 2, 7●2●	170	229	—	2054	39181	●2, 2, 2●4, 2●●	363	613	2083	—	39419	●2, 2, 2, 6●2	126	361

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2066	39439	●2, 2●●5, 4	95	397	—	2078	39727	●2, 2●2, 2●●4	155	711	—	2089	39979	●2, 3, 4●●●●●2	245	639
2084	—	39443	●2, 2●●4●2, 2	268	631	—	2079	39733	●2, 2●2, 2, 2●●●●●	593	967	2111	—	39983	●2, 3, 4●●4	96	437
—	2067	39451	●2, 2●●4, 2●2	251	675	2097	—	39749	●2, 2●2●●3●●●	522	815	2112	—	39989	●2, 3, 4, 2●●●●	374	609
2085	—	39461	●2, 2●●3●2●●●	512	807	2098	—	39761	●2, 2●2●●●●●3●	596	761	—	2090	40009	●2, 3, 3●2●2●	443	605
—	2068	39499	●2, 2●●2●2●●2	393	1013	—	2080	39769	●2, 2●2●●●●2, 2●	633	899	2113	—	40013	●2, 3, 3●2, 2●●	500	681
2086	—	39503	●2, 2●●2●2, 4	166	725	2099	—	39779	●2, 2●2●2, 3, 2	340	781	2114	—	40031	●2, 3, 3●●5	76	423
2087	—	39509	●2, 2●●2●●●●●●●●	708	1145	2100	—	39791	●2, 2●2●2●4	138	653	2115	—	40037	●2, 3, 3, 2, 2●●●	446	707
—	2069	39511	●2, 2●●2●●●●3	271	979	—	2081	39799	●2, 2●2●3●3	175	663	—	2091	40039	●2, 3, 3, 2, 2, 3	185	631
2088	—	39521	●2, 2●●2, 2, 4●	464	569	2101	—	39821	●2, 2●3, 3, 2●●	400	679	—	2092	40063	●2, 3, 3, 7	33	241
—	2070	39541	●2, 2●●2, 3●●●●	535	877	2102	—	39827	●2, 2●3, 2●2, 2	326	773	—	2093	40087	●2, 3, 2●2●●3	211	755
2089	—	39551	●2, 2●●2, 7	44	325	—	2082	39829	●2, 2●3, 2●●●●●	531	857	—	2094	40093	●2, 3, 2●2, 3●●	389	689
2090	—	39563	●2, 2●●●●3●●2	362	927	2103	—	39839	●2, 2●3, 2, 5	84	457	—	2095	40099	●2, 3, 2●●●3, 2	323	735
2091	—	39569	●2, 2●●●●2●3●	592	751	—	2083	39841	●2, 2●3●●4●	383	467	—	2096	40111	●2, 3, 2●●●●4	145	669
2092	—	39581	●2, 2●●●●2, 3●●	504	893	—	2084	39847	●2, 2●3●●2, 3	215	729	—	2097	40123	●2, 3, 2●●3●2	257	715
—	2071	39607	●2, 2●●●●●●2●3	257	957	2104	—	39857	●2, 2●3●2, 3●	440	571	2116	—	40127	●2, 3, 2●●6	56	369
—	2072	39619	●2, 2●●●2, 4, 2	311	693	2105	—	39863	●2, 2●3●2●3	178	665	—	2098	40129	●2, 3, 2, 2, 5●	303	359
2093	—	39623	●2, 2●●●2, 3, 3	240	791	2106	—	39869	●2, 2●3●4●●	272	497	2117	—	40151	●2, 3, 2, 2●●●3	214	777
—	2073	39631	●2, 2●●●2, 2, 4	169	747	—	2085	39877	●2, 2●4, 3●●●	349	547	—	2099	40153	●2, 3, 2, 2●2, 2●	507	721
2094	—	39659	●2, 2●●●3●●●2	348	919	—	2086	39883	●2, 2●4, 2●●2	255	661	2118	—	40163	●2, 3, 2, 3, 3, 2	260	599
—	2074	39667	●2, 2●●●4, 2, 2	277	679	2107	—	39887	●2, 2●4, 2, 4	104	463	2119	—	40169	●2, 3, 2, 3●●2●	464	645
2095	—	39671	●2, 2●●●4●3	152	581	—	2087	39901	●2, 2●4●3●●	275	493	—	2100	40177	●2, 3, 2, 4, 3●	329	431
—	2075	39679	●2, 2●●●8	27	233	2108	—	39929	●2, 2●7, 2●	164	241	—	2101	40189	●2, 3, 2, 6●●	171	319
—	2076	39703	●2, 2●2, 3●●3	209	745	—	2088	39937	●2, 3, 9●	93	103	2120	—	40193	●2, 3●●7●	174	197
—	2077	39709	●2, 2●2, 3, 3●●	391	691	2109	—	39953	●2, 3, 5●3●	242	305	—	2102	40213	●2, 3●●3●●●●●	479	771
2096	—	39719	●2, 2●2, 2●2, 3	246	829	2110	—	39971	●2, 3, 4●3, 2	202	457	—	2103	40231	●2, 3●●2●2, 3	223	751

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2104	40237	●2, 3●●2●●2●●	505	869	—	2116	40543	●2, 4, 2●●5	71	397	2146	—	40841	●2, 6, 3●2●	218	297
2121	—	40241	●2, 3●●2, 2, 3●	482	623	2134	—	40559	●2, 4, 2, 2●4	100	471	2147	—	40847	●2, 6, 3, 4	60	259
2122	—	40253	●2, 3●●2, 4●●	318	577	2135	—	40577	●2, 4●●6●	190	219	—	2129	40849	●2, 6, 2●3●	221	281
2123	—	40277	●2, 3●●●●●●●●●●●	652	1055	2136	—	40583	●2, 4●●4, 3	132	425	2148	—	40853	●2, 6, 2●●●●●●	262	423
2124	—	40283	●2, 3●●●●●●2●2	344	937	—	2117	40591	●2, 4●●3, 4	103	441	—	2130	40867	●2, 6●●3, 2	145	331
2125	—	40289	●2, 3●●●●2, 4●	416	511	—	2118	40597	●2, 4●●2●●●●●●	457	737	—	2131	40879	●2, 6●●●4	63	293
2126	—	40343	●2, 3●2, 2●●3	206	739	—	2119	40609	●2, 4●●●●●4●	341	415	2149	—	40883	●2, 6●2, 2, 2	148	359
—	2105	40351	●2, 3●2, 2, 5	85	461	—	2120	40627	●2, 4●●●2, 2, 2	283	685	—	2132	40897	●2, 7, 5●	113	135
—	2106	40357	●2, 3●2●●2●●●	523	827	2137	—	40637	●2, 4●●●4●●	254	463	—	2133	40903	●2, 7, 3, 3	69	229
2127	—	40361	●2, 3●2●●●●●2●	572	791	—	2121	40639	●2, 4●●●6	45	299	—	2134	40927	●2, 7●5	25	147
—	2107	40387	●2, 3●3, 4, 2	209	467	—	2122	40693	●2, 4●4●●●●●	263	433	—	2135	40933	●2, 8, 2●●●	131	209
—	2108	40423	●2, 3●4, 2, 3	137	473	2138	—	40697	●2, 4●5, 2●	202	295	—	2136	40939	●2, 8●●●2	81	215
2128	—	40427	●2, 3●4●●●2	212	561	—	2123	40699	●2, 4●5●2	109	311	2150	—	40949	●2, 9●●●●	90	149
—	2109	40429	●2, 3●4●2●●	287	499	2139	—	40709	●2, 5, 5●●●	182	281	2151	—	40961	●●● 12 ●	38	41
2129	—	40433	●2, 3●5, 3●	238	313	2140	—	40739	●2, 5, 2●3, 2	188	427	2152	—	40973	●●●9, 2●●	90	151
—	2110	40459	●2, 4, 5●●2	149	379	2141	—	40751	●2, 5, 2●●4	86	395	—	2137	40993	●●●7●4●	127	153
—	2111	40471	●2, 4, 4●●3	123	437	—	2124	40759	●2, 5, 2, 2●3	121	449	—	2138	41011	●●●7, 2, 2, 2	121	291
—	2112	40483	●2, 4, 3●3, 2	207	469	2142	—	40763	●2, 5, 2, 3●2	156	433	—	2139	41017	●●●7, 3, 2●	167	239
2130	—	40487	●2, 4, 3●2, 3	152	511	—	2125	40771	●2, 5●●4, 2	159	353	—	2140	41023	●●●7, 6	23	141
2131	—	40493	●2, 4, 3●●2●●	346	595	2143	—	40787	●2, 5●●●●2, 2	232	553	2153	—	41039	●●●6●2, 4	66	287
2132	—	40499	●2, 4, 3, 2, 2, 2	236	569	—	2126	40801	●2, 5●2, 4●	235	289	—	2141	41047	●●●6●●●●●3	109	393
—	2113	40507	●2, 4, 3, 3●2	181	501	—	2127	40813	●2, 5●2●2●●	273	473	2154	—	41051	●●●6●●2●2	152	413
—	2114	40519	●2, 4, 2●3, 3	155	507	—	2128	40819	●2, 5●3, 2, 2	165	403	2155	—	41057	●●●6, 2, 4●	192	235
2133	—	40529	●2, 4, 2●●●3●	410	523	2144	—	40823	●2, 5●3●3	92	349	—	2142	41077	●●●6, 3●●●●●	229	375
—	2115	40531	●2, 4, 2●●●2, 2	297	707	2145	—	40829	●2, 5●5●●	130	241	2156	—	41081	●●●6, 4, 2●	186	269

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2143	41113	●●●5●2, 2, 2●	325	459	—	2158	41341	●●●4●●5●●	203	375	2182	—	41609	●●●3●●●3●2●	504	685
2157	—	41117	●●●5●2, 3●●	248	439	2167	—	41351	●●●4, 2, 4, 3	138	445	—	2168	41611	●●●3●●●3●●2	323	827
—	2144	41131	●●●5●●●●●●2	245	641	2168	—	41357	●●●4, 2, 3, 2●●	352	597	—	2169	41617	●●●3●●●2●3●	529	671
2158	—	41141	●●●5●●2●●●●	356	581	2169	—	41381	●●●4, 2●●2●●●	470	743	2183	—	41621	●●●3●●●2●●●●●	632	1019
—	2145	41143	●●●5●●2●3	131	487	2170	—	41387	●●●4, 2●●●●●2	318	833	2184	—	41627	●●●3●●●2, 2●2	348	941
—	2146	41149	●●●5●●4●●	205	373	—	2159	41389	●●●4, 2●●●2●●	439	757	—	2170	41641	●●●3●●●●●●●2●	707	977
—	2147	41161	●●●5, 2, 2●2●	347	475	2171	—	41399	●●●4, 2●2●3	166	619	—	2171	41647	●●●3●●●●●●4	167	771
2159	—	41177	●●●5, 2●2, 2●	344	489	2172	—	41411	●●●4, 3, 4, 2	194	433	2185	—	41651	●●●3●●●●2, 2, 2	398	963
—	2148	41179	●●●5, 2●2●2	199	543	—	2160	41413	●●●4, 3, 3●●●	343	537	—	2172	41659	●●●3●●●●3●2	295	821
2160	—	41183	●●●5, 2●5	54	307	—	2161	41443	●●●4, 4, 3, 2	191	441	2186	—	41669	●●●3●●2, 3●●●	498	779
2161	—	41189	●●●5, 3, 2●●●	304	483	2173	—	41453	●●●4, 4●2●●	278	483	2187	—	41681	●●●3●●2●●3●	548	701
2162	—	41201	●●●5, 4, 3●	230	301	—	2162	41467	●●●4, 6●2	101	289	2188	—	41687	●●●3●●2●●●3	242	879
—	2149	41203	●●●5, 4, 2, 2	159	389	—	2163	41479	●●●3●6, 3	95	299	—	2173	41719	●●●3●●4●3	139	531
2163	—	41213	●●●5, 6●●	122	227	—	2164	41491	●●●3●4●2, 2	229	539	2189	—	41729	●●●3, 2, 7●	186	211
—	2150	41221	●●●4●5●●●	215	331	2174	—	41507	●●●3●3●3, 2	254	575	—	2174	41737	●●●3, 2, 4●2●	383	519
—	2151	41227	●●●4●4●●2	181	461	2175	—	41513	●●●3●3●●●2●	494	681	2190	—	41759	●●●3, 2, 3, 5	86	455
2164	—	41231	●●●4●4, 4	82	345	2176	—	41519	●●●3●3●●4	120	547	—	2175	41761	●●●3, 2, 2●4●	405	491
—	2152	41233	●●●4●3●3●	311	393	—	2165	41521	●●●3●3, 2, 3●	413	533	2191	—	41771	●●●3, 2, 2●●●2	380	993
2165	—	41243	●●●4●3, 2●2	212	571	—	2166	41539	●●●3●2●4, 2	251	555	2192	—	41777	●●●3, 2, 2, 2, 3●	502	649
—	2153	41257	●●●4●2●●●2●	469	647	2177	—	41543	●●●3●2●3, 3	198	647	2193	—	41801	●●●3, 2●●2●2●	596	815
—	2154	41263	●●●4●2●●4	113	517	2178	—	41549	●●●3●2●2, 2●●	488	831	—	2176	41809	●●●3, 2●●●●3●	571	729
—	2155	41269	●●●4●2, 2●●●●	435	709	2179	—	41579	●●●3●2, 2●●●2	354	931	2194	—	41813	●●●3, 2●●●●●●●●	668	1081
—	2156	41281	●●●4●●●5●	271	319	—	2167	41593	●●●3●2, 4, 2●	379	549	2195	—	41843	●●●3, 2●3, 2, 2	302	737
—	2157	41299	●●●4●●●●●2, 2	333	793	2180	—	41597	●●●3●2, 5●●	248	457	2196	—	41849	●●●3, 2●4, 2●	374	543
2166	—	41333	●●●4●●3●●●●	392	643	2181	—	41603	●●●3●●●5, 2	220	479	—	2177	41851	●●●3, 2●4●2	205	579

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2178	41863	●●●3, 3, 4, 3	155	501	2208	—	42083	●●●2●3, 2, 3, 2	320	733	—	2202	42337	●●●2●●●●2, 4●	561	689
2197	—	41879	●●●3, 3, 2●●3	202	725	2209	—	42089	●●●2●3, 2●●2●	588	815	—	2203	42349	●●●2●●●●●2●2●●	659	1141
—	2179	41887	●●●3, 3, 2, 5	83	451	2210	—	42101	●●●2●3, 3●●●●	484	793	2223	—	42359	●●●2●●●●3●3	226	855
—	2180	41893	●●●3, 3●●2●●●	509	805	2211	—	42131	●●●2●2●2●2, 2	418	989	—	2204	42373	●●●2●●2, 4●●●	479	743
2198	—	41897	●●●3, 3●●●●●2●	556	769	—	2192	42139	●●●2●2●2, 2●2	377	1019	—	2205	42379	●●●2●●2, 3●●2	381	977
2199	—	41903	●●●3, 3●●●●4	130	603	—	2193	42157	●●●2●2●●●●●2●●	661	1139	—	2206	42391	●●●2●●2, 2●●3	283	1015
—	2181	41911	●●●3, 3●2●3	177	661	—	2194	42169	●●●2●2●●3, 2●	579	833	—	2207	42397	●●●2●●2, 2, 3●●	517	917
2200	—	41927	●●●3, 4, 3, 3	152	503	2212	—	42179	●●●2●2, 2, 4, 2	314	699	—	2208	42403	●●●2●●2●●3, 2	419	955
—	2182	41941	●●●3, 4●●●●●●	431	699	—	2195	42181	●●●2●2, 2, 3●●●	557	871	2224	—	42407	●●●2●●2●●2, 3	302	1023
—	2183	41947	●●●3, 4●2●2	221	605	—	2196	42187	●●●2●2, 2, 2●●2	415	1073	—	2209	42409	●●●2●●2●●●●●2●	789	1091
—	2184	41953	●●●3, 5, 4●	243	301	—	2197	42193	●●●2●2, 2●●3●	617	789	—	2210	42433	●●●2●●3, 5●	359	427
2201	—	41957	●●●3, 5, 2●●●	312	497	2213	—	42197	●●●2●2, 2●●●●●●	718	1163	2225	—	42437	●●●2●●3, 3●●●	514	805
—	2185	41959	●●●3, 5, 2, 3	127	439	2214	—	42209	●●●2●2, 3, 4●	434	535	2226	—	42443	●●●2●●3, 2●●2	378	979
2202	—	41969	●●●3, 6, 3●	218	287	2215	—	42221	●●●2●2, 3●2●●	494	857	—	2211	42451	●●●2●●3●●2, 2	397	949
2203	—	41981	●●●3, 8●●	102	193	—	2198	42223	●●●2●2, 3●4	131	625	—	2212	42457	●●●2●●3●2, 2●	571	813
—	2186	41983	●●●3, 10	11	113	2216	—	42227	●●●2●2, 4, 2, 2	292	715	2227	—	42461	●●●2●●3●3●●	416	745
2204	—	41999	●●●2●6, 4	74	307	2217	—	42239	●●●2●2, 8	30	251	—	2213	42463	●●●2●●3●5	87	503
—	2187	42013	●●●2●5, 3●●	263	463	2218	—	42257	●●●2●●●3●3●	526	665	2228	—	42467	●●●2●●4, 3, 2	280	647
2205	—	42017	●●●2●4●4●	304	367	2219	—	42281	●●●2●●●2●●●2●	782	1079	2229	—	42473	●●●2●●4●●2●	492	685
—	2188	42019	●●●2●4●3, 2	241	545	—	2199	42283	●●●2●●●2●●●●2	485	1267	—	2214	42487	●●●2●●5●3	125	481
2206	—	42023	●●●2●4●2, 3	178	597	2220	—	42293	●●●2●●●2, 2●●●●	722	1177	2230	—	42491	●●●2●●6●2	144	413
—	2189	42043	●●●2●4, 3●2	219	605	2221	—	42299	●●●2●●●2, 3●2	346	959	—	2215	42499	●●●2, 2, 7, 2	141	301
—	2190	42061	●●●2●3●2, 2●●	487	829	—	2200	42307	●●●2●●●●●4, 2	365	809	2231	—	42509	●●●2, 2, 5, 2●●	328	553
2207	—	42071	●●●2●3●●●●3	238	859	2222	—	42323	●●●2●●●●●●●2, 2	542	1291	2232	—	42533	●●●2, 2, 3●2●●●	550	867
—	2191	42073	●●●2●3●●2, 2●	569	807	—	2201	42331	●●●2●●●●●●●2●2	463	1261	2233	—	42557	●●●2, 2, 3, 4●●	344	623

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2234	—	42569	●●●2, 2, 2●2●2●	658	899	2246	—	42797	●●●2, 3, 2●●2●●	542	933	—	2241	43063	●●●●●5, 2●3	143	527
—	2216	42571	●●●2, 2, 2●2●●2	417	1075	2247	—	42821	●●●2, 3●●3●●●	504	787	2259	—	43067	●●●●●5, 3●2	188	519
—	2217	42577	●●●2, 2, 2●●●3●	639	815	—	2229	42829	●●●2, 3●●2, 2●●	539	919	—	2242	43093	●●●●●4●●●●●●●	545	881
—	2218	42589	●●●2, 2, 2●●3●●	509	907	2248	—	42839	●●●2, 3●●●●●3	256	927	2260	—	43103	●●●●●4●●5	82	455
2235	—	42611	●●●2, 2, 2, 3, 2, 2	360	877	—	2230	42841	●●●2, 3●●●2, 2●	609	865	—	2243	43117	●●●●●4, 2●2●●	439	759
2236	—	42641	●●●2, 2●●2●3●	614	779	—	2231	42853	●●●2, 3●2, 2●●●	555	881	2261	—	43133	●●●●●4, 5●●	230	423
—	2219	42643	●●●2, 2●●2●2, 2	449	1063	—	2232	42859	●●●2, 3●2●●●2	361	951	2262	—	43151	●●●●●3●3, 4	140	597
—	2220	42649	●●●2, 2●●2, 2, 2●	687	971	2249	—	42863	●●●2, 3●2●4	132	625	—	2244	43159	●●●●●3●2●●3	243	869
—	2221	42667	●●●2, 2●●●●●●●●2	503	1317	2250	—	42899	●●●2, 4, 2●2, 2	304	721	—	2245	43177	●●●●●3●●●●●●2●	713	985
2237	—	42677	●●●2, 2●●●2●●●●	722	1179	—	2233	42901	●●●2, 4, 2●●●●●	495	799	—	2246	43189	●●●●●3●●2●●●●	639	1043
2238	—	42683	●●●2, 2●●●3●2	338	941	2251	—	42923	●●●2, 4●●●●●2	320	839	—	2247	43201	●●●●●3, 2, 5●	359	425
2239	—	42689	●●●2, 2●2, 5●	392	465	2252	—	42929	●●●2, 4●2, 3●	406	527	—	2248	43207	●●●●●3, 2, 3, 3	227	747
—	2222	42697	●●●2, 2●2, 2●2●	665	911	—	2234	42937	●●●2, 4●3, 2●	371	535	2263	—	43223	●●●●●3, 2●●●3	256	929
2240	—	42701	●●●2, 2●2, 2, 2●●	592	1011	—	2235	42943	●●●2, 4●6	43	293	—	2249	43237	●●●●●3, 3, 2●●●	533	847
—	2223	42703	●●●2, 2●2, 2, 4	173	765	2253	—	42953	●●●2, 5, 2●2●	368	505	—	2250	43261	●●●●●3, 6●●	211	393
—	2224	42709	●●●2, 2●2●●●●●●	719	1165	—	2236	42961	●●●2, 5●●3●	333	427	2264	—	43271	●●●●●2●5, 3	166	527
2241	—	42719	●●●2, 2●2●5	100	573	—	2237	42967	●●●2, 5●●●3	145	529	2265	—	43283	●●●●●2●3●2, 2	382	901
—	2225	42727	●●●2, 2●3, 2, 3	227	781	—	2238	42979	●●●2, 6, 3, 2	161	373	—	2251	43291	●●●●●2●3, 2●2	353	951
2242	—	42737	●●●2, 2●4, 3●	408	535	2254	—	42989	●●●2, 6●2●●	228	397	2266	—	43313	●●●●●2●2, 2, 3●	640	827
2243	—	42743	●●●2, 2●4●3	154	589	—	2239	43003	●●●2, 8●2	75	217	2267	—	43319	●●●●●2●2, 2●3	266	985
—	2226	42751	●●●2, 2●8	27	235	2255	—	43013	●●●●●8●●●	146	223	—	2252	43321	●●●●●2●2, 3, 2●	611	877
2244	—	42767	●●●2, 3, 4, 4	116	491	2256	—	43019	●●●●●7●●2	130	329	2268	—	43331	●●●●●2●●●4, 2	366	811
2245	—	42773	●●●2, 3, 3●●●●●	526	847	2257	—	43037	●●●●●6, 3●●	220	387	2269	—	43391	●●●●●2●●7	50	379
—	2227	42787	●●●2, 3, 2●3, 2	329	747	2258	—	43049	●●●●●5●●●2●	400	551	2270	—	43397	●●●●●2, 2, 4●●●	492	763
—	2228	42793	●●●2, 3, 2●●●2●	631	871	—	2240	43051	●●●●●5●●●●2	249	649	—	2253	43399	●●●●●2, 2, 4, 3	221	713

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2271	—	43403	●●●●●2, 2, 3●●2	392	1005	—	2265	43669	●●●●●●●●●2●●●●●	885	1427	2295	—	43973	●●●●●●4, 3●●●	446	699
—	2254	43411	●●●●●2, 2, 2●2, 2	463	1097	2285	—	43691	●●●●●●●●●●●●●●2	610	1597	—	2280	43987	●●●●●●4●●2, 2	339	811
2272	—	43427	●●●●●2, 2●●3, 2	434	989	—	2266	43711	●●●●●●●●●●6	89	589	2296	—	43991	●●●●●●4●●●3	206	751
—	2255	43441	●●●●●2, 2●2, 3●	647	839	—	2267	43717	●●●●●●●●2, 3●●●	691	1081	2297	—	43997	●●●●●●4●3●●	352	631
2273	—	43451	●●●●●2, 2●3●2	334	931	2286	—	43721	●●●●●●●●2, 2●2●	814	1115	—	2281	44017	●●●●●●6, 3●	271	357
2274	—	43457	●●●●●2, 3, 5●	376	447	—	2268	43753	●●●●●●●●3●●2●	717	997	2298	—	44021	●●●●●●6●●●●	284	469
2275	—	43481	●●●●●2, 3●2, 2●	602	857	—	2269	43759	●●●●●●●●3●4	157	751	2299	—	44027	●●●●●●7●2	112	323
2276	—	43487	●●●●●2, 3●5	92	531	—	2270	43777	●●●●●●2, 7●	251	285	—	2282	44029	●●●●●●8●●	125	237
2277	—	43499	●●●●●2, 4●●●2	318	841	2287	—	43781	●●●●●●2, 5●●●	400	617	—	2283	44041	●●●●2, 6●2●	275	371
2278	—	43517	●●●●●2, 7●●	176	331	—	2271	43783	●●●●●●2, 5, 3	183	583	—	2284	44053	●●●●2, 5●●●●●	389	625
2279	—	43541	●●●●●●●4●●●●●	548	881	2288	—	43787	●●●●●●2, 4●●2	332	847	—	2285	44059	●●●●2, 5, 2●2	223	599
—	2256	43543	●●●●●●●4●●3	215	763	—	2272	43789	●●●●●●2, 4, 2●●	481	813	—	2286	44071	●●●●2, 4●2, 3	197	661
—	2257	43573	●●●●●●●3, 2●●●●	671	1093	2289	—	43793	●●●●●●2, 3●3●	562	711	2300	—	44087	●●●●2, 4, 2●3	184	679
2280	—	43577	●●●●●●●3, 3, 2●	574	823	—	2273	43801	●●●●●●2, 3, 2, 2●	643	907	—	2287	44089	●●●●2, 4, 3, 2●	425	609
—	2258	43579	●●●●●●●3, 3●2	325	899	2290	—	43853	●●●●●●2●●2, 2●●	708	1207	—	2288	44101	●●●●2, 3●3●●●	487	759
—	2259	43591	●●●●●●●2●3, 3	283	925	—	2274	43867	●●●●●●2●●●2●2	465	1267	2301	—	44111	●●●●2, 3●2, 4	153	689
—	2260	43597	●●●●●●●2●2, 2●●	697	1187	2291	—	43889	●●●●●●2●3, 3●	572	747	—	2289	44119	●●●●2, 3●●●●3	259	935
2281	—	43607	●●●●●●●2●●●●3	338	1221	—	2275	43891	●●●●●●2●3, 2, 2	397	969	2302	—	44123	●●●●2, 3●●2●2	360	979
—	2261	43609	●●●●●●●2●●2, 2●	807	1145	2292	—	43913	●●●●●●3, 3●2●	556	757	2303	—	44129	●●●●2, 3, 2, 4●	448	549
2282	—	43613	●●●●●●●2●●3●●	600	1069	—	2276	43933	●●●●●●3, 2, 3●●	475	843	—	2290	44131	●●●●2, 3, 2, 3, 2	347	795
—	2262	43627	●●●●●●●2, 2●●●2	503	1323	2293	—	43943	●●●●●●3●●2, 3	274	929	2304	—	44159	●●●●2, 3, 7	44	321
—	2263	43633	●●●●●●●2, 3, 3●	613	799	—	2277	43951	●●●●●●3●●●4	167	775	2305	—	44171	●●●●2, 2●3●●2	370	947
2283	—	43649	●●●●●●●●●6●	364	419	2294	—	43961	●●●●●●3●3, 2●	514	741	—	2291	44179	●●●●2, 2●2●2, 2	445	1053
—	2264	43651	●●●●●●●●●5, 2	309	673	—	2278	43963	●●●●●●3●3●2	287	801	2306	—	44189	●●●●2, 2●2, 3●●	520	921
2284	—	43661	●●●●●●●●●3, 2●●	652	1105	—	2279	43969	●●●●●●4, 5●	313	373	2307	—	44201	●●●●2, 2●●●●●2●	820	1133

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2292	44203	●●●●2, 2●●●●●●2	507	1327	2320	—	44507	●●●●2●3●2●2	322	881	2336	—	44753	●●●●3●2●●3●	540	691
2308	—	44207	●●●●2, 2●●●●4	194	895	2321	—	44519	●●●●2●4, 2, 3	188	649	2337	—	44771	●●●●3●3, 3, 2	284	655
—	2293	44221	●●●●2, 2●●4●●	419	763	2322	—	44531	●●●●2●5, 2, 2	224	551	—	2314	44773	●●●●3●3, 2●●●	481	765
2309	—	44249	●●●●2, 2, 2●2, 2●	680	967	—	2305	44533	●●●●2●5●●●●	345	569	2338	—	44777	●●●●3●3●●2●	504	701
—	2294	44257	●●●●2, 2, 3, 4●	455	561	2323	—	44537	●●●●2●6, 2●	260	381	2339	—	44789	●●●●3●4●●●●	376	619
—	2295	44263	●●●●2, 2, 3, 2, 3	243	835	2324	—	44543	●●●●2●9	18	175	—	2315	44797	●●●●3●6●●	179	335
2310	—	44267	●●●●2, 2, 3●●●2	380	1003	2325	—	44549	●●●●3, 6●●●	244	375	—	2316	44809	●●●●4, 4●2●	337	457
—	2296	44269	●●●●2, 2, 3●2●●	517	897	—	2306	44563	●●●●3, 4●2, 2	267	629	2340	—	44819	●●●●4, 3●2, 2	268	633
2311	—	44273	●●●●2, 2, 4, 3●	442	579	2326	—	44579	●●●●3, 3●3, 2	290	657	—	2317	44839	●●●●4, 2●2, 3	199	671
2312	—	44279	●●●●2, 2, 4●3	168	641	—	2307	44587	●●●●3, 3●●●●2	349	911	2341	—	44843	●●●●4, 2●●●●2	324	847
—	2297	44281	●●●●2, 2, 5, 2●	367	535	—	2308	44617	●●●●3, 2●2●2●	595	813	—	2318	44851	●●●●4, 2, 2, 2, 2	301	727
—	2298	44293	●●●●2●●5●●●	377	581	2327	—	44621	●●●●3, 2●2, 2●●	536	913	2342	—	44867	●●●●4●●4, 2	232	515
2313	—	44351	●●●●2●●2, 6	80	511	—	2309	44623	●●●●3, 2●2, 4	159	695	2343	—	44879	●●●●4●●2, 4	130	571
2314	—	44357	●●●●2●●●●3●●●	658	1027	2328	—	44633	●●●●3, 2●●2, 2●	618	877	—	2319	44887	●●●●4●●●●●3	209	757
—	2299	44371	●●●●2●●●●●●2, 2	547	1303	—	2310	44641	●●●●3, 2, 2, 4●	441	541	—	2320	44893	●●●●4●●●3●●	367	655
2315	—	44381	●●●●2●●●●●3●●	596	1063	—	2311	44647	●●●●3, 2, 2, 2, 3	241	823	2344	—	44909	●●●●4●2●2●●	400	693
—	2300	44383	●●●●2●●●●●5	129	725	2329	—	44651	●●●●3, 2, 2●●●2	382	1005	—	2321	44917	●●●●4●3●●●●	377	619
—	2301	44389	●●●●2●●●2, 2●●●	743	1179	2330	—	44657	●●●●3, 2, 3, 3●	464	605	2345	—	44927	●●●●4●7	28	219
2316	—	44417	●●●●2●2, 6●	312	361	—	2312	44683	●●●●3●●3●●2	333	853	2346	—	44939	●●●●5, 3●●2	206	529
—	2302	44449	●●●●2●2●●4●	531	647	2331	—	44687	●●●●3●●3, 4	146	625	—	2322	44953	●●●●5, 2, 2, 2●	361	511
2317	—	44453	●●●●2●2●●2●●●	714	1129	2332	—	44699	●●●●3●●2, 2●2	356	963	—	2323	44959	●●●●5, 2, 5	61	333
2318	—	44483	●●●●2●3, 4, 2	286	639	—	2313	44701	●●●●3●●2, 3●●	461	817	2347	—	44963	●●●●5●●3, 2	216	493
—	2303	44491	●●●●2●3, 2●●2	371	961	2333	—	44711	●●●●3●●●●2, 3	274	927	—	2324	44971	●●●●5●●●●●2	249	653
—	2304	44497	●●●●2●3●●3●	541	693	2334	—	44729	●●●●3●●●3, 2●	530	763	—	2325	44983	●●●●5●2●3	127	475
2319	—	44501	●●●●2●3●●●●●●	626	1015	2335	—	44741	●●●●3●2, 3●●●	494	773	2348	—	44987	●●●●5●3●2	160	447

z′	z″	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z′	z″	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z′	z″	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2326	45007	●●●●6, 2, 4	71	317	2363	—	45317	●●2, 3●5●●●	276	425	—	2349	45589	●●2, 2●4●●●●●●	451	725
—	2327	45013	●●●●6●●●●●●●	289	469	—	2337	45319	●●2, 3●5, 3	127	403	2376	—	45599	●●2, 2●4, 5	80	417
2349	—	45053	●●●●10●●	58	111	2364	—	45329	●●2, 3●3●3●	398	503	—	2350	45613	●●2, 2●3●●2●●	509	875
—	2328	45061	●●2, 9●●●	99	151	—	2338	45337	●●2, 3●3, 2, 2●	459	647	—	2351	45631	●●2, 2●3, 6	63	395
2350	—	45077	●●2, 7●●●●●	200	321	2365	—	45341	●●2, 3●3, 3●●	354	625	2377	—	45641	●●2, 2●2●2●2●	642	877
2351	—	45083	●●2, 7, 2●2	116	311	—	2339	45343	●●2, 3●3, 5	83	437	2378	—	45659	●●2, 2●2●●2●2	390	1061
2352	—	45119	●●2, 6, 6	32	197	—	2340	45361	●●2, 3●2, 2, 3●	493	637	—	2352	45667	●●2, 2●2, 2, 3, 2	373	855
—	2329	45121	●●2, 5●5●	187	219	2366	—	45377	●●2, 3●●●5●	344	405	—	2353	45673	●●2, 2●2, 2●●2●	683	947
—	2330	45127	●●2, 5●3, 3	123	401	2367	—	45389	●●2, 3●●●2, 2●●	544	927	2379	—	45677	●●2, 2●2, 2●2●●	574	993
2353	—	45131	●●2, 5●2●●2	214	551	—	2341	45403	●●2, 3●●●●●2●2	361	983	—	2354	45691	●●2, 2●2, 4●2	247	695
2354	—	45137	●●2, 5●●●3●	332	423	2368	—	45413	●●2, 3●●2, 2●●●	578	917	—	2355	45697	●●2, 2●●●6●	305	351
—	2331	45139	●●2, 5●●●2, 2	241	573	—	2342	45427	●●2, 3●●3, 2, 2	317	773	2380	—	45707	●●2, 2●●●3●●2	380	973
2355	—	45161	●●2, 5, 2●●2●	376	521	—	2343	45433	●●2, 3●●4, 2●	395	573	2381	—	45737	●●2, 2●●●●●●●●2●	830	1147
2356	—	45179	●●2, 5, 4●2	140	393	—	2344	45439	●●2, 3●●7	39	295	—	2356	45751	●●2, 2●●●●●2●3	271	1009
—	2332	45181	●●2, 5, 5●●	167	307	—	2345	45481	●●2, 3, 2●●●●●2●	643	889	—	2357	45757	●●2, 2●●●●4●●	421	767
2357	—	45191	●●2, 4●4, 3	130	417	2369	—	45491	●●2, 3, 2●2, 2, 2	358	867	—	2358	45763	●●2, 2●●2, 4, 2	329	733
2358	—	45197	●●2, 4●3, 2●●	336	569	2370	—	45497	●●2, 3, 2●3, 2●	470	677	2382	—	45767	●●2, 2●●2, 3, 3	254	837
2359	—	45233	●●2, 4●●2, 3●	424	549	2371	—	45503	●●2, 3, 2●6	56	375	2383	—	45779	●●2, 2●●2●●2, 2	462	1103
—	2333	45247	●●2, 4●●6	49	321	—	2346	45523	●●2, 3, 3●●2, 2	331	791	—	2359	45817	●●2, 2●●5, 2●	353	515
—	2334	45259	●●2, 4, 2, 2●●2	289	747	2372	—	45533	●●2, 3, 3●3●●	348	623	2384	—	45821	●●2, 2●●6●●	220	411
2360	—	45263	●●2, 4, 2, 2, 4	120	529	—	2347	45541	●●2, 3, 4, 2●●●	399	635	—	2360	45823	●●2, 2●●8	29	249
2361	—	45281	●●2, 4, 3, 4●	306	377	—	2348	45553	●●2, 3, 5, 3●	287	377	2385	—	45827	●●2, 2, 2, 6, 2	186	401
—	2335	45289	●●2, 4, 3●●2●	421	585	2373	—	45557	●●2, 3, 5●●●●	304	501	2386	—	45833	●●2, 2, 2, 4●2●	442	599
2362	—	45293	●●2, 4, 3●2●●	350	607	2374	—	45569	●●2, 2●8●	148	165	—	2361	45841	●●2, 2, 2, 3●3●	483	611
—	2336	45307	●●2, 4, 5●2	137	389	2375	—	45587	●●2, 2●4●2, 2	274	645	—	2362	45853	●●2, 2, 2, 3, 3●●	425	751

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2387	—	45863	●●2, 2, 2, 2●2, 3	268	903	—	2374	46171	●●2●●3●●2●2	349	949	2411	—	46451	●●2●●●●●●3, 2, 2	412	1005
2388	—	45869	●●2, 2, 2,2●●2●●	606	1043	2401	—	46181	●●2●●3, 2, 2●●●	576	913	2412	—	46457	●●2●●●●●●4, 2●	512	743
2389	—	45887	●●2, 2, 2, 2, 6	70	449	—	2375	46183	●●2●●3, 2, 2, 3	239	815	—	2389	46471	●●2●●●2, 4, 3	219	707
2390	—	45893	●●2, 2, 2●●3●●●	572	893	2402	—	46187	●●2●●3, 2●●●2	380	999	—	2390	46477	●●2●●●2, 3, 2●●	557	945
—	2363	45943	●●2, 2, 2●3●3	193	731	2403	—	46199	●●2●●3, 3●3	184	693	—	2391	46489	●●2●●●2, 2, 2, 2●	695	983
—	2364	45949	●●2, 2, 2●5●●	275	509	—	2376	46219	●●2●●2●3●●2	363	929	2413	—	46499	●●2●●●2●●3, 2	426	971
2391	—	45953	●●2, 2, 3, 6●	258	299	2404	—	46229	●●2●●2●2●●●●●	714	1151	—	2392	46507	●●2●●●2●●●●●●2	495	1297
2392	—	45959	●●2, 2, 3, 4, 3	176	569	—	2377	46237	●●2●●2●2, 3●●	511	905	2414	—	46511	●●2●●●2●●●4	188	871
2393	—	45971	●●2, 2, 3, 2●2, 2	364	863	—	2378	46261	●●2●●2●●2●●●●	721	1177	2415	—	46523	●●2●●●2●3●2	326	909
—	2365	45979	●●2, 2, 3, 2, 2●2	323	875	2405	—	46271	●●2●●2●●6	74	487	—	2393	46549	●●2●●●3●●●●●●	647	1049
2394	—	45989	●●2, 2, 3●●2●●●	576	911	—	2379	46273	●●2●●2, 2, 5●	401	475	2416	—	46559	●●2●●●3●5	88	509
—	2366	46021	●●2, 2, 4, 3●●●	395	619	—	2380	46279	●●2●●2, 2, 3, 3	253	833	—	2394	46567	●●2●●●4, 2, 3	195	673
—	2367	46027	●●2, 2, 4, 2●●2	289	749	2406	—	46301	●●2●●2, 2●3●●	494	883	—	2395	46573	●●2●●●4●2●●	409	711
2395	—	46049	●●2, 2, 5, 4●	272	337	2407	—	46307	●●2●●2, 3, 3, 2	346	797	2417	—	46589	●●2●●●7●●	164	309
—	2368	46051	●●2, 2, 5, 3, 2	207	479	—	2381	46309	●●2●●2, 3, 2●●●	587	933	—	2396	46591	●●2●●●9	19	183
2396	—	46061	●●2, 2, 5●2●●	296	515	—	2382	46327	●●2●●2, 4●3	167	637	2418	—	46601	●●2●2, 5●2●	344	465
2397	—	46073	●●2, 2, 7, 2●	190	279	2408	—	46337	●●2●●●●7●	236	267	2419	—	46619	●●2●2, 4, 2●2	268	721
2398	—	46091	●●2●●6●●2	170	431	2409	—	46349	●●2●●●●4, 2●●	460	777	—	2397	46633	●●2●2, 3●●●2●	607	837
—	2369	46093	●●2●●6, 2●●	249	419	—	2383	46351	●●2●●●●4, 4	143	603	—	2398	46639	●●2●2, 3●●4	147	671
—	2370	46099	●●2●●5●2, 2	225	529	—	2384	46381	●●2●●●●2●●2●●	691	1189	2420	—	46643	●●2●2, 3, 2, 2, 2	358	863
2399	—	46103	●●2●●5●●3	146	517	—	2385	46399	●●2●●●●2, 6	81	517	2421	—	46649	●●2●2, 3, 3, 2●	486	697
2400	—	46133	●●2●●4, 2●●●●	476	775	—	2386	46411	●●2●●●●●●●2●●2	505	1303	—	2399	46663	●●2●2, 2●3, 3	237	775
—	2371	46141	●●2●●4, 4●●	287	519	2410	—	46439	●●2●●●●●2, 2, 3	312	1067	2422	—	46679	●●2●2, 2●●●●3	282	1019
—	2372	46147	●●2●●3●4, 2	263	581	—	2387	46441	●●2●●●●●●2●●2●	805	1117	—	2400	46681	●●2●2, 2●●2, 2●	673	955
—	2373	46153	●●2●●3●2●2●	569	777	—	2388	46447	●●2●●●●●●2●4	181	855	—	2401	46687	●●2●2, 2●●5	109	609

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2423	—	46691	●●2●2, 2, 2, 3, 2	372	853	2437	—	46997	●●2●4, 2●●●●●●	464	749	—	2425	47293	●●3, 3●●4●●	295	537
2424	—	46703	●●2●2, 2, 2●4	154	725	—	2413	47017	●●2●4●●●●●2●	485	671	2450	—	47297	●●3, 3, 2, 5●	288	341
—	2402	46723	●●2●2●●5, 2	251	547	—	2414	47041	●●2●5, 5●	207	247	2451	—	47303	●●3, 3, 2, 3, 3	182	599
2425	—	46727	●●2●2●●4, 3	206	663	2438	—	47051	●●2●5, 2●●2	214	555	2452	—	47309	●●3, 3, 2, 2, 2●●	440	751
—	2403	46747	●●2●2●●2, 2●2	393	1063	2439	—	47057	●●2●5●●3●	308	395	—	2426	47317	●●3, 3, 2●●●●●●●	539	873
2426	—	46751	●●2●2●●2, 5	116	625	—	2415	47059	●●2●5●●2, 2	221	529	2453	—	47339	●●3, 3, 3●●●●2	274	723
2427	—	46757	●●2●2●●●●2●●●	722	1141	2440	—	47087	●●2●6●4	54	263	2454	—	47351	●●3, 3, 4●3	122	465
2428	—	46769	●●2●2●●●2, 3●	632	819	2441	—	47093	●●2●7●●●●	176	291	—	2427	47353	●●3, 3, 5, 2●	267	389
—	2404	46771	●●2●2●●●2, 2, 2	445	1077	2442	—	47111	●●3, 8, 3	58	181	2455	—	47363	●●3, 2●6, 2	154	331
—	2405	46807	●●2●2●2●●●3	265	963	—	2416	47119	●●3, 7, 4	51	211	2456	—	47381	●●3, 2●3●●●●●●	494	795
2429	—	46811	●●2●2●2●2●2	362	989	2443	—	47123	●●3, 6●2, 2	146	343	2457	—	47387	●●3, 2●3, 2●2	278	749
2430	—	46817	●●2●2●3, 4●	414	511	2444	—	47129	●●3, 6, 2, 2●	234	329	—	2428	47389	●●3, 2●3, 3●●	363	641
—	2406	46819	●●2●2●3, 3, 2	317	731	—	2417	47137	●●3, 5●4●	213	257	—	2429	47407	●●3, 2●2●●4	147	673
2431	—	46829	●●2●2●3●2●●	466	809	—	2418	47143	●●3, 5●2, 3	125	419	2458	—	47417	●●3, 2●2, 3, 2●	480	689
—	2407	46831	●●2●2●3●4	123	589	2445	—	47147	●●3, 5●●●●2	206	537	—	2430	47419	●●3, 2●2, 3●2	271	751
2432	—	46853	●●2●3, 5●●●	300	463	—	2419	47149	●●3, 5●●2●●	287	493	—	2431	47431	●●3, 2●●●3, 3	225	737
—	2408	46861	●●2●3, 4, 2●●	359	607	—	2420	47161	●●3, 5, 3, 2●	273	391	2459	—	47441	●●3, 2●●●●●3●	590	753
—	2409	46867	●●2●3, 3●2, 2	307	725	2446	—	47189	●●3, 4●●●●●●●●	446	721	2460	—	47459	●●3, 2●●2, 3, 2	342	785
2433	—	46877	●●2●3, 3, 3●●	366	647	2447	—	47207	●●3, 4, 2, 2, 3	164	559	—	2432	47491	●●3, 2, 2, 5, 2	211	461
2434	—	46889	●●2●3, 2●●●2●	602	831	—	2421	47221	●●3, 4, 3●●●●	351	575	—	2433	47497	●●3, 2, 2, 3●2●	477	649
2435	—	46901	●●2●3, 2, 2●●●●	550	897	2448	—	47237	●●3, 3●4●●●	316	489	2461	—	47501	●●3, 2, 2, 3, 2●●	438	743
2436	—	46919	●●2●3●●3, 3	210	689	—	2422	47251	●●3, 3●2●2, 2	309	731	2462	—	47507	●●3, 2, 2, 2●2, 2	360	853
—	2410	46933	●●2●3●●●●●●●●●	637	1031	—	2423	47269	●●3, 3●●●2●●●	521	823	2463	—	47513	●●3, 2, 2, 2, 2, 2●	548	775
—	2411	46957	●●2●3●2●2●●	467	809	2449	—	47279	●●3, 3●●●●4	136	627	—	2434	47521	●●3, 2, 2●●4●	431	525
—	2412	46993	●●2●4, 2●3●	391	497	—	2424	47287	●●3, 3●●2●3	189	703	—	2435	47527	●●3, 2, 2●●2, 3	243	823

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2436	47533	●●3, 2, 2●●●2●●	541	933	—	2450	47791	●●3●●●●●●●●4	173	799	—	2461	48073	●●3●4, 2●2●	371	509
2464	—	47543	●●3, 2, 2●2●3	204	761	—	2451	47797	●●3●●●●●●2●●●●	651	1063	—	2462	48079	●●3●4, 2, 4	95	423
—	2437	47563	●●3, 2, 3, 2●●2	307	795	2475	—	47807	●●3●●●●●●6	66	437	—	2463	48091	●●3●4●2●2	199	545
—	2438	47569	●●3, 2, 3●●3●	449	575	—	2452	47809	●●3●●●2, 5●	355	421	—	2464	48109	●●3●5●2●●	235	409
—	2439	47581	●●3, 2, 3●3●●	339	607	2476	—	47819	●●3●●●2, 2●●2	380	983	2489	—	48119	●●3●6●3	70	271
2465	—	47591	●●3, 2, 4, 2, 3	158	545	2477	—	47837	●●3●●●2●3●●	430	769	—	2465	48121	●●3●7, 2●	149	219
—	2440	47599	●●3, 2, 4●4	87	419	2478	—	47843	●●3●●●3, 3, 2	298	687	2490	—	48131	●●4, 8, 2	74	157
2466	—	47609	●●3, 2, 6, 2●	222	325	—	2453	47857	●●3●●●4, 3●	373	489	—	2466	48157	●●4, 5, 3●●	197	347
—	2441	47623	●●3●●6, 3	105	331	—	2454	47869	●●3●●●6●●	191	357	—	2467	48163	●●4, 4●3, 2	179	405
—	2442	47629	●●3●●5, 2●●	283	477	—	2455	47881	●●3●2, 4●2●	377	511	2491	—	48179	●●4, 4, 2, 2, 2	208	501
2467	—	47639	●●3●●4●●3	162	575	2479	—	47903	●●3●2, 3, 5	84	445	—	2468	48187	●●4, 4, 3●2	161	445
—	2443	47653	●●3●●3●2●●●	479	755	—	2456	47911	●●3●2, 2●2, 3	227	765	—	2469	48193	●●4, 3●5●	219	257
2468	—	47657	●●3●●3●●●2●	536	739	—	2457	47917	●●3●2, 2●●2●●	513	883	2492	—	48197	●●4, 3●3●●●	324	505
—	2444	47659	●●3●●3●●●●2	333	869	2480	—	47933	●●3●2, 2, 4●●	320	581	2493	—	48221	●●4, 3●●3●●	306	545
2469	—	47681	●●3●●2●5●	326	383	2481	—	47939	●●3●2●●4, 2	270	599	2494	—	48239	●●4, 3, 2●4	96	451
2470	—	47699	●●3●●2●●●2, 2	408	971	—	2458	47947	●●3●2●●2●●2	363	937	—	2470	48247	●●4, 3, 3●3	125	471
—	2445	47701	●●3●●2●●●●●●●●	661	1069	2482	—	47951	●●3●2●●2, 4	152	667	—	2471	48259	●●4, 2●5, 2	165	359
2471	—	47711	●●3●●2●●5	98	547	2483	—	47963	●●3●2●●●2●2	338	921	—	2472	48271	●●4, 2●3, 4	107	457
—	2446	47713	●●3●●2, 2, 4●	433	531	2484	—	47969	●●3●2●2, 4●	406	499	2495	—	48281	●●4, 2●2, 2, 2●	448	633
2472	—	47717	●●3●●2, 2, 2●●●	572	907	—	2459	47977	●●3●2●2●●2●	567	787	2496	—	48299	●●4, 2●●●●●●2	332	869
—	2447	47737	●●3●●2, 4, 2●	401	581	2485	—	47981	●●3●2●2●2●●	474	821	2497	—	48311	●●4, 2●●2●3	176	655
2473	—	47741	●●3●●2, 5●●	262	483	2486	—	48017	●●3●3, 2●3●	410	521	—	2473	48313	●●4, 2●●3, 2●	401	577
—	2448	47743	●●3●●2, 7	41	303	2487	—	48023	●●3●3, 2●●3	188	675	—	2474	48337	●●4, 2, 2●●3●	423	541
2474	—	47777	●●3●●●●●●●4●	494	601	2488	—	48029	●●3●3, 2, 3●●	342	607	2498	—	48341	●●4, 2, 2●●●●●●	492	797
—	2449	47779	●●3●●●●●●●3, 2	387	881	—	2460	48049	●●3●3●2, 3●	403	523	2499	—	48353	●●4, 2, 3, 4●	296	365

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2500	—	48371	●●4, 2, 4, 2, 2	198	485	—	2484	48619	●●4●4●●●2	181	479	2526	—	48869	●●5●3, 2●●●	276	439
2501	—	48383	●●4, 2, 8	20	169	2516	—	48623	●●4●4●4	64	309	—	2499	48871	●●5●3, 2, 3	113	389
—	2475	48397	●●4●●4, 2●●	293	495	2517	—	48647	●●5, 6, 3	68	215	—	2500	48883	●●5●4, 2, 2	139	341
2502	—	48407	●●4●●3●●3	162	577	—	2485	48649	●●5, 5●2●	193	261	—	2501	48889	●●5●5, 2●	165	241
—	2476	48409	●●4●●3, 2, 2●	395	557	—	2486	48661	●●5, 4●●●●●●	263	423	—	2502	48907	●●6, 4●●2	121	309
2503	—	48413	●●4●●3, 3●●	304	537	—	2487	48673	●●5, 3●4●	219	265	2527	—	48947	●●6, 2, 2, 2, 2	166	401
2504	—	48437	●●4●●2, 2●●●●	468	763	2518	—	48677	●●5, 3●2●●●	300	473	2528	—	48953	●●6, 2, 3, 2●	222	319
2505	—	48449	●●4●●●●●5●	286	337	—	2488	48679	●●5, 3●2, 3	127	427	—	2503	48973	●●6●●2, 2●●	241	411
—	2477	48463	●●4●●●●2, 4	133	583	2519	—	48731	●●5, 2●●2●2	212	577	2529	—	48989	●●6●●●3●●	200	357
2506	—	48473	●●4●●●●●●2, 2●	512	727	—	2489	48733	●●5, 2●●3●●	271	483	—	2504	48991	●●6●●●5	43	243
2507	—	48479	●●4●●●●●●5	82	461	—	2490	48751	●●5, 2, 2●4	83	391	—	2505	49003	●●6●2●●●2	159	419
—	2478	48481	●●4●●●2, 4●	359	441	—	2491	48757	●●5, 2, 3●●●●	297	487	—	2506	49009	●●6●3, 3●	189	247
—	2479	48487	●●4●●●2, 2, 3	195	667	2520	—	48761	●●5, 2, 4, 2●	238	345	2530	—	49019	●●6●4●2	88	249
2508	—	48491	●●4●●●2●●●2	308	811	2521	—	48767	●●5, 2, 7	24	179	2531	—	49031	●●7, 4, 3	62	201
2509	—	48497	●●4●●●3, 3●	370	483	2522	—	48779	●●5●●3●●2	194	497	—	2507	49033	●●7, 3●2●	171	233
—	2480	48523	●●4●2, 3●●2	239	613	—	2492	48781	●●5●●3, 2●●	279	473	2532	—	49037	●●7, 3, 2●●	156	265
2510	—	48527	●●4●2, 3, 4	104	447	—	2493	48787	●●5●●2●2, 2	231	547	2533	—	49043	●●7, 2●2, 2	126	299
2511	—	48533	●●4●2, 2●●●●●	458	739	—	2494	48799	●●5●●2, 5	61	329	—	2508	49057	●●7●●4●	145	177
2512	—	48539	●●4●2, 2, 2●2	250	677	2523	—	48809	●●5●●●●●●●●2●	416	575	—	2509	49069	●●7●●●2●●	179	309
—	2481	48541	●●4●2, 2, 3●●	323	573	—	2495	48817	●●5●●●2, 3●	331	429	—	2510	49081	●●7●3, 2●	149	215
2513	—	48563	●●4●2●2, 2, 2	272	659	2524	—	48821	●●5●●●2●●●●	368	601	2534	—	49103	●●8, 2, 4	36	161
—	2482	48571	●●4●2●3●2	199	555	—	2496	48823	●●5●●●2●3	135	503	2535	—	49109	●●8●●●●●●●	146	237
—	2483	48589	●●4●3, 2, 2●●	327	559	—	2497	48847	●●5●2, 2, 4	87	385	—	2511	49117	●●8●3●●	93	167
2514	—	48593	●●4●3●●3●	338	433	2525	—	48857	●●5●2●2, 2●	324	461	2536	—	49121	●●9, 4●	78	97
2515	—	48611	●●4●4, 3, 2	170	393	—	2498	48859	●●5●2●2●2	187	511	—	2512	49123	●●9, 3, 2	59	137

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2537	—	49139	●●10, 2, 2	44	109	2550	—	49409	2, 5●7●	102	115	2561	—	49667	2, 4●7, 2	86	183
2538	—	49157	2, 11●●●	48	73	—	2525	49411	2, 5●6, 2	89	191	—	2539	49669	2, 4●6●●●	161	247
2539	—	49169	2, 9●3●	82	103	—	2526	49417	2, 5●4●2●	215	291	—	2540	49681	2, 4●4●3●	245	309
—	2513	49171	2, 9●2, 2	61	143	—	2527	49429	2, 5●3●●●●●	289	465	2562	—	49697	2, 4●3●4●	254	307
—	2514	49177	2, 9, 2, 2●	99	139	2551	—	49433	2, 5●3, 2, 2●	276	389	—	2541	49711	2, 4●3●●4	95	433
2540	—	49193	2, 8●●●2●	146	201	2552	—	49451	2, 5●2●●●●2	224	585	2563	—	49727	2, 4●3, 6	42	263
2541	—	49199	2, 8●●4	36	163	—	2528	49459	2, 5●2, 2, 2, 2	211	509	2564	—	49739	2, 4●2●2●●2	272	701
—	2515	49201	2, 8, 2, 3●	125	161	2553	—	49463	2, 5●2, 2●3	124	459	—	2542	49741	2, 4●2●2, 2●●	387	659
—	2516	49207	2, 8, 2●3	53	195	—	2529	49477	2, 5●●●3●●●	307	479	—	2543	49747	2, 4●2●●●2, 2	303	721
2542	—	49211	2, 8, 3●2	70	193	2554	—	49481	2, 5●●●2●2●	368	503	2565	—	49757	2, 4●2●●3●●	334	595
2543	—	49223	2, 7●3, 3	66	215	2555	—	49499	2, 5●●●●2●2	220	599	—	2544	49783	2, 4●2, 3●3	135	509
2544	—	49253	2, 7, 2. 2●●●	190	301	2556	—	49523	2, 5●●3, 2, 2	194	473	2566	—	49787	2, 4●2, 4●2	166	467
—	2517	49261	2, 7, 2●2●●	173	299	2557	—	49529	2, 5●●4, 2●	242	351	—	2545	49789	2, 4●2, 5●●	197	363
2545	—	49277	2, 7, 5●●	92	169	—	2530	49531	2, 5●●4●2	133	375	—	2546	49801	2, 4●●●3●2●	401	545
—	2518	49279	2, 7, 7	15	107	—	2531	49537	2, 5, 2, 6●	155	179	—	2547	49807	2, 4●●●3, 4	113	483
—	2519	49297	2, 6●2●3●	217	275	2558	—	49547	2, 5, 2, 3●●2	190	487	2567	—	49811	2, 4●●●2●2, 2	308	729
2546	—	49307	2, 6●2, 2●2	144	389	—	2532	49549	2, 5, 2, 3, 2●●	273	463	2568	—	49823	2, 4●●●2, 5	82	441
2547	—	49331	2, 6●●2, 2, 2	170	411	2559	—	49559	2, 5, 2, 2●●3	142	509	—	2548	49831	2, 4●●●●●2, 3	215	727
—	2520	49333	2, 6●●2●●●●	269	439	—	2533	49597	2, 5, 2●4●●	199	363	—	2549	49843	2, 4●●●●2, 2, 2	317	767
—	2521	49339	2, 6●●3●2	127	353	—	2534	49603	2, 5, 3, 4, 2	151	337	2569	—	49853	2, 4●●●●4●●	286	521
—	2522	49363	2, 6, 2●●2, 2	179	427	2560	—	49613	2, 5, 3, 2, 2●●	278	475	2570	—	49871	2, 4●●2, 2, 4	122	539
2548	—	49367	2, 6, 2●●●3	110	399	—	2535	49627	2, 5, 3●2●2	173	473	2571	—	49877	2, 4●●2●●●●●●	508	823
—	2523	49369	2, 6, 2●2, 2●	261	371	—	2536	49633	2, 5, 4, 4●	195	241	—	2550	49891	2, 4●●3, 3, 2	233	537
2549	—	49391	2, 6, 3●4	54	257	—	2537	49639	2, 5, 4, 2, 3	103	355	2572	—	49919	2, 4●●8	20	171
—	2524	49393	2, 6, 4, 3●	175	229	—	2538	49663	2, 5, 9	11	101	—	2551	49921	2, 4, 2, 7●	149	169

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2552	49927	2, 4, 2, 5, 3	109	347	2586	—	50153	2, 4, 5●●2●	262	365	2601	—	50441	2, 3●●●●4●2●	398	539
2573	—	49937	2, 4, 2, 3●3●	336	425	2587	—	50159	2, 4, 5●4	56	271	2602	—	50459	2, 3●●●3, 2●2	298	803
—	2553	49939	2, 4, 2, 3●2, 2	247	583	2588	—	50177	2, 3●9●	88	97	—	2574	50461	2, 3●●●3, 3●●	389	687
2574	—	49943	2, 4, 2, 3●●3	158	563	2589	—	50207	2, 3●5, 5	52	269	—	2575	50497	2, 3●●●●●5●	371	437
—	2554	49957	2, 4, 2, 2●2●●●	443	699	—	2564	50221	2, 3●4●●2●●	337	579	—	2576	50503	2, 3●●●●●3, 3	239	783
2575	—	49991	2, 4, 2●●3, 3	176	577	—	2565	50227	2, 3●4, 2, 2, 2	233	561	2603	—	50513	2, 3●●●●●●●3●	626	799
—	2555	49993	2, 4, 2●●2●2●	479	655	2590	—	50231	2, 3●4, 2●3	138	509	—	2577	50527	2, 3●●●●●●5	107	601
—	2556	49999	2, 4, 2●●2, 4	127	557	2591	—	50261	2, 3●3●●●●●●●	514	831	—	2578	50539	2, 3●●●●2●●●2	403	1061
2576	—	50021	2, 4, 2●2, 2●●●	448	711	—	2566	50263	2, 3●3●●●●3	197	711	2604	—	50543	2, 3●●●●2●4	148	699
—	2557	50023	2, 4, 2●2, 2, 3	185	633	2592	—	50273	2, 3●3, 2, 4●	342	419	2605	—	50549	2, 3●●●●3●●●●	526	863
2577	—	50033	2, 4, 2●3, 3●	350	457	—	2567	50287	2, 3●3, 2●4	111	521	—	2579	50551	2, 3●●●●3●3	189	715
—	2558	50047	2, 4, 2●7	29	223	2593	—	50291	2, 3●3, 3, 2, 2	256	623	—	2580	50581	2, 3●●2, 2●●●●●	613	989
2578	—	50051	2, 4, 3, 5, 2	154	337	—	2568	50311	2, 3●2●4, 3	161	517	—	2581	50587	2, 3●●2, 2, 2●2	335	907
—	2559	50053	2, 4, 3, 4●●●	279	433	2594	—	50321	2, 3●2●2●3●	474	601	2606	—	50591	2, 3●●2, 2, 5	98	531
2579	—	50069	2, 4, 3, 2●●●●●	422	681	—	2569	50329	2, 3●2●2, 2, 2●	533	753	—	2582	50593	2, 3●●2●●4●	449	547
—	2560	50077	2, 4, 3, 2, 3●●	297	527	2595	—	50333	2, 3●2●2, 3●●	406	719	—	2583	50599	2, 3●●2●●2, 3	253	857
2580	—	50087	2, 4, 3●●2, 3	172	583	—	2570	50341	2, 3●2●●●2●●●	583	921	2607	—	50627	2, 3●●3, 4, 2	244	545
2581	—	50093	2, 4, 3●●●2●●	382	659	—	2571	50359	2, 3●2●●2●3	211	785	—	2584	50647	2, 3●●3●●●3	203	739
—	2561	50101	2, 4, 3●2●●●●	391	639	2596	—	50363	2, 3●2●●3●2	270	751	2608	—	50651	2, 3●●3●2●2	276	755
2582	—	50111	2, 4, 3●6	38	257	—	2572	50377	2, 3●2, 2, 2●2●	547	749	—	2585	50671	2, 3●●4●4	89	429
—	2562	50119	2, 4, 4, 3, 3	123	407	—	2573	50383	2, 3●2, 2, 2, 4	143	631	—	2586	50683	2, 3●●6●2	121	347
2583	—	50123	2, 4, 4, 2●●2	208	539	2597	—	50387	2, 3●2, 2●●2, 2	370	883	—	2587	50707	2, 3, 2, 4●2, 2	245	577
2584	—	50129	2, 4, 4●●3●	302	387	2598	—	50411	2, 3●2, 3●●●2	302	797	2609	—	50723	2, 3, 2, 3●3, 2	268	607
—	2563	50131	2, 4, 4●●2, 2	217	519	2599	—	50417	2, 3●2, 4, 3●	352	461	2610	—	50741	2, 3, 2, 3, 2●●●●	488	795
2585	—	50147	2, 4, 5, 3, 2	150	347	2600	—	50423	2, 3●2, 4●3	134	511	2611	—	50753	2, 3, 2, 2●5●	314	369

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2588	50767	2, 3, 2, 2●2, 4	149	651	2623	—	51047	2, 3, 3●2, 2, 3	196	671	2635	—	51341	2, 2●3●3, 2●●	408	691
—	2589	50773	2, 3, 2, 2●●●●●●●●	635	1027	2624	—	51059	2, 3, 3●3, 2, 2	256	625	—	2615	51343	2, 2●3●3, 4	125	533
2612	—	50777	2, 3, 2, 2●●2, 2●	580	823	—	2602	51061	2, 3, 3●3●●●●	399	655	2636	—	51347	2, 2●3●2●2, 2	342	809
2613	—	50789	2, 3, 2, 2, 2, 2●●●	548	869	2625	—	51071	2, 3, 3●7	30	233	—	2616	51349	2, 2●3●2●●●●●	559	901
—	2590	50821	2, 3, 2●●4●●●	397	615	—	2603	51109	2, 3, 4●●2●●●	409	647	—	2617	51361	2, 2●3●●●4●	427	519
—	2591	50833	2, 3, 2●●2●3●	521	661	2626	—	51131	2, 3, 4●3●2	178	497	2637	—	51383	2, 2●3●●2●3	210	781
—	2592	50839	2, 3, 2●●2●●3	241	863	—	2604	51133	2, 3, 4●4●●	215	393	2638	—	51407	2, 2●3, 2, 2, 4	144	635
2614	—	50849	2, 3, 2●●●●●4●	466	567	2627	—	51137	2, 3, 5, 5●	192	229	2639	—	51413	2, 2●3, 2●●●●●●	602	975
—	2593	50857	2, 3, 2●●●●●●●2●	691	955	—	2605	51151	2, 3, 5, 2, 4	81	361	2640	—	51419	2, 2●3, 2●2●2	314	857
2615	—	50867	2, 3, 2●●●2, 2, 2	388	939	—	2606	51157	2, 3, 5●●●●●●	331	537	—	2618	51421	2, 2●3, 2●3●●	399	713
2616	—	50873	2, 3, 2●●●3, 2●	512	737	—	2607	51169	2, 3, 6, 4●	183	227	—	2619	51427	2, 2●3, 3, 3, 2	281	647
2617	—	50891	2, 3, 2●2, 2●●2	356	921	—	2608	51193	2, 3, 8, 2●	123	181	2641	—	51431	2, 2●3, 3, 2, 3	196	673
—	2594	50893	2, 3, 2●2, 2, 2●●	503	859	2628	—	51197	2, 3, 9●●	72	137	2642	—	51437	2, 2●3, 3●2●●	418	725
2618	—	50909	2, 3, 2●2●3●●	402	719	—	2609	51199	2, 3, 11	7	79	—	2620	51439	2, 2●3, 3●4	111	529
—	2595	50923	2, 3, 2●3●●●2	301	795	2629	—	51203	2, 2●9, 2	68	143	2643	—	51449	2, 2●3, 5, 2●	300	437
—	2596	50929	2, 3, 2●4, 3●	347	455	—	2610	51217	2, 2●6●3●	209	263	2644	—	51461	2, 2●2●5●●●	324	499
2619	—	50951	2, 3, 3, 5, 3	122	389	—	2611	51229	2, 2●6, 3●●	195	343	2645	—	51473	2, 2●2●3●3●	466	589
2620	—	50957	2, 3, 3, 4, 2●●	320	541	2630	—	51239	2, 2●5●2, 3	134	449	2646	—	51479	2, 2●2●3●●3	220	783
2621	—	50969	2, 3, 3, 3, 2, 2●	426	601	—	2612	51241	2, 2●5●●●2●	355	489	—	2621	51481	2, 2●2●3, 2, 2●	537	757
—	2597	50971	2, 3, 3, 3, 2●2	251	677	2631	—	51257	2, 2●5, 3, 2●	294	421	—	2622	51487	2, 2●2●3, 5	97	511
—	2598	50989	2, 3, 3, 2●●2●●	463	797	2632	—	51263	2, 2●5, 6	40	247	2647	—	51503	2, 2●2●2●●4	168	769
2622	—	50993	2, 3, 3, 2, 2, 3●	440	569	—	2613	51283	2, 2●4●●●2, 2	299	711	—	2623	51511	2, 2●2●2, 2●3	239	885
—	2599	51001	2, 3, 3, 2, 3, 2●	417	599	2633	—	51287	2, 2●4●●●●3	186	671	—	2624	51517	2, 2●2●2, 4●●	381	691
—	2600	51031	2, 3, 3●●●●●3	219	793	—	2614	51307	2, 2●4, 2●●●2	285	749	2648	—	51521	2, 2●2●●●5●	400	471
—	2601	51043	2, 3, 3●2, 3, 2	279	641	2634	—	51329	2, 2●3●6●	224	257	2649	—	51539	2, 2●2●●●●●2, 2	490	1167

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2650	—	51551	2, 2●2●●●●5	116	651	—	2636	51817	2, 2●●●2, 2●●2●	745	1033	—	2651	52069	2, 2●●2●2, 2●●●	671	1065
2651	—	51563	2, 2●2●●2●●●2	438	1153	2664	—	51827	2, 2●●●2, 3, 2, 2	388	945	—	2652	52081	2, 2●●2●3, 3●	523	683
—	2625	51577	2, 2●2●●4, 2●	457	663	—	2637	51829	2, 2●●●2, 3●●●●	607	995	2674	—	52103	2, 2●●3, 4, 3	184	595
2652	—	51581	2, 2●2●●5●●	296	547	2665	—	51839	2, 2●●●2, 7	50	369	2675	—	52121	2, 2●●3, 2, 2, 2●	576	815
2653	—	51593	2, 2●2, 2, 3●2●	552	751	—	2638	51853	2, 2●●●●●3, 2●●	593	1005	2676	—	52127	2, 2●●3, 2, 5	98	533
2654	—	51599	2, 2●2, 2, 3, 4	154	661	—	2639	51859	2, 2●●●●●2●2, 2	493	1167	—	2653	52147	2, 2●●3●2, 2, 2	361	875
—	2626	51607	2, 2●2, 2, 2●●3	263	943	2666	—	51869	2, 2●●●●●2, 3●●	574	1017	—	2654	52153	2, 2●●3●3, 2●	471	679
—	2627	51613	2, 2●2, 2, 2, 3●●	481	853	—	2640	51871	2, 2●●●●●2, 5	131	705	2677	—	52163	2, 2●●4, 4, 2	232	519
—	2628	51631	2, 2●2, 2●●●4	173	801	2667	—	51893	2, 2●●●●●●2●●●●	798	1303	—	2655	52177	2, 2●●4●●3●	433	555
—	2629	51637	2, 2●2, 2●2●●●●	647	1057	2668	—	51899	2, 2●●●●●●3●2	374	1041	2678	—	52181	2, 2●●4●●●●●●●	500	811
2655	—	51647	2, 2●2, 2●6	64	429	—	2641	51907	2, 2●●●●2, 4, 2	355	791	—	2656	52183	2, 2●●4●●●3	189	689
2656	—	51659	2, 2●2, 3, 2●●2	358	927	—	2642	51913	2, 2●●●●2, 2●2●	741	1015	—	2657	52189	2, 2●●4●3●●	323	579
—	2630	51673	2, 2●2, 3●2, 2●	543	773	2669	—	51929	2, 2●●●●2●2, 2●	722	1027	—	2658	52201	2, 2●●5●●2●	371	517
—	2631	51679	2, 2●2, 3●5	83	479	2670	—	51941	2, 2●●●●3, 2●●●	622	989	2679	—	52223	2, 2●●10	12	127
2657	—	51683	2, 2●2, 4, 3, 2	268	619	—	2643	51949	2, 2●●●●3●2●●	541	939	—	2659	52237	2, 2, 2, 6, 2●●	243	409
—	2632	51691	2, 2●2, 4●●●2	287	759	2671	—	51971	2, 2●●2, 6, 2	198	427	—	2660	52249	2, 2, 2, 5, 2, 2●	349	491
2658	—	51713	2, 2●●●8●	164	183	—	2644	51973	2, 2●●2, 5●●●	365	563	2680	—	52253	2, 2, 2, 5, 3●●	272	479
2659	—	51719	2, 2●●●6, 3	126	397	2672	—	51977	2, 2●●2, 4●2●	470	637	2681	—	52259	2, 2, 2, 4●3, 2	248	561
—	2633	51721	2, 2●●●5●2●	359	485	—	2645	51991	2, 2●●2, 3●●3	241	859	—	2661	52267	2, 2, 2, 4●●●●2	301	785
2660	—	51749	2, 2●●●3●2●●●	578	911	—	2646	52009	2, 2●●2, 2●●●2●	747	1031	2682	—	52289	2, 2, 2, 3●5●	306	359
2661	—	51767	2, 2●●●3, 2●3	226	835	—	2647	52021	2, 2●●2, 2, 2●●●●	685	1117	—	2662	52291	2, 2, 2, 3●4, 2	253	559
—	2634	51769	2, 2●●●3, 3, 2●	521	747	—	2648	52027	2, 2●●2, 2, 3●2	327	907	2683	—	52301	2, 2, 2, 3●2, 2●●	494	841
—	2635	51787	2, 2●●●2●2●●2	445	1147	—	2649	52051	2, 2●●2●●●●2, 2	499	1189	2684	—	52313	2, 2, 2, 3●●2, 2●	576	817
2662	—	51797	2, 2●●●2●●●●●●●●	802	1297	—	2650	52057	2, 2●●2●●●2, 2●	733	1041	—	2663	52321	2, 2, 2, 3, 2, 4●	417	511
2663	—	51803	2, 2●●●2●●2●2	426	1159	2673	—	52067	2, 2●●2●2, 3, 2	394	905	2685	—	52361	2, 2, 2, 2●3●2●	538	731

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2664	52363	2, 2, 2, 2●3●●2	345	883	2698	—	52667	2, 2, 2●2●3●2	298	831	2714	—	52937	2, 2, 3●2, 2●2●	554	759
—	2665	52369	2, 2, 2, 2●2●3●	567	719	2699	—	52673	2, 2, 2●3, 5●	332	395	—	2686	52951	2, 2, 3●2●●●3	227	825
2686	—	52379	2, 2, 2, 2●2, 2●2	374	1011	2700	—	52691	2, 2, 2●3●●2, 2	366	875	—	2687	52957	2, 2, 3●2●3●●	393	703
—	2666	52387	2, 2, 2. 2●●●3, 2	403	917	2701	—	52697	2, 2, 2●3●2, 2●	526	749	—	2688	52963	2, 2, 3●3, 3, 2	271	625
2687	—	52391	2, 2, 2, 2●●●2, 3	292	987	2702	—	52709	2, 2, 2●4, 2●●●	434	691	2715	—	52967	2, 2, 3●3, 2, 3	188	647
2688	—	52433	2, 2, 2, 2, 2●●3●	606	775	—	2677	52711	2. 2, 2●4, 2, 3	177	611	2716	—	52973	2, 2, 3●3●2●●	398	691
—	2667	52453	2, 2, 2, 2, 3, 2●●●	553	879	2703	—	52721	2, 2, 2●5, 3●	308	405	—	2689	52981	2, 2, 3●4●●●●	359	591
2689	—	52457	2, 2, 2, 2, 3●●2●	582	809	2704	—	52727	2, 2, 2●5●3	114	439	—	2690	52999	2, 2, 4, 5, 3	115	367
—	2668	52489	2, 2, 2●●4●2●	457	619	2705	—	52733	2, 2, 2●7●●	148	279	2717	—	53003	2, 2, 4, 4●●2	208	531
—	2669	52501	2, 2, 2●●3●●●●●	607	977	—	2678	52747	2, 2, 3, 5●●2	197	501	—	2691	53017	2, 2, 4, 3, 2, 2●	399	563
2690	—	52511	2, 2, 2●●3, 5	104	549	2706	—	52757	2, 2, 3, 4●●●●●	416	669	—	2692	53047	2, 2, 4, 2, 2●3	169	627
2691	—	52517	2, 2, 2●●2●2●●●	670	1057	2707	—	52769	2, 2, 3, 3●4●	348	421	2718	—	53051	2, 2, 4, 2, 3●2	218	605
2692	—	52529	2, 2, 2●●2, 2, 3●	612	791	—	2679	52783	2, 2, 3, 3●●4	129	589	2719	—	53069	2, 2, 4●●2, 2●●	424	723
2693	—	52541	2, 2, 2●●2, 4●●	404	733	—	2680	52807	2, 2, 3, 2●3, 3	207	677	—	2693	53077	2, 2, 4●●●●●●●●●	527	853
—	2670	52543	2, 2, 2●●2, 6	75	479	—	2681	52813	2, 2, 3, 2●2, 2●●	509	867	2720	—	53087	2, 2, 4●●●5	76	429
2694	—	52553	2, 2, 2●●●●2●2●	738	1009	2708	—	52817	2, 2, 3, 2●●●3●	548	699	—	2694	53089	2, 2, 4●2, 4●	331	407
—	2671	52561	2, 2, 2●●●●●●●3●	709	905	—	2682	52837	2, 2, 3, 2, 2, 2●●●	553	877	2721	—	53093	2, 2, 4●2, 2●●●	434	689
—	2672	52567	2, 2, 2●●●●●●●●3	317	1147	2709	—	52859	2, 2, 3, 2, 4●2	212	597	—	2695	53101	2, 2, 4●2●2●●	385	667
2695	—	52571	2, 2, 2●●●●●●2●2	438	1193	—	2683	52861	2, 2, 3, 2, 5●●	251	463	—	2696	53113	2, 2, 4●4, 2●	287	417
—	2673	52579	2, 2, 2●●●2, 3, 2	409	939	—	2684	52879	2, 2, 3●●3, 4	139	595	2722	—	53117	2, 2, 4●5●●	184	341
2696	—	52583	2, 2, 2●●●2, 2, 3	288	985	2710	—	52883	2, 2, 3●●2●2, 2	378	895	2723	—	53129	2, 2, 5, 3●2●	312	425
—	2674	52609	2, 2, 2●2, 6●	293	339	2711	—	52889	2, 2, 3●●2, 2, 2●	578	817	2724	—	53147	2, 2, 5, 2, 2●2	204	553
—	2675	52627	2, 2, 2●2, 2●2, 2	419	993	2712	—	52901	2, 2, 3●●●●2●●●	622	983	—	2697	53149	2, 2, 5, 2, 3●●	263	467
2697	—	52631	2, 2, 2●2, 2●●3	264	947	—	2685	52903	2, 2, 3●●●●2, 3	261	883	—	2698	53161	2, 2, 5●●●●2●	391	541
—	2676	52639	2, 2, 2●2, 2, 5	109	591	2713	—	52919	2, 2, 3●●●2●3	222	827	2725	—	53171	2, 2, 5●2, 2, 2	214	519

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2699	53173	2, 2, 5●2●●●●	337	551
2726	—	53189	2, 2, 6, 3●●●	234	367
—	2700	53197	2, 2, 6, 2, 2●●	239	409
2727	—	53201	2, 2, 6●●3●	244	313
2728	—	53231	2, 2, 7●4	42	205
—	2701	53233	2, 2, 8, 3●	131	173
—	2702	53239	2, 2, 8●3	47	183
2729	—	53267	2●●7●2, 2	124	291
—	2703	53269	2●●7●●●●●	205	329
2730	—	53279	2●●7, 5	38	195
—	2704	53281	2●●6●4●	185	223
—	2705	53299	2●●6, 2, 2, 2	175	421
2731	—	53309	2●●6, 4●●	170	307
—	2706	53323	2●●5●2●●2	221	569
2732	—	53327	2●●5●2, 4	94	409
—	2707	53353	2●●5, 2●●2●	389	539
—	2708	53359	2●●5, 2●4	89	417
—	2709	53377	2●●4●6●	191	219
2733	—	53381	2●●4●4●●●	298	461
—	2710	53401	2●●4●2, 2, 2●	451	637
—	2711	53407	2●●4●2, 5	79	423
2734	—	53411	2●●4●●●3, 2	288	655
—	2712	53419	2●●4●●●●●●●2	339	887
—	2713	53437	2●●4●●4●●	283	515
2735	—	53441	2●●4, 2, 5●	278	329

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
2736	—	53453	2●●4, 2, 2, 2●●	426	727
—	2714	53479	2●●4, 3, 2, 3	171	587
—	2715	53503	2●●4, 8	23	189
2737	—	53507	2●●3●6, 2	156	335
—	2716	53527	2●●3●3●●3	197	701
2738	—	53549	2●●3●2●●2●●	540	929
—	2717	53551	2●●3●2●●4	151	691
—	2718	53569	2●●3●●●5●	361	425
2739	—	53591	2●●3●●●●●●3	274	991
—	2719	53593	2●●3●●●●2, 2●	653	927
2740	—	53597	2●●3●●●●3●●	484	863
2741	—	53609	2●●3●●2●●2●	648	899
—	2720	53611	2●●3●●2●●●2	397	1045
—	2721	53617	2●●3●●3, 3●	479	625
—	2722	53623	2●●3●●3●3	187	707
—	2723	53629	2●●3●●5●●	269	497
2742	—	53633	2●●3, 2, 6●	264	305
2743	—	53639	2●●3, 2, 4, 3	182	587
—	2724	53653	2●●3, 2, 2●●●●●	623	1005
2744	—	53657	2●●3, 2, 2, 2, 2●	582	823
2745	—	53681	2●●3, 2●2, 3●	536	695
2746	—	53693	2●●3, 2●4●●	336	613
2747	—	53699	2●●3, 3, 4, 2	254	567
2748	—	53717	2●●3, 3●●●●●●	562	911
—	2725	53719	2●●3, 3●●●3	213	775

z'	z''	Z	Exponenten	N	N
—	2726	53731	2●●3, 4, 3, 2	249	575
2749	—	53759	2●●3, 9	18	167
—	2727	53773	2●●2●5, 2●●	327	551
2750	—	53777	2●●2●4●3●	394	497
2751	—	53783	2●●2●4●●3	188	667
—	2728	53791	2●●2●4, 5	85	443
2752	—	53813	2●●2●3, 2●●●●	590	961
2753	—	53819	2●●2●3, 3●2	286	791
2754	—	53831	2●●2●2●3, 3	250	817
2755	—	53849	2●●2●2●●2, 2●	714	1013
—	2729	53857	2●●2●2, 2, 4●	513	629
2756	—	53861	2●●2●2, 2, 2●●●	678	1075
—	2730	53881	2●●2●2, 4, 2●	477	691
—	2731	53887	2●●2●2, 7	49	361
2757	—	53891	2●●2●●●5, 2	276	601
2758	—	53897	2●●2●●●3●2●	632	859
—	2732	53899	2●●2●●●3●●2	405	1037
—	2733	53917	2●●2●●●2, 3●●	565	1001
—	2734	53923	2●●2●●●●●3, 2	467	1063
2759	—	53927	2●●2●●●●●2, 3	338	1143
2760	—	53939	2●●2●●●●2, 2, 2	498	1205
2761	—	53951	2●●2●●●●6	80	529
—	2735	53959	2●●2●●2, 3, 3	271	893
2762	—	53987	2●●2●●3, 3, 2	364	839
2763	—	53993	2●●2●●3●●2●	648	901

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2736	54001	2●●2●●4, 3●	457	599	2774	—	54323	2●●●●4, 2, 2, 2	326	785	—	2762	54547	2●●●●●●3●2, 2	437	1031
2764	—	54011	2●●2●●5●2	204	581	—	2751	54331	2●●●●4, 3●2	253	699	—	2763	54559	2●●●●●●3, 5	123	649
—	2737	54013	2●●2●●6●●	235	439	2775	—	54347	2●●●●3●2●●2	394	1015	2788	—	54563	2●●●●●●2●3, 2	458	1039
—	2738	54037	2●●2, 2, 3●●●●●●	623	1003	—	2752	54361	2●●●●3●●2, 2●	655	929	—	2764	54577	2●●●●●●2, 2, 3●	725	937
—	2739	54049	2●●2, 2, 2●4●	499	605	—	2753	54367	2●●●●3●●5	107	595	2789	—	54581	2●●●●●●2, 2●●●●	814	1327
2765	—	54059	2●●2, 2, 2●●●●2	468	1223	2776	—	54371	2●●●●3, 2, 3, 2	368	843	—	2765	54583	2●●●●●●2, 2●3	301	1115
2766	—	54083	2●●2, 2●●4, 2	344	763	2777	—	54377	2●●●●3, 2●●2●	676	937	—	2766	54601	2●●●●●●●●2●2●	877	1199
—	2740	54091	2●●2, 2●●2●●2	463	1195	2778	—	54401	2●●●●2●6●	316	363	2790	—	54617	2●●●●●●●●●2, 2●	898	1275
2767	—	54101	2●●2, 2●●●●●●●●●	820	1327	—	2754	54403	2●●●●2●5, 2	269	585	2791	—	54623	2●●●●●●●●●5	144	809
—	2741	54121	2●●2, 2●2●●2●	727	1009	—	2755	54409	2●●●●2●3●2●	619	841	2792	—	54629	2●●●●●●●2, 2●●●	830	1317
—	2742	54133	2●●2, 2●3●●●●	577	947	2779	—	54413	2●●●●2●3, 2●●	572	969	—	2767	54631	2●●●●●●●2, 2, 3	343	1173
—	2743	54139	2●●2, 2●4●2	251	709	2780	—	54419	2●●●●2●2●2, 2	478	1131	2793	—	54647	2●●●●●●●3●3	254	961
—	2744	54151	2●●2, 3, 4, 3	189	611	—	2756	54421	2●●●●2●2●●●●●	781	1259	—	2768	54667	2●●●●●2, 3●●2	427	1095
—	2745	54163	2●●2, 3, 2●2, 2	391	927	2781	—	54437	2●●●●2●●●2●●●	802	1267	—	2769	54673	2●●●●●2, 2●3●	689	875
2768	—	54167	2●●2, 3, 2●●3	246	883	2782	—	54443	2●●●●2●●●●●●●2	546	1429	—	2770	54679	2●●●●●2, 2●●3	317	1137
—	2746	54181	2●●2, 3●●2●●●	619	979	2783	—	54449	2●●●●2●●2, 3●	708	917	—	2771	54709	2●●●●●2●2●●●●	773	1263
—	2747	54193	2●●2, 3●2, 3●	531	689	—	2757	54469	2●●●●2, 2, 3●●●	635	993	2794	—	54713	2●●●●●2●3, 2●	642	925
—	2748	54217	2●●2, 4, 2●2●	495	679	—	2758	54493	2●●●●2, 2●3●●	541	967	—	2772	54721	2●●●●●3, 5●	401	477
2769	—	54251	2●●2, 5●●●2	236	625	2784	—	54497	2●●●●2, 3, 4●	494	609	—	2773	54727	2●●●●●3, 3, 3	249	823
2770	—	54269	2●●2, 8●●	122	231	—	2759	54499	2●●●●2, 3, 3, 2	379	873	—	2774	54751	2●●●●●3●5	97	561
—	2749	54277	2●●●●7●●●	211	323	2785	—	54503	2●●●●2, 3, 2, 3	264	907	2795	—	54767	2●●●●●4●4	118	569
2771	—	54287	2●●●●6, 4	86	357	—	2760	54517	2●●●●2, 4●●●●	515	847	2796	—	54773	2●●●●●5●●●●	396	653
2772	—	54293	2●●●●5●●●●●●	404	649	2786	—	54521	2●●●●2, 5, 2●	400	583	2797	—	54779	2●●●●●6●2	160	459
2773	—	54311	2●●●●4●2, 3	206	691	2787	—	54539	2●●●●●●4●●2	348	887	—	2775	54787	2●●2, 7, 2	155	331
—	2750	54319	2●●●●4●●4	133	605	—	2761	54541	2●●●●●●4, 2●●	505	853	—	2776	54799	2●●2, 5, 4	113	473

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2777	54829	2●●●2, 3●●2●●	581	999	2812	—	55109	2●●●3●●3●●●	536	837	—	2802	55399	2●2, 4, 2, 2, 3	191	651
2798	—	54833	2●●●2, 3, 2, 3●	560	723	—	2788	55117	2●●●3●●2, 2●●	573	977	—	2803	55411	2●2, 4, 3, 2, 2	261	635
2799	—	54851	2●●●2, 2●4, 2	334	739	2813	—	55127	2●●●3●●●●●3	272	985	2823	—	55439	2●2, 3●3, 4	132	563
2800	—	54869	2●●●2, 2●●●●●●●●	818	1323	—	2789	55147	2●●●3●2●●●2	383	1009	—	2804	55441	2●2, 3●2●3●	493	625
—	2778	54877	2●●●2, 2●●3●●	555	989	2814	—	55163	2●●●3●4●2	214	605	2824	—	55457	2●2, 3●●●4●	450	547
2801	—	54881	2●●●2, 2, 2, 4●	534	655	—	2790	55171	2●●●4, 5, 2	193	423	2825	—	55469	2●2, 3●●●●2●●	574	989
—	2779	54907	2●●●2, 2, 4●2	271	763	—	2791	55201	2●●●4●●4●	373	455	2826	—	55487	2●2, 3●●6	62	407
2802	—	54917	2●●●2●●4●●●	508	787	—	2792	55207	2●●●4●●2, 3	209	709	—	2805	55501	2●2, 3, 2, 2, 2●●	515	879
—	2780	54919	2●●●2●●4, 3	229	737	—	2793	55213	2●●●4●●●2●●	463	799	2827	—	55511	2●2, 3, 2●●●3	240	871
2803	—	54941	2●●●2●●2, 3●●	566	1003	2815	—	55217	2●●●4●2, 3●	426	553	2828	—	55529	2●2, 3, 3●●2●	526	731
—	2781	54949	2●●●2●●●●●2●●●	803	1269	—	2794	55219	2●●●4●2, 2, 2	299	725	2829	—	55541	2●2, 3, 4●●●●	402	661
2804	—	54959	2●●●2●●●●●●4	208	961	2816	—	55229	2●●●4●4●●	262	479	2830	—	55547	2●2, 3, 5●2	170	483
—	2782	54973	2●●●2●●●4●●	445	811	—	2795	55243	2●●●5, 2●●2	241	625	—	2806	55579	2●2, 2●3, 2●2	327	881
—	2783	54979	2●●●2●2, 4, 2	345	769	—	2796	55249	2●●●5●●3●	347	445	2831	—	55589	2●2, 2●2●2●●●	646	1019
2805	—	54983	2●●●2●2, 3, 3	266	877	2817	—	55259	2●●●5●2●2	204	559	—	2807	55603	2●2, 2●2, 2, 2, 2	419	1011
2806	—	55001	2●●●2●2●2, 2●	698	993	—	2797	55291	2●●●8●2	77	223	—	2808	55609	2●2, 2●2, 3, 2●	565	811
—	2784	55009	2●●●2●3, 4●	461	569	2818	—	55313	2●2, 6●3●	228	287	2832	—	55619	2●2, 2●●●4, 2	338	749
—	2785	55021	2●●●2●3●2●●	519	901	2819	—	55331	2●2, 5●3, 2	196	443	—	2809	55621	2●2, 2●●●3●●●	603	941
2807	—	55049	2●●●3, 4●2●	430	583	—	2798	55333	2●2, 5●2●●●	341	537	2833	—	55631	2●2, 2●●●2, 4	192	841
—	2786	55051	2●●●3, 4●●2	277	707	2820	—	55337	2●2, 5●●●2●	384	529	—	2810	55633	2●2, 2●●●●●●3●	695	887
—	2787	55057	3●●●3, 3●3●	467	591	—	2799	55339	2●2, 5●●●●2	239	623	—	2811	55639	2●2, 2●●●●●●●3	311	1125
2808	—	55061	2●●●3, 3●●●●●●	562	905	2821	—	55343	2●2, 5●●4	94	427	2834	—	55661	2●2, 2●●2●2●●	614	1063
2809	—	55073	2●●●3, 2●4●	446	541	—	2800	55351	2●2, 5, 2●3	137	505	—	2812	55663	2●2, 2●●2●4	165	779
2810	—	55079	2●●●3, 2●2, 3	256	863	2822	—	55373	2●2, 4●2, 2●●	406	691	2835	—	55667	2●2, 2●●3, 2, 2	376	917
2811	—	55103	2●●●3, 2, 6	66	425	—	2801	55381	2●2, 4●●●●●●●	519	839	2836	—	55673	2●2, 2●●4, 2●	468	679

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2813	55681	2●2, 2, 2, 6●	295	341	—	2824	55921	2●2●●2, 3, 3●	547	713	—	2836	56197	2●2●3, 4●●●	391	607
2837	—	55691	2●2, 2, 2, 3●●2	360	923	—	2825	55927	2●2●●2, 3●3	215	811	2864	—	56207	2●2●3, 3, 4	134	577
2838	—	55697	2●2, 2, 2, 2●3●	582	739	2851	—	55931	2●2●●2, 4●2	264	743	—	2837	56209	2●2●3, 2●3●	495	629
—	2814	55711	2●2, 2, 2, 2, 5	111	601	—	2826	55933	2●2●●2, 5●●	313	577	2865	—	56237	2●2●3●●●2●●	528	911
—	2815	55717	2●2, 2, 2●●2●●●	685	1083	2852	—	55949	2●2●●●●3, 2●●	580	983	—	2838	56239	2●2●3●●●4	145	673
2839	—	55721	2●2, 2, 2●●●●2●	750	1037	2853	—	55967	2●2●●●●2, 5	128	689	2866	—	56249	2●2●3●3, 2●	446	643
2840	—	55733	2●2, 2, 2●2●●●●	658	1075	—	2827	55987	2●2●●●●●●2, 2, 2	493	1193	—	2839	56263	2●2●4, 3, 3	167	553
2841	—	55763	2●2, 2, 3●●2, 2	382	913	2854	—	55997	2●2●●●●●●4●●	444	809	2867	—	56267	2●2●4, 2●●2	282	731
2842	—	55787	2●2, 2, 4●●●2	290	767	2855	—	56003	2●2●●●2, 4, 2	346	771	—	2840	56269	2●2●4, 2, 2●●	397	679
2843	—	55793	2●2, 2, 5, 3●	328	431	2856	—	56009	2●2●●●2, 2●2●	722	989	—	2841	56299	2●2●5●●●2	211	559
2844	—	55799	2●2, 2, 5●3	122	469	2857	—	56039	2●2●●●3, 2, 3	248	853	—	2842	56311	2●2●6●3	85	329
—	2816	55807	2●2, 2, 9	19	179	—	2828	56041	2●2●●●3●●2●	635	883	2868	—	56333	2●3, 6, 2●●	218	367
—	2817	55813	2●2●●6●●●	269	413	—	2829	56053	2●2●●●4●●●●	477	785	—	2843	56359	2●3, 4●2, 3	163	547
2845	—	55817	2●2●●5●2●	356	481	2858	—	56081	2●2●2, 3●3●	494	625	2869	—	56369	2●3, 4, 2, 3●	362	467
—	2818	55819	2●2●●5●●2	231	587	2859	—	56087	2●2●2, 3●●3	232	827	—	2844	56377	2●3, 4, 3, 2●	351	503
2846	—	55823	2●2●●5, 4	106	443	2860	—	56093	2●2●2, 3, 3●●	434	767	—	2845	56383	2●3, 4, 6	47	293
2847	—	55829	2●2●●4●●●●●●	492	791	2861	—	56099	2●2●2, 2●3, 2	374	849	2870	—	56393	2●3, 3●2●2●	484	661
—	2819	55837	2●2●●4, 3●●	367	647	—	2830	56101	2●2●2, 2●2●●●	647	1021	—	2846	56401	2●3, 3●●●3●	473	603
—	2820	55843	2●2●●3●3, 2	329	745	—	2831	56113	2●2●2, 2, 2, 3●	587	759	2871	—	56417	2●3, 3, 2, 4●	368	451
—	2821	55849	2●2●●3●●●2●	639	881	2862	—	56123	2●2●2, 2, 3●2	314	871	—	2847	56431	2●3, 3, 2●4	119	559
2848	—	55871	2●2●●3, 6	68	427	—	2832	56131	2●2●2●●4, 2	325	721	—	2848	56437	2●3, 3, 3●●●●	429	703
2849	—	55889	2●2●●2●●●3●	672	857	—	2833	56149	2●2●2●●●●●●●●●●	773	1251	—	2849	56443	2●3, 3, 4●2	191	537
—	2822	55897	2●2●●2●●2, 2●	721	1023	—	2834	56167	2●2●2●2, 2, 3	265	907	2872	—	56453	2●3, 2●4●●●	374	579
2850	—	55901	2●2●●2●●3●●	536	955	2863	—	56171	2●2●2●2●●●2	418	1101	—	2850	56467	2●3, 2●2●2, 2	363	859
—	2823	55903	2●2●●2●●5	117	653	—	2835	56179	2●2●2●3, 2, 2	347	847	—	2851	56473	2●3, 2●2, 2, 2●	557	787

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
2873	—	56477	2●3, 2●2, 3●●	424	751	—	2864	56713	2●3●2, 3●2●	471	641	2896	—	56951	2●4, 2, 3●3	138	521
—	2852	56479	2●3, 2●2, 5	97	521	—	2865	56731	2●3●2, 2, 2●2	315	853	2897	—	56957	2●4, 2, 5●●	200	369
2874	—	56489	2●3, 2●●●●●2●	668	923	—	2866	56737	2●3●2●●4●	421	513	2898	—	56963	2●4●●5, 2	172	375
2875	—	56501	2●3, 2●●2●●●●	596	973	2886	—	56747	2●3●2●●●●●2	382	1001	—	2879	56983	2●4●●2●●3	189	677
—	2853	56503	2●3, 2●●2●3	219	815	—	2867	56767	2●3●2●6	53	357	—	2880	56989	2●4●●2, 3●●	347	615
—	2854	56509	2●3, 2●●4●●	341	621	—	2868	56773	2●3●3, 3●●●	399	625	2899	—	56993	2●4●●●●4●	364	443
2876	—	56519	2●3, 2, 2, 3, 3	208	685	—	2869	56779	2●3●3, 2●●2	293	759	2900	—	56999	2●4●●●●2, 3	206	697
—	2855	56527	2●3, 2, 2, 2, 4	147	649	2887	—	56783	2●3●3, 2, 4	120	533	—	2881	57037	2●4●2, 2, 2●●	387	661
2877	—	56531	2●3, 2, 2●●2, 2	380	907	2888	—	56807	2●3●4, 2, 3	148	511	2901	—	57041	2●4●2●●3●	404	517
—	2856	56533	2●3, 2, 2●●●●●●	613	993	—	2870	56809	2●3●4●●2●	377	525	2902	—	57047	2●4●2●●●3	178	647
2878	—	56543	2●3, 2, 2●5	86	491	2889	—	56813	2●3●4●2●●	310	539	2903	—	57059	2●4●3, 3, 2	312	489
—	2857	56569	2●3, 2, 5, 2●	297	433	—	2871	56821	2●3●5●●●●	271	447	—	2882	57073	2●4●4, 3●	263	345
2879	—	56591	2●3●●4, 4	114	481	—	2872	56827	2●3●6●2	109	313	2904	—	57077	2●4●4●●●●	280	461
2880	—	56597	2●3●●3●●●●●	520	837	2890	—	56843	2●4, 5●●2	160	407	2905	—	57089	2●5, 7●	122	139
—	2858	56599	2●3●●3●●3	203	723	—	2873	56857	2●4, 4, 2, 2●	323	455	—	2883	57097	2●5, 4●2●	247	335
—	2859	56611	2●3●●2●3, 2	331	751	2891	—	56873	2●4, 3●●●2●	430	593	2906	—	57107	2●5, 3●2, 2	196	463
—	2860	56629	2●3●●2, 2●●●●	587	957	2892	—	56891	2●4, 3, 3●2	194	537	2907	—	57119	2●5, 3, 5	54	287
2881	—	56633	2●3●●2, 3, 2●	498	715	—	2874	56893	2●4, 3, 4●●	239	433	2908	—	57131	2●5, 2●●●●2	236	617
—	2861	56659	2●3●●●●●●2, 2	437	1041	2893	—	56897	2●4, 2●5●	256	301	—	2884	57139	2●5, 2, 2, 2, 2	219	529
2882	—	56663	2●3●●●●●●●3	270	977	2894	—	56909	2●4, 2●2, 2●●	408	695	2909	—	57143	2●5, 2, 2●3	128	475
—	2862	56671	2●3●●●●●5	103	579	—	2875	56911	2●4, 2●2, 4	121	529	2910	—	57149	2●5, 2, 4●●	202	367
2883	—	56681	2●3●●●2●●2●	632	877	2895	—	56921	2●4, 2●●2, 2●	470	667	—	2885	57163	2●5●●2●●2	225	581
2884	—	56687	2●3●●●2●4	142	671	—	2876	56923	2●4, 2●●2●2	273	743	2911	—	57173	2●5●●●●●●●●	396	641
—	2863	56701	2●3●●●5●●	259	479	—	2877	56929	2●4, 2, 2, 4●	335	411	2912	—	57179	2●5●●●2●2	208	567
2885	—	56711	2●3●2, 4, 3	170	549	—	2878	56941	2●4, 2, 2●2●●	397	687	2913	—	57191	2●5●2, 2, 3	134	459

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2886	57193	2●5●2●●2●	345	479	—	2900	57487	3, 5●3, 4	73	311	—	2913	57751	3, 4, 2, 2●●3	171	613
2914	—	57203	2●5●3, 2, 2	174	425	—	2901	57493	3, 5●2●●●●●	327	527	2937	—	57773	3, 4, 2●●●2●●	410	707
2915	—	57221	2●6, 4●●●	186	289	2925	—	57503	3, 5●2, 5	54	289	—	2914	57781	3, 4, 2●2●●●●	423	691
—	2887	57223	2●5, 4, 3	83	269	2926	—	57527	3, 5●●2●3	124	461	—	2915	57787	3, 4, 2●3●2	197	549
—	2888	57241	2●6, 2, 2, 2●	255	361	—	2902	57529	3, 5●●3, 2●	283	407	2938	—	57791	3, 4, 2●6	42	281
2916	—	57251	2●6●●3, 2	152	347	2927	—	57557	3, 5, 2●●●●●●	360	583	—	2916	57793	3, 4, 3, 5●	223	265
—	2889	57259	2●6●●●●●2	175	459	—	2903	57559	3, 5, 2●●●3	137	497	2939	—	57803	3, 4, 3, 2●●2	236	611
2917	—	57269	2●6●2●●●●	244	399	—	2904	57571	3, 5, 3, 3, 2	169	389	2940	—	57809	3, 4, 3●●3●	346	443
—	2890	57271	2●6●2●3	89	333	2928	—	57587	3, 5, 4, 2, 2	150	367	—	2917	57829	3, 4, 4, 2●●●	301	479
—	2891	57283	2●7, 4, 2	95	213	2929	—	57593	3, 5, 5, 2●	182	265	2941	—	57839	3, 4, 4●4	68	327
2918	—	57287	2●7, 3, 3	72	239	—	2905	57601	3, 4●7●	125	141	—	2918	57847	3, 4, 5●3	81	311
—	2892	57301	2●7●●●●●●	199	323	—	2906	57637	3, 4●2●2●●●	395	623	—	2919	57853	3, 4, 7●●	107	201
2919	—	57329	2●9, 3●	90	119	2930	—	57641	3, 4●2●●●2●	440	607	—	2920	57859	3, 3●7, 2	101	215
—	2893	57331	2●9, 2, 2	61	151	—	2907	57649	3, 4●2, 2, 3●	363	469	2942	—	57881	3, 3●4, 2, 2●	336	473
2920	—	57347	3, 11, 2	34	71	2931	—	57653	3, 4●2, 2●●●●	408	665	2943	—	57899	3, 3●3●●●●2	284	741
—	2894	57349	3, 10, ●●●	65	99	—	2908	57667	3, 4●●●4, 2	209	463	—	2921	57901	3, 3●3●●2●●	395	679
—	2895	57367	3, 8●●3	53	187	—	2909	57679	3, 4●●●2, 4	119	521	2944	—	57917	3, 3●3, 4●●	258	467
—	2896	57373	3, 8, 3●●	103	181	2932	—	57689	3, 4●●●●2, 2●	460	653	2945	—	57923	3, 3●2●4, 2	232	513
2921	—	57383	3, 7●2, 3	72	241	—	2910	57697	3, 4●●2, 4●	325	399	—	2922	57943	3, 3●2●●●●3	219	791
2922	—	57389	3, 7●●2●●	166	285	—	2911	57709	3, 4●●●2●2●●	383	663	2946	—	57947	3, 3●2●●2●2	304	827
—	2897	57397	3, 7, 2●●●●	185	301	2933	—	57713	3, 4●●3, 3●	338	441	—	2923	57973	3, 3●2, 3●●●●	435	713
2923	—	57413	3, 6●3●●●	192	299	2934	—	57719	3, 4●●3●3	132	499	2947	—	57977	3, 3●2, 4, 2●	350	507
—	2898	57427	3, 6●●●2, 2	167	397	—	2912	57727	3, 4●●7	29	219	—	2924	57991	3, 3●●●4, 3	167	537
—	2899	57457	3, 6, 3, 3●	199	259	2935	—	57731	3, 4, 2, 5, 2	158	345	2948	—	58013	3, 3●●●2, 3●●	416	737
2924	—	57467	3, 6, 4●2	98	275	2936	—	57737	3, 4, 2, 3●2●	358	487	—	2925	58027	3, 3●●●●●●●●2	403	1055

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
2949	—	58031	3, 3●●●●●●●4	154	711	—	2937	58243	3, 3, 3, 5, 2	175	383	—	2950	58549	3, 2●2●●2●●●●	623	1017
2950	—	58043	3, 3●●●●●3●2	272	757	2963	—	58271	3, 3, 3, 2, 5	76	413	—	2951	58567	3, 2●2, 2, 3, 3	219	721
2951	—	58049	3, 3●●2, 5●	318	377	—	2938	58309	3, 3, 4, 3●●●	321	503	—	2952	58573	3, 2●2, 2, 2, 2●●	529	903
—	2926	58057	3, 3●●2, 2●2●	541	741	2964	—	58313	3, 3, 4, 2●●2	235	609	—	2953	58579	3, 2●2, 2●●2, 2	401	957
2952	—	58061	3, 3●●2, 2, 2●●	482	823	—	2939	58321	3, 3, 4●●3●	341	437	2975	—	58601	3, 2●2, 3●●2●	536	745
2953	—	58067	3, 3●●2●●2, 2	364	869	2965	—	58337	3, 3, 5, 4●	222	275	—	2954	58603	3, 2●2, 3●●●2	327	863
2954	—	58073	3, 3●●2●2, 2●	528	751	—	2940	58363	3, 3, 7●2	83	239	2976	—	58613	3, 2●2, 4●●●●	408	671
—	2927	58099	3, 3●●4, 2, 2	233	571	2966	—	58367	3, 3, 10	10	103	2977	—	58631	3, 2●●●5, 3	152	483
2955	—	58109	3, 3●●6●●	174	325	—	2941	58369	3, 2●9●	97	107	—	2955	58657	3, 2●●●2●4●	463	561
—	2928	58111	3, 3●●8	23	197	2967	—	58379	3, 2●6●●2	144	365	2978	—	58661	3, 2●●●2●2●●●	632	997
—	2929	58129	3, 3, 2, 3●3●	385	487	2968	—	58391	3, 2●5●●3	124	439	2979	—	58679	3, 2●●●2, 2●3	240	889
—	2930	58147	3, 3, 2, 2●3, 2	293	665	—	2942	58393	3, 2●5, 2, 2●	305	429	—	2956	58687	3, 2●●●2, 6	71	453
2956	—	58151	3, 3, 2, 2●2, 3	214	721	2969	—	58403	3, 2●4●3, 2	218	493	—	2957	58693	3, 2●●●●●3●●●	585	913
—	2931	58153	3, 3, 2, 2●●●2●	563	777	—	2943	58411	3, 2●4●●●●2	265	691	—	2958	58699	3, 2●●●●●2●●2	443	1143
2957	—	58169	3, 3, 2, 2, 3, 2●	438	629	—	2944	58417	3, 2●4, 2, 3●	359	463	—	2959	58711	3, 2●●●●●●●●3	301	1089
—	2932	58171	3, 3, 2, 2, 3●2	247	685	2970	—	58427	3, 2●4, 3●2	198	547	2980	—	58727	3, 2●●●●2, 2, 3	274	937
—	2933	58189	3, 3, 2●●2, 2●●	491	837	2971	—	58439	3, 2●3●3, 3	178	581	2981	—	58733	3, 2●●●●2●2●●	592	1025
2958	—	58193	3, 3, 2●●●●3●	524	669	—	2945	58441	3, 2●3●2●2●	487	665	—	2960	58741	3, 2●●●●3●●●●	565	927
2959	—	58199	3, 3, 2●●●●●3	234	847	2972	—	58451	3, 2●3●●●2, 2	346	823	2982	—	58757	3, 2●●2, 4●●●	430	667
—	2934	58207	3, 3, 2●●●5	89	501	—	2946	58453	3, 2●3●●●●●●●●	561	907	2983	—	58763	3, 2●●2, 3●●2	342	877
2960	—	58211	3, 3, 2●2, 3, 2	300	689	—	2947	58477	3, 2●3, 2●2●●	447	773	—	2961	58771	3, 2●●2, 2●2, 2	403	955
2961	—	58217	3, 3, 2●2●●2●	544	755	2973	—	58481	3, 2●3, 3, 3●	400	521	2984	—	58787	3, 2●●2●●3, 2	376	857
2962	—	58229	3, 3, 2●3●●●●	432	709	2974	—	58511	3, 2●2●3, 4	138	589	—	2962	58789	3, 2●●2●●2●●●	647	1023
—	2935	58231	3, 3, 2●3●3	155	587	—	2948	58537	3, 2●2●●●●●●2●	697	963	—	2963	58831	3, 2●●3, 2, 4	139	617
—	2936	58237	3, 3, 2●5●●	221	409	—	2949	58543	3, 2●2●●●●4	165	761	2985	—	58889	3, 2, 2, 5●2●	310	419

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	2964	58897	3, 2, 2, 4●3●	351	443	—	2974	59107	3, 2, 2●3, 3, 2	291	671	3012	—	59369	3, 2, 6●●2●	246	343
2986	—	58901	3, 2, 2, 4●●●●●	426	685	—	2975	59113	3, 2, 2●3●●2●	517	719	—	2988	59377	3, 2, 7, 3●	163	215
2987	—	58907	3, 2, 2, 4, 2●2	242	651	—	2976	59119	3, 2, 2●3●4	113	541	3013	—	59387	3, 2, 8●2	66	191
—	2965	58909	3, 2, 2, 4, 3●●	317	559	3001	—	59123	3, 2, 2●4, 2, 2	250	613	3014	—	59393	3●●10●	74	81
2988	—	58913	3, 2, 2, 3●4●	358	433	3002	—	59141	3, 2, 3, 5●●●	278	429	3015	—	59399	3●●8, 3	60	187
—	2966	58921	3, 2, 2, 3●●●2●	549	757	—	2977	59149	3, 2, 3, 4, 2●●	333	563	—	2989	59407	3●●7, 4	53	219
2989	—	58937	3, 2, 2, 3, 3, 2●	440	631	3003	—	59159	3, 2, 3, 3●●3	182	649	3016	—	59417	3●●6, 2, 2●	244	343
2990	—	58943	3, 2, 2, 3, 6	58	365	—	2978	59167	3, 2, 3, 3, 5	79	419	—	2990	59419	3●●6, 2●2	145	389
—	2967	58963	3, 2, 2, 2●●●2, 2	413	983	3004	—	59183	3, 2, 3, 2●●4	134	615	3017	—	59441	3●●5, 2, 3●	294	379
2991	—	58967	3, 2, 2, 2●●●●3	256	925	—	2979	59197	3, 2, 3, 2, 4●●	299	543	—	2991	59443	3●●5, 2, 2, 2	209	503
2992	—	58979	3, 2, 2, 2, 2, 3, 2	338	775	3005	—	59207	3, 2, 3●●3, 3	196	643	3018	—	59447	3●●5, 2●3	124	457
2993	—	58991	3, 2, 2, 2, 2●4	140	659	—	2980	59209	3, 2, 3●●2●2●	533	729	3019	—	59453	3●●5, 4●●	202	365
2994	—	58997	3, 2, 2, 2, 3●●●●	502	823	3006	—	59219	3, 2, 3●●●●2, 2	368	877	—	2992	59467	3●●4●2●●2	259	667
2295	—	59009	3, 2, 2●●6●	270	311	—	2981	59221	3, 2, 3●●●●●●●●	595	963	3020	—	59471	3●●4●2, 4	110	479
—	2968	59011	3, 2, 2●●5, 2	229	499	—	2982	59233	3, 2, 3●2, 4●	375	461	—	2993	59473	3●●4●●●3●	401	511
2996	—	59021	3, 2, 2●●3, 2●●	482	817	—	2983	59239	3, 2, 3●2, 2, 3	203	695	—	2994	59497	3●●4, 2●●2●	451	625
—	2969	59023	3, 2, 2●●3, 4	147	629	3007	—	59243	3, 2, 3●2●●●2	320	843	—	2995	59509	3●●4, 3●●●●	373	611
—	2970	59029	3, 2, 2●●2●●●●●	653	1053	—	2984	59263	3, 2, 3●7	31	241	3021	—	59513	3●●4, 4, 2●	302	437
2997	—	59051	3, 2, 2●●●●●●●2	448	1173	3008	—	59273	3, 2, 4, 3●2●	362	493	—	2996	59539	3●●3●2●2, 2	331	783
—	2971	59053	3, 2, 2●●●●●●2●●	619	1067	—	2985	59281	3, 2, 4, 2●3●	369	469	—	2997	59557	3●●3●●●2●●●	559	883
2998	—	59063	3, 2, 2●●●2●3	236	879	3009	—	59333	3, 2, 5, 3●●●	280	439	3022	—	59561	3●●3●●●●●●2●	616	851
2999	—	59069	3, 2, 2●●●4●●	366	667	—	2986	59341	3, 2, 5, 2, 2●●	287	491	3023	—	59567	3●●3●●●●4	146	673
—	2972	59077	3, 2, 2●2, 3●●●	503	787	3010	—	59351	3, 2, 5●●●3	128	467	—	2998	59581	3●●3●●4●●	317	577
—	2973	59083	3, 2, 2●2, 2●●2	373	965	3011	—	59357	3, 2, 5●3●●	218	391	—	2999	59611	3●●3, 2●2●2	303	827
3000	—	59093	3, 2, 2●2●●●●●●	640	1037	—	2987	59359	3, 2, 5●5	45	263	—	3000	59617	3●●3, 3, 4●	353	435

z'	z''	Z	Exponenten	N̄	N	z'	z''	Z	Exponenten	N̄	N	z'	z''	Z	Exponenten	N̄	N
3024	—	59621	3●●3, 3, 2●●●	460	731	3037	—	59921	3●●●●4●3●	386	487	—	3022	60169	3●●●2, 4●2●	439	595
3025	—	59627	3●●3, 3●●●2	296	781	—	3013	59929	3●●●●4, 2, 2●	451	635	3053	—	60209	3●●●2, 2, 2, 3●	570	737
—	3001	59629	3●●3, 3●2●●	403	699	3038	—	59951	3●●●●3●●4	148	675	—	3023	60217	3●●●2, 2, 3, 2●	541	777
3026	—	59651	3●●2●6, 2	168	361	3039	—	59957	3●●●●3, 2●●●●	574	935	—	3024	60223	3●●●2, 2, 6	69	443
—	3002	59659	3●●2●4●●2	261	665	—	3014	59971	3●●●●2●4, 2	307	679	3054	—	60251	3●●●2●●●●2●2	396	1079
3027	—	59663	3●●2●4, 4	118	497	3040	—	59981	3●●●●2●2, 2●●	596	1015	3055	—	60257	3●●●2●2, 4●	476	585
3028	—	59669	3●●2●3●●●●●	540	869	3041	—	59999	3●●●●2●●5	112	625	—	3025	60259	3●●●2●2, 3, 2	367	843
—	3003	59671	3●●2●3●●3	211	751	—	3015	60013	3●●●●2, 2●2●●	589	1019	—	3026	60271	3●●●2●2●4	149	705
3029	—	59693	3●●2●2●●2●●	576	991	3042	—	60017	3●●●●2, 3, 3●	524	683	—	3027	60289	3●●●3, 6●	251	291
3030	—	59699	3●●2●2, 2, 2, 2	390	941	3043	—	60029	3●●●●2, 5●●	300	553	3056	—	60293	3●●●3, 4●●●	382	593
—	3004	59707	3●●2●2, 3●2	297	823	—	3016	60037	3●●●●●●4●●●	481	745	3057	—	60317	3●●●3, 2, 3●●	404	717
3031	—	59723	3●●2●●●2●●2	426	1099	3044	—	60041	3●●●●●●3●2●	604	821	—	3028	60331	3●●●3●●●●●●2	375	983
3032	—	59729	3●●2●●●●●3●	648	827	3045	—	60077	3●●●●●●●●●2●●	720	1241	—	3029	60337	3●●●3●2, 3●	477	619
—	3005	59743	3●●2●●●●5	111	623	3046	—	60083	3●●●●●●●2, 2, 2	474	1147	—	3030	60343	3●●●3●2●3	193	721
3033	—	59747	3●●2●●2, 3, 2	376	863	3047	—	60089	3●●●●●●●3, 2●	626	901	3058	—	60353	3●●●4, 5●	266	317
3034	—	59753	3●●2●●2●●2●	684	949	—	3017	60091	3●●●●●●●3●2	351	977	—	3031	60373	3●●●4●●●●●●●	463	751
3035	—	59771	3●●2●●4●2	240	677	3048	—	60101	3●●●●●2, 3●●●	590	923	3059	—	60383	3●●●4●5	62	361
—	3006	59779	3●●2, 2, 5, 2	233	509	—	3018	60103	3●●●●●2, 3, 3	257	847	—	3032	60397	3●●●5●2●●	281	489
—	3007	59791	3●●2, 2, 3, 4	147	631	3049	—	60107	3●●●●●2, 2●●2	438	1133	3060	—	60413	3●●●8●●	106	201
—	3008	59797	3●●2, 2, 2●●●●●	649	1047	—	3019	60127	3●●●●●2●5	105	601	—	3033	60427	3●2, 6●●2	151	383
—	3009	59809	3●●2, 2●●4●	477	581	—	3020	60133	3●●●●●3, 2●●●	583	927	3061	—	60443	3●2, 5, 2●2	188	505
—	3010	59833	3●●2 2●3, 2●	513	739	—	3021	60139	3●●●●●3●●●2	373	985	3062	—	60449	3●2, 4●4●	284	343
—	3011	59863	3●●2, 3●●●3	219	797	3050	—	60149	3●●●●●4●●●●	460	757	—	3034	60457	3●2, 4●●●2●	439	605
3036	—	59879	3●●2, 4, 2, 3	176	607	3051	—	60161	3●●●2, 7●	214	243	—	3035	60493	3●2, 3●2, 2●●	447	761
—	3012	59887	3●●2, 4●4	97	467	3052	—	60167	3●●●2, 5, 3	156	497	3063	—	60497	3●2, 3●●●3●	484	617

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
3064	—	60509	3●2, 3●●3●●	388	691	—	3048	60763	3●2●●●●●2●2	391	1065	—	3060	61051	3●3, 2, 4●2	185	521
3065	—	60521	3●2, 3, 2●●2●	536	743	3077	—	60773	3●2●●●2, 2●●●	622	987	—	3061	61057	3●3●●6●	223	257
3066	—	60527	3●2, 3, 2●4	122	573	3078	—	60779	3●2●●●2●●●2	406	1069	3090	—	61091	3●3●●●●3, 2	314	715
3067	—	60539	3●2, 3, 4●2	196	551	—	3049	60793	3●2●●●4, 2●	421	611	—	3062	61099	3●3●●●●●●●●2	367	961
—	3036	60589	3●2, 2●●●●2●●	589	1015	—	3050	60811	3●2●2, 3●●2	317	813	3091	—	61121	3●3●2, 5●	284	337
—	3037	60601	3●2, 2●●3, 2●	515	741	3079	—	60821	3●2●2, 2●●●●●	608	981	—	3063	61129	3●3●2, 2●2●	481	659
—	3038	60607	3●2, 2●●6	63	415	—	3051	60859	3●2●2●3●2	265	739	—	3064	61141	3●3●2●●●●●●	519	841
3068	—	60611	3●2, 2, 2, 4, 2	278	619	3080	—	60869	3●2●3, 3●●●	422	661	3092	—	61151	3●3●2●5	72	413
3069	—	60617	3●2, 2, 2, 2●2●	582	797	3081	—	60887	3●2●3●●●3	198	721	—	3065	61153	3●3●3, 4●	307	379
3070	—	60623	3●2, 2, 2, 2, 4	152	671	—	3052	60889	3●2●3●2, 2●	467	665	3093	—	61169	3●3●4, 3●	292	383
—	3039	60631	3●2, 2, 2●●●3	241	875	3082	—	60899	3●2●4, 3, 2	228	527	3094	—	61211	3●4, 3, 2●2	202	545
—	3040	60637	3●2, 2, 2●3●●	419	749	—	3053	60901	3●2●4, 2●●●	385	613	3095	—	61223	3●4, 2●2, 3	164	553
3071	—	60647	3●2, 2, 3, 2, 3	204	701	—	3054	60913	3●2●5, 3●	273	359	—	3066	61231	3●4, 2●●4	103	473
—	3041	60649	3●2, 2, 3●●2●	523	727	3083	—	60917	3●2●5●●●●	288	475	3096	—	61253	3●4●●3●●●	340	531
3072	—	60659	3●2, 2, 4, 2, 2	256	627	—	3055	60919	3●2●5●3	101	389	—	3067	61261	3●4●●2, 2●●	363	619
—	3042	60661	3●2, 2, 4●●●●	397	653	3084	—	60923	3●2●6●2	116	333	3097	—	61283	3●4●2, 3, 2	218	501
—	3043	60679	3●2●●5, 3	145	461	—	3056	60937	3●3, 5●2●	267	361	—	3068	61291	3●4●2●●●2	241	635
3073	—	60689	3●2●●3●3●	450	569	—	3057	60943	3●3, 5, 4	79	331	—	3069	61297	3●4●3, 3●	287	375
—	3044	60703	3●2●●3, 5	93	491	3085	—	60953	3●3, 4, 2, 2●	350	493	3098	—	61331	3●5, 2●2, 2	196	465
3074	—	60719	3●2●●2●●4	160	733	—	3058	60961	3●3, 3●4●	305	369	—	3070	61333	3●5, 2●●●●●	319	515
—	3045	60727	3●2●●2, 2●3	227	841	3086	—	61001	3●3, 2●2●2●	494	675	—	3071	61339	3●5, 2, 2●2	173	469
—	3046	60733	3●2●●2, 4●●	361	655	3087	—	61007	3●3, 2●2, 4	132	577	3099	—	61343	3●5, 2, 5	50	273
3075	—	60737	3●2●●●●●5●	376	443	—	3059	61027	3●3, 2, 2, 3, 2	283	649	—	3072	61357	3●5●●●2●●	281	485
—	3047	60757	3●2●●●●●●●●●●	741	1199	3088	—	61031	3●3, 2, 2, 2. 3	200	683	—	3073	61363	3●5●2, 2, 2	181	439
3076	—	60761	3●2●●●●●2, 2●	674	957	3089	—	61043	3●3, 2, 3, 2, 2	268	653	3100	—	61379	3●6, 4, 2	112	251

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
—	3074	61381	3●6, 3●●●	197	309	3114	—	61637	4, 4, 2, 3●●●	300	469	3123	—	61949	4, 3, 7●●	108	203
3101	—	61403	3●6●2●2	120	329	3115	—	61643	4, 4, 2, 2●●2	224	579	3124	—	61961	4, 2●5●2●	248	335
3102	—	61409	3●7, 4●	128	159	—	3086	61651	4, 4, 2●●2, 2	241	575	3125	—	61967	4, 2●5, 4	74	309
—	3075	61417	3●7●●2●	167	233	—	3087	61657	4, 4, 2●2, 2●	351	499	3126	—	61979	4, 2●4, 2●2	196	527
—	3076	61441	4, 11 ●	45	49	3116	—	61667	4, 4, 3, 3, 2	182	419	—	3102	61981	4, 2●4, 3●●	257	453
3103	—	61463	4, 7●●3	62	219	3117	—	61673	4, 4, 3●●2●	326	453	—	3103	61987	4, 2●3●3, 2	231	523
3104	—	61469	4, 7, 3●●	120	211	—	3088	61681	4, 4, 4, 3●	233	305	3127	—	61991	4, 2●3●2, 3	170	571
—	3077	61471	4, 7, 5	29	149	—	3089	61687	4, 4, 4●3	89	339	3128	—	62003	4, 2●3, 2, 2, 2	266	641
—	3078	61483	4, 6●●●●2	137	357	3118	—	61703	4, 3●5, 3	98	311	—	3104	62011	4, 2●3, 3●2	205	567
3105	—	61487	4, 6●●4	54	245	—	3090	61717	4, 3●3●●●●●	371	597	—	3105	62017	4, 2●2●5●	275	323
3106	—	61493	4, 6, 2●●●●	212	345	—	3091	61723	4, 3●3, 2●2	209	563	3129	—	62039	4, 2●2●●●●3	214	773
—	3079	61507	4, 5●4, 2	121	267	—	3092	61729	4, 3●2●4●	303	367	—	3106	62047	4, 2●2●●5	83	463
3107	—	61511	4, 5●3, 3	96	313	3119	—	61751	4, 3●2 2●3	158	585	—	3107	62053	4, 2●2, 2, 2●●●	485	769
—	3080	61519	4, 5●2, 4	71	309	3120	—	61757	4, 3●2, 4●●	252	457	3130	—	62057	4, 2●2, 2●●2●	520	721
—	3081	61543	4, 5, 2, 2, 3	113	385	3121	—	61781	4, 3●●●●●●●●●	526	851	—	3108	62071	4, 2●2, 3●3	153	577
3108	—	61547	4, 5, 2●●●2	180	473	—	3093	61813	4, 3●●3●●●●	381	625	3131	—	62081	4, 2●●●6●	232	267
3109	—	61553	4, 5, 3, 3●	222	289	—	3094	61819	4, 3●●4●2	167	471	3132	—	62099	4, 2●●●2●2, 2	346	819
3110	—	61559	4, 5, 3●3	88	331	—	3095	61837	4, 3, 2, 3, 2●●	339	575	—	3109	62119	4, 2●●●●●2, 3	241	815
—	3082	61561	4, 5, 4, 2●	197	285	—	3096	61843	4, 4, 2, 2●2, 2	279	661	3133	—	62129	4, 2●●●●2, 3●	504	653
3111	—	61583	4, 4●3, 4	80	341	—	3097	61861	4, 3, 2●●2●●●	451	713	—	3110	62131	4, 2●●●●2, 2, 2	355	859
—	3083	61603	4, 4●●●3, 2	215	489	3122	—	61871	4, 3, 2●●●4	116	537	—	3111	62137	4, 2●●●●3, 2●	469	675
—	3084	61609	4, 4●●●●●●2●	409	565	—	3098	61879	4, 3, 2●2●3	159	593	3134	—	62141	4, 2●●●●4●●	320	583
3112	—	61613	4, 4●●●●●2●●	350	603	—	3099	61909	4, 3, 3●●●●●●	409	663	—	3112	62143	4, 2●●●●6	57	377
—	3085	61627	4, 4●●3●2	173	481	—	3100	61927	4, 3, 4, 2, 3	125	431	3135	—	62171	4, 2●●2●2●2	294	803
3113	—	61631	4, 4●●6	38	249	—	3101	61933	4, 3, 4●2●●	263	457	3136	—	62189	4, 2●●3●2●●	382	663

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3113	62191	4, 2●●3●4	101	483	3151	—	62501	4●●4●2●●●	332	523	—	3137	62791	4●●●●●●3, 3	217	711
3137	—	62201	4, 2●●5, 2●	268	391	3152	—	62507	4●●4●●●●2	232	605	3163	—	62801	4●●●●●●●●3●	568	725
3138	—	62207	4, 2●●8	22	189	—	3124	62533	4●●3●3●●●	351	547	3164	—	62819	4●●●●●2, 3, 2	328	753
3139	—	62213	4, 2, 2, 5●●●	260	401	—	3125	62539	4●●3●2●●2	269	693	—	3138	62827	4●●●●●2●●●2	365	961
3140	—	62219	4, 2, 2, 4●●2	216	551	3153	—	62549	4●●3●●●●●●●	488	789	—	3139	62851	4●●●2, 5, 2	199	435
—	3114	62233	4, 2, 2, 3, 2, 2●	419	591	—	3126	62563	4●●3, 2, 3, 2	251	575	3165	—	62861	4●●●2, 3. 2●●	412	699
3141	—	62273	4, 2, 2●●5●	296	349	—	3127	62581	4●●3, 3●●●●	379	621	—	3140	62869	4●●●2, 2●●●●●	551	889
3142	—	62297	4, 2, 2●●●2, 2●	526	747	3154	—	62591	4●●3, 7	32	233	3166	—	62873	4●●●2, 2, 2, 2●	514	727
—	3115	62299	4, 2, 2●●●2●2	305	831	3155	—	62597	4●●2●4●●●	334	517	3167	—	62897	4●●●2●2, 3●	468	607
3143	—	62303	4, 2, 2●●●5	84	473	3156	—	62603	4●●2●3●●2	270	691	3168	—	62903	4●●●2●2●3	190	709
—	3116	62311	4, 2, 2●2, 2, 3	199	681	—	3128	62617	4●●2●2, 2, 2●	499	705	3169	—	62921	4●●●3, 2●2●	450	617
—	3117	62323	4, 2, 2●3. 2, 2	261	637	3157	—	62627	4●●2●●●3, 2	316	719	3170	—	62927	4●●●3, 2, 4	116	515
3144	—	62327	4, 2, 2●2●3	146	553	3158	—	62633	4●●2●●●●●●2●	600	829	—	3141	62929	4●●●3●●3●	413	529
—	3118	62347	4, 2, 3. 3●●2	235	603	3159	—	62639	4●●2●●●●4	142	655	3171	—	62939	4●●●3●2●2	246	673
3145	—	62351	4, 2, 3, 3, 4	102	439	—	3129	62653	4●●2●●4●●	307	559	3172	—	62969	4●●●6, 2●	200	293
—	3119	62383	4, 2, 3●●●4	111	515	—	3130	62659	4●●2, 2, 4, 2	243	541	—	3142	62971	4●●●6●2	107	307
—	3120	62401	4, 2, 4, 5●	209	249	—	3131	62683	4●●2, 2●2●2	289	789	3173	—	62981	4●2, 6●●●	192	295
3146	—	62417	4, 2, 4●●3●	316	405	3160	—	62687	4●●2, 2●5	78	445	—	3143	62983	4●2, 6, 3	89	281
3147	—	62423	4, 2, 4●●●3	138	503	—	3132	62701	4●●2, 3●2●●	381	661	3174	—	62987	4●2, 5●●2	164	417
3148	—	62459	4, 2, 7●2	76	219	3161	—	62723	4●●●●6, 2	152	327	—	3144	62989	4●2, 5, 2●●	239	403
—	3121	62467	4●●8, 2	77	163	—	3133	62731	4●●●●4●●2	235	599	3175	—	63029	4●2, 3, 2●●●●	418	681
—	3122	62473	4●●6●2●	195	263	—	3134	62743	4●●●●3●●3	189	673	—	3145	63031	4●2, 3, 2●3	155	573
3149	—	62477	4●●6, 2●●	186	313	3162	—	62753	4●●●●2●4●	392	475	3176	—	63059	4●2, 2●●●2, 2	334	795
3150	—	62483	4●●5●2. 2	168	395	—	3135	62761	4●●●●2●●●2●	595	821	—	3146	63067	4●2, 2●●2●2	287	781
—	3123	62497	4●●4●4●	241	291	—	3136	62773	4●●●●2, 2●●●●	549	895	—	3147	63073	4●2, 2, 2, 4●	353	433

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3148	63079	4●2, 2, 2, 2, 3	193	659	3188	—	63377	4●4, 2●3●	284	361	—	3176	63607	5, 4, 3●3	89	335
—	3149	63097	4●2, 2, 4, 2●	325	471	3189	—	63389	4●4, 2, 3●●	236	419	3199	—	63611	5, 4, 4●2	110	309
—	3150	63103	4●2, 2, 7	33	245	—	3162	63391	4●4, 2, 5	53	289	3200	—	63617	5, 3●6●	142	163
3177	—	63113	4●2●●3●2●	420	571	—	3163	63397	4●4●●2●●●	323	511	3201	—	63629	5, 3●3, 2●●	258	437
—	3151	63127	4●2●●2●●3	203	727	—	3164	63409	4●4●2, 3●	275	357	3202	—	63647	5, 3●2, 5	58	311
3178	—	63131	4●2●●2, 2●2	288	779	3190	—	63419	4●4●3●2	140	391	—	3177	63649	5, 3●●●4●	269	327
3179	—	63149	4●2●●●●●●2●●	496	855	—	3165	63421	4●4●4●●	169	309	3203	—	63659	5, 3●●●●●●2	248	649
3180	—	63179	4●2●2, 2●●2	298	771	—	3166	63439	4●5, 2, 4	63	281	—	3178	63667	5, 3●●2, 2, 2	227	549
3181	—	63197	4●2●2●3●●	336	601	3191	—	63443	4●5●●2, 2	160	383	3204	—	63671	5, 3●●2●3	132	491
—	3152	63199	4●2●2●5	71	407	—	3167	63463	4●6, 2, 3	73	253	3205	—	63689	5, 3, 2, 2●2●	344	471
—	3153	63211	4●2●3●●●2	251	663	3192	—	63467	4●6●●●2	112	297	—	3179	63691	5, 3, 2, 2●●2	217	561
—	3154	63241	4●3, 4●2●	281	381	3193	—	63473	4●7, 3●	122	161	—	3180	63697	5, 3, 2●●3●	323	413
—	3155	63247	4●3, 4, 4	81	343	—	3168	63487	4●11	5	59	—	3181	63703	5, 3, 2●●●3	143	519
—	3156	63277	4●3, 2●●2●●	377	649	—	3169	63493	5, 8●●●	87	133	—	3182	63709	5, 3, 2●3●●	249	445
3182	—	63281	4●3, 2, 2, 3●	358	463	—	3170	63499	5, 7●●2	77	195	3206	—	63719	5, 3, 3, 2, 3	122	419
3183	—	63299	4●3●●4, 2	196	435	3194	—	63521	5, 5●4●	150	181	—	3183	63727	5, 3, 3●4	69	329
3184	—	63311	4●3●●2, 4	110	483	3195	—	63527	5, 5●2, 3	88	295	3207	—	63737	5, 3, 5, 2●	186	271
—	3157	63313	4●3●●●●3●	397	507	3196	—	63533	5, 5●●2●●	202	347	3208	—	63743	5, 3, 8	16	133
3185	—	63317	4●3●●●●●●●●●	464	751	—	3171	63541	5, 5, 2●●●●	223	363	3209	—	63761	5, 2●3●3●	284	359
—	3158	63331	4●3●2, 3, 2	225	517	—	3172	63559	5, 4●3, 3	99	323	3210	—	63773	5, 2●3, 3●●	252	445
—	3159	63337	4●3●2●●2●	407	565	—	3173	63577	5, 4●●2, 2●	287	407	—	3184	63781	5, 2●2●2●●●	381	601
3186	—	63347	4●3●3, 2, 2	206	503	3197	—	63587	5, 4, 2, 3, 2	162	371	—	3185	63793	5, 2●2, 2, 3●	349	451
3187	—	63353	4●3●4, 2●	254	369	—	3174	63589	5, 4, 2, 2●●●	277	439	—	3186	63799	5, 2●2, 2●3	145	537
—	3160	63361	4●4, 6●	149	173	3198	—	63599	5, 4, 2●4	68	319	3211	—	63803	5, 2●2, 3●2	188	521
—	3161	63367	4●4, 4, 3	101	327	—	3175	63601	5, 4, 3, 3●	225	293	3212	—	63809	5, 2●●●5●	242	285

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3187	63823	5, 2●●●2, 4	113	495	—	3199	64153	5●●●●2, 2, 2●	421	595	—	3211	64483	5●5, 3, 2	111	257
3213	—	63839	5, 2●●●●5	70	393	3226	—	64157	5●●●●2, 3●●	320	567	—	3212	64489	5●5●●2●	193	269
—	3188	63841	5, 2●●2, 4●	307	377	—	3200	64171	5●●●●●●●●●2	309	809	3239	—	64499	5●6, 2, 2	88	217
—	3189	63853	5, 2●●2●2●●	361	625	3227	—	64187	5●●●●●3●2	208	579	—	3213	64513	6, 9●	55	61
3214	—	63857	5, 2●●3, 3●	318	415	—	3201	64189	5●●●●●4●●	253	461	3240	—	64553	6, 4●●●2●	230	317
3215	—	63863	5, 2●●3●3	124	469	3228	—	64217	5●●●2●2, 2●	400	569	—	3214	64567	6, 4, 2●3	81	299
—	3190	63901	5, 2, 2, 2, 3●●	287	509	3229	—	64223	5●●●2●5	62	355	3241	—	64577	6, 3●5●	144	169
—	3191	63907	5, 2, 2●●3, 2	233	531	—	3202	64231	5●●●3, 2, 3	141	485	—	3215	64579	6, 3●4, 2	119	263
—	3192	63913	5, 2, 2●●●●2●	439	607	—	3203	64237	5●●●3●2●●	299	519	—	3216	64591	6, 3●2, 4	69	301
3216	—	63929	5, 2, 2●3, 2●	320	461	3230	—	64271	5●2, 4, 4	74	313	3242	—	64601	6, 3●●2, 2●	270	383
—	3193	63949	5, 2, 3, 2, 2●●	299	511	—	3204	64279	5●2, 3●●3	131	467	—	3217	64609	6, 3, 2, 4●	195	239
3217	—	63977	5, 2, 4●●2●	278	387	3231	—	64283	5●2, 3, 2●2	188	507	3243	—	64613	6, 3, 2, 2●●●	258	409
—	3194	63997	5. 2, 7●●	93	175	3232	—	64301	5●2, 2●●2●●	348	599	—	3218	64621	6, 3, 2●2●●	233	403
3218	—	64007	5●●6, 3	72	227	—	3205	64303	5●2, 2●●4	97	445	—	3219	64627	6, 3, 3, 2, 2	145	353
3219	—	64013	5●●5, 2●●	194	327	3233	—	64319	5●2, 2, 6	40	257	—	3220	64633	6, 3, 4, 2●	183	265
3220	—	64019	5●●4●2, 2	172	405	—	3206	64327	5●2●●3, 3	143	469	3244	—	64661	6, 2●2●●●●●	312	503
—	3195	64033	5●●3●4●	239	289	—	3207	64333	5●2●●2, 2●●	349	595	—	3221	64663	6, 2●2●●3	121	433
3221	—	64037	5●●3●2●●●	328	517	3234	—	64373	5●2●3●●●●	304	499	3245	—	64667	6, 2●2, 2●2	172	465
—	3196	64063	5●●3, 6	39	245	—	3208	64381	5●2●5●●	155	287	3246	—	64679	6, 2●●●2, 3	134	453
3222	—	64067	5●●2●4, 2	184	407	—	3209	64399	5●3, 3, 4	75	323	—	3222	64693	6, 2●●2●●●●	313	511
—	3197	64081	5●●2●●●3●	385	491	3235	—	64403	5●3, 2●2, 2	202	479	3247	—	64709	6, 2, 2, 3●●●	250	391
3223	—	64091	5●●2●●2●2	240	653	3236	—	64433	5●3●2, 3●	272	353	—	3223	64717	6, 2, 2, 2, 2●●	263	449
3224	—	64109	5●●2, 2●2●●	352	609	3237	—	64439	5●3●2●3	110	411	—	3224	64747	6, 2, 3●●●2	161	425
—	3198	64123	5●●2, 4●2	151	425	3238	—	64451	5●4, 4, 2	122	273	3248	—	64763	6, 2, 5●2	84	239
3225	—	64151	5●●●●2●●3	174	623	—	3210	64453	5●4, 3●●●	215	337	3249	—	64781	6●●4, 2●●	190	321

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
—	3225	64783	6●●4, 4	59	249	—	3236	65071	7, 3●●4	51	233	3275	—	65327	8, 2●●4	42	193
3250	—	64793	6●●3, 2, 2●	256	361	—	3237	65089	7, 2●5●	125	147	—	3250	65353	8●●2●2●	163	223
3251	—	64811	6●●2●●●●●2	204	533	3264	—	65099	7, 2●2●●2	140	361	3276	—	65357	8●●2, 2●●	146	249
3252	—	64817	6●●2, 2, 3●	270	349	—	3238	65101	7, 2●2, 2●●	199	339	—	3251	65371	8●●●2●2	95	259
—	3226	64849	6●●●●●●●3●	311	397	3265	—	65111	7, 2●●●●3	96	347	3277	—	65381	8●2, 2●●●	148	235
3253	—	64853	6●●●●●●●●●●●●	364	589	—	3239	65119	7, 2●●5	37	207	3278	—	65393	8●3, 3●	114	149
3254	—	64871	6●●●2, 2, 3	126	431	3266	—	65123	7, 2, 2, 3, 2	126	289	—	3252	65407	8●7	9	71
3255	—	64877	6●●●2●2●●	272	471	3267	—	65129	7, 2, 2●●2●	230	319	—	3253	65413	9, 4●●●	83	129
—	3227	64879	6●●●2●4	73	345	3268	—	65141	7, 2, 3●●●●	186	305	—	3254	65419	9, 3●●2	65	167
—	3228	64891	6●●●4●2	113	319	3269	—	65147	7, 2, 4●2	82	231	3279	—	65423	9, 3, 4	28	121
3256	—	64901	6●2, 4●●●	194	301	—	3240	65167	7●●3, 4	53	227	—	3255	65437	9, 2, 3●●	85	151
3257	—	64919	6●2, 2●●3	114	409	3270	—	65171	7●●2●2, 2	144	341	3280	—	65447	9●●2, 3	48	163
—	3229	64921	6●2, 2, 2, 2●	275	389	—	3241	65173	7●●2●●●●●	235	379	—	3256	65449	9●●●●2●	125	173
—	3230	64927	6●2, 2, 5	47	255	—	3242	65179	7●●2, 2●2	129	349	—	3257	65479	10, 3, 3	31	103
3258	—	64937	6●2●●●●●2●	316	437	3271	—	65183	7●●2, 5	38	205	—	3258	65497	10●2, 2●	75	107
—	3231	64951	6●2●2●3	101	377	—	3243	65203	7●●●2, 2, 2	145	351	3281	—	65519	11●4	12	59
—	3232	64969	6●3, 2●2●	237	325	3272	—	65213	7●●●4●●	130	237	—	3259	65521	12, 3●	37	49
3259	—	64997	6●4, 2●●●	184	293	—	3244	65239	7●2●●●3	85	309	3282	—	65537	●15●	16	17
3260	—	65003	6●4●●●2	116	307	—	3245	65257	7●3●●2●	179	249	—	3260	65539	●14, 2	15	31
—	3233	65011	6●5, 2, 2	89	219	3273	—	65267	7●4, 2, 2	86	211	3283	—	65543	●13, 3	14	43
3261	—	65027	7, 7, 2	50	107	—	3246	65269	7●4●●●●	133	219	—	3261	65551	●12, 4	13	53
—	3234	65029	7, 6●●●	93	143	—	3247	65287	8, 5, 3	41	131	—	3262	65557	●11●●●●●	63	101
3262	—	65033	7, 5●2●	122	165	—	3248	65293	8, 4, 2●●	107	181	—	3263	65563	●11, 2●2	37	99
—	3235	65053	7, 4, 3●●	123	217	3274	—	65309	8, 3, 3●●	108	191	3284	—	65579	●10●●●●2	58	151
3263	—	65063	7, 3●2, 3	80	269	—	3249	65323	8, 2●●●●2	109	285	—	3264	65581	●10●●2●●	81	139

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3265	65587	●10, 2, 2, 2	57	137	3296	—	65837	●7●2●●2●●	218	375	3312	—	66107	●6●3, 3●2	132	365
—	3266	65599	●10, 6	11	67	—	3279	65839	●7●2●●4	61	279	—	3288	66109	●6●3, 4●●	163	295
3285	—	65609	●9●2●2●	118	161	3297	—	65843	●7●2, 2, 2, 2	148	357	3313	—	66137	●6●2●●2, 2●	332	471
—	3267	65617	●9●●●3●	117	149	—	3280	65851	●7●2, 3●2	113	313	3314	—	66161	●6●2, 3, 3●	254	331
—	3268	65629	●9●●3●●	95	169	3298	—	65867	●7●●●2●●2	164	423	—	3289	66169	●6●2, 4, 2●	223	323
3286	—	65633	●9, 2, 4●	94	115	—	3281	65881	●7●●●●2, 2●	267	379	3315	—	66173	●6●2, 5●●	146	269
—	3269	65647	●9, 2●4	31	145	—	3282	65899	●7●●2●●●2	163	429	3316	—	66179	●6●●●5, 2	130	283
3287	—	65651	●9, 3, 2, 2	72	175	3299	—	65921	●7, 2, 6●	110	127	3317	—	66191	●6●●●3, 4	84	359
3288	—	65657	●9, 4, 2●	92	133	3300	—	65927	●7, 2, 4, 3	76	245	3318	—	66221	●6●●●●●●●2●●	358	617
—	3270	65677	●8●3, 2●●	127	215	—	3283	65929	●7, 2, 3●2●	211	287	3319	—	66239	●6●●●●6	38	251
3289	—	65687	●8●2●●3	68	243	3301	—	65951	●7, 2, 2, 5	42	227	—	3290	66271	●6●●2●5	53	303
3290	—	65699	●8●●●3, 2	106	241	3302	—	65957	●7, 2●●2●●●	260	411	3320	—	66293	●6●●4●●●●	234	385
—	3271	65701	●8●●●2●●●	183	289	3303	—	65963	●7, 2●●●●●2	176	461	—	3291	66301	●6●●6●●	113	211
—	3272	65707	●8●●●●●●●2	125	327	3304	—	65981	●7, 2●4●●	142	259	—	3292	66337	●6, 2, 2●4●	245	297
—	3273	65713	●8●●2, 3●	163	211	—	3284	65983	●7, 2●6	25	167	—	3293	66343	●6, 2, 2●2, 3	141	475
3291	—	65717	●8●●2●●●●	182	297	3305	—	65993	●7, 3, 2●2●	224	307	3321	—	66347	●6, 2, 2●●●●2	230	601
—	3274	65719	●8●●2●3	67	249	3306	—	66029	●7, 4●2●●	156	271	3322	—	66359	●6, 2, 2, 2●3	126	467
3292	—	65729	●8, 2, 5●	104	123	—	3285	66037	●7, 5●●●●	139	229	—	3294	66361	●6, 2, 2, 3, 2●	289	415
—	3275	65731	●8, 2, 4, 2	85	189	3307	—	66041	●7, 6, 2●	106	155	—	3295	66373	●6, 2●●3●●●	303	473
—	3276	65761	●8, 3, 4●	121	149	3308	—	66047	●7, 9	8	73	3323	—	66377	●6, 2●●2●2●	362	495
3293	—	65777	●8 4, 3●	120	157	—	3286	66067	●6●4●2, 2	133	313	3324	—	66383	●6, 2●●2, 4	96	421
3294	—	65789	●8, 6●●	64	119	3309	—	66071	●6●4●●3	86	305	—	3296	66403	●6, 2●2, 3, 2	199	457
—	3277	65809	●7●3●3●	167	211	3310	—	66083	●6●3●3, 2	148	335	3325	—	66413	●6, 2●2●2●●	302	523
—	3278	65827	●7●2●3, 2	131	297	3311	—	66089	●6●3●●●2●	288	397	3326	—	66431	●6, 2●7	22	169
3295	—	65831	●7●2●2, 3	96	323	—	3287	66103	●6●3, 2●3	101	373	3327	—	66449	●6, 3, 2●3●	270	343

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3297	66457	●6, 3, 2, 2, 2●	299	423	—	3309	66733	●5●2●●●●●2●●	437	753	—	3323	67003	●5●●2●3●2	217	605
—	3298	66463	●6, 3, 2, 5	51	277	—	3310	66739	●5●2●●2, 2, 2	289	699	—	3324	67021	●5●●3, 2, 2●●	361	617
3328	—	66467	●6, 3●●3, 2	182	415	3341	—	66749	●5●2●●4●●	262	477	—	3325	67033	●5●●3●2, 2●	387	551
3329	—	66491	●6, 3●3●2	138	385	—	3311	66751	●5●2●●6	47	309	3352	—	67043	●5●●4, 3, 2	190	439
—	3299	66499	●6, 4, 4, 2	123	275	—	3312	66763	●5●2, 2, 2●●2	275	711	3353	—	67049	●5●●4●●2●	334	465
3330	—	66509	●6, 4, 2, 2●●	224	383	3342	—	66791	●5●2, 3, 2, 3	154	529	—	3326	67057	●5●●5, 3●	229	301
—	3300	66523	●6, 4●2●2	137	375	3343	—	66797	●5●2, 3●2●●	328	569	3354	—	67061	●5●●5●●●●	242	399
—	3301	66529	●6, 5, 4●	151	187	3344	—	66809	●5●2, 5, 2●	234	341	3355	—	67073	●5, 2, 8●	110	123
3331	—	66533	●6, 5, 2●●●	194	309	3345	—	66821	●5●●●5●●●	246	379	3356	—	67079	●5, 2, 6, 3	84	265
—	3302	66541	●6, 5●2●●	165	287	—	3313	66841	●5●●●3, 2, 2●	405	571	3357	—	67103	●5, 2, 4, 5	58	303
—	3303	66553	●6, 7, 2●	107	157	3346	—	66851	●5●●●2●3, 2	272	617	3358	—	67121	●5, 2, 3, 2, 3●	354	457
3332	—	66569	●5●6●2●	158	213	—	3314	66853	●5●●●2●2●●●	471	743	—	3327	67129	●5, 2, 3, 3, 2●	341	489
—	3304	66571	●5●6●●2	103	261	3347	—	66863	●5●●●2●●4	126	577	3359	—	67139	●5, 2, 2●4, 2	212	469
3333	—	66587	●5●5, 2●2	130	349	—	3315	66877	●5●●●2, 4●●	285	517	—	3328	67141	●5, 2, 2●3●●●	379	591
3334	—	66593	●5●4●4●	198	239	—	3316	66883	●5●●●●●4, 2	245	543	—	3329	67153	●5, 2, 2●●●3●	443	565
—	3305	66601	●5●4●●●2●	307	423	—	3317	66889	●5●●●●●●2●2●	523	715	3360	—	67157	●5,2,2●●●●●●●●	520	841
3335	—	66617	●5●4, 3, 2●	252	361	—	3318	66919	●5●●●●2, 2, 3	205	701	3361	—	67169	●5, 2, 2, 2, 4●	340	417
3336	—	66629	●5●3●3●●●	292	455	3348	—	66923	●5●●●●2●●●2	324	853	3362	—	67181	●5, 2, 2, 2●2●●	404	699
—	3306	66643	●5●3●●●2, 2	251	597	—	3319	66931	●5●●●●3, 2, 2	271	661	3363	—	67187	●5, 2, 2, 3, 2, 2	250	609
3337	—	66653	●5●3●●3●●	278	495	—	3320	66943	●5●●●●7	33	251	—	3330	67189	●5, 2, 2, 3●●●●	391	641
3338	—	66683	●5●3, 4●2	142	399	3349	—	66947	●5●●2, 5, 2	178	389	3364	—	67211	●5, 2●●3●●2	262	671
—	3307	66697	●5●2●3●2●	357	485	—	3321	66949	●5●●2, 4●●●	323	501	—	3331	67213	●5, 2●●3, 2●●	377	639
3339	—	66701	●5●2●3, 2●●	330	559	3350	—	66959	●5●●2, 3, 4	112	481	3365	—	67217	●5, 2●●2●3●	428	543
3340	—	66713	●5●2●2, 2, 2●	424	599	—	3322	66973	●5●●2, 2, 3●●	349	619	—	3332	67219	●5, 2●●2●2, 2	313	741
—	3308	66721	●5●2●●●4●	343	417	3351	—	66977	●5●●2●●4●	362	441	—	3333	67231	●5, 2●●2, 5	83	447

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
3366	—	67247	●5, 2●●●●●4	134	619	3380	—	67511	●5, 4●2●3	118	441	—	3354	67777	●4●3, 2, 5●	283	335
—	3334	67261	●5, 2●●●4●●	287	523	3381	—	67523	●5, 5, 4, 2	130	291	—	3355	67783	●4●3, 2, 3, 3	179	589
3367	—	67271	●5, 2●2, 3, 3	172	567	—	3345	67531	●5, 5, 2●●2	167	433	—	3356	67789	●4●3, 2, 2, 2●●	433	739
—	3335	67273	●5, 2●2, 2●2●	465	637	—	3346	67537	●5, 5●●3●	241	309	—	3357	67801	●4●3, 2●2, 2●	479	681
3368	—	67289	●5, 2●2●2, 2●	452	643	3382	—	67547	●5, 5●2●2	142	389	—	3358	67807	●4●3, 2●5	75	427
3369	—	67307	●5, 2●3●●●2	248	655	3383	—	67559	●5, 6, 2, 3	80	277	—	3359	67819	●4●3, 3●●●2	271	715
—	3336	67339	●5, 3, 4●●2	183	467	—	3347	67567	●5, 6●4	43	209	3396	—	67829	●4●3, 4●●●●	340	559
3370	—	67343	●5, 3, 4, 4	82	347	3384	—	67577	●5, 8, 2●	104	153	—	3360	67843	●4●2●6, 2	155	333
3371	—	67349	●5, 3, 3●●●●●	372	599	—	3348	67579	●5, 8●2	55	159	3397	—	67853	●4●2●4, 2●●	350	591
—	3337	67369	●5, 3, 2●●●2●	447	617	3385	—	67589	●4●8●●●	112	171	—	3361	67867	●4●2●3, 2●2	281	757
3372	—	67391	●5, 3, 2, 6	44	283	3386	—	67601	●4●6●3●	182	229	3398	—	67883	●4●2●2●●●●2	384	1003
—	3338	67399	●5, 3●●3, 3	157	515	3387	—	67607	●4●6●●3	88	311	—	3362	67891	●4●2●2, 2, 2, 2	361	871
3373	—	67409	●5, 3●●●●3●	408	521	3388	—	67619	●4●5●3, 2	158	357	3399	—	67901	●4●2●2, 4●●	338	613
—	3339	67411	●5, 3●●●●2, 2	295	703	3389	—	67631	●4●5●●4	76	345	—	3363	67927	●4●2●●●●●●3	269	973
3374	—	67421	●5, 3●●●3●●	320	571	—	3349	67651	●4●4●4, 2	169	373	3400	—	67931	●4●2●●●●2●2	372	1013
3375	—	67427	●5, 3●2, 3, 2	232	533	3390	—	67679	●4●4●●5	64	355	—	3364	67933	●4●2●●●●3●●	475	847
—	3340	67429	●5, 3●2, 2●●●	395	627	—	3350	67699	●4●4, 3, 2, 2	215	523	—	3365	67939	●4●2●●2, 3, 2	349	801
3376	—	67433	●5, 3●2●●2●	420	583	3391	—	67709	●4●4, 5●●	180	331	3401	—	67943	●4●2●●2, 2, 3	246	841
—	3341	67447	●5, 3●3●3	119	451	—	3351	67723	●4●3●3●●2	249	637	—	3366	67957	●4●2●●3●●●●	509	835
—	3342	67453	●5, 3●5●●	169	313	3392	—	67733	●4●3●2●●●●●	492	793	3402	—	67961	●4●2●●4, 2●	406	589
—	3343	67477	●5, 4, 2●●●●●	355	573	—	3352	67741	●4●3●2, 3●●	353	625	3403	—	67967	●4●2●●7	40	303
3377	—	67481	●5, 4, 2, 2, 2●	330	467	3393	—	67751	●4●3●●●2, 3	214	723	3404	—	67979	●4●2, 2, 3●●2	314	805
—	3344	67489	●5, 4●●4●	255	311	3394	—	67757	●4●3●●●●2●●	480	827	—	3367	67987	●4●2, 2, 2●2, 2	371	879
3378	—	67493	●5, 4●●2●●●	342	541	—	3353	67759	●4●3●●●●4	133	613	—	3368	67993	●4●2, 2, 2, 2, 2●	565	799
3379	—	67499	●5, 4●●●●●2	230	603	3395	—	67763	●4●3●●2, 2, 2	318	769	—	3369	68023	●4●2, 2●2●3	211	787

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3370	68041	●4●2, 3, 2●2●	507	695	—	3383	68389	●4●●2, 2●2●●●	609	961	—	3394	68683	●4, 2, 3●2●●2	321	827
—	3371	68053	●4●2, 3●●●●●●	541	877	3417	—	68399	●4●●2, 2●●4	162	743	3431	—	68687	●4, 2, 3●2, 4	136	593
—	3372	68059	●4●2, 3●2●2	279	763	—	3384	68437	●4●●2●●●●●●●●	731	1183	3432	—	68699	●4, 2, 3●●2●2	310	843
—	3373	68071	●4●2, 4, 2, 3	165	569	—	3385	68443	●4●●2●●●2●2	385	1049	3433	—	68711	●4, 2, 3, 2, 2, 3	212	723
3405	—	68087	●4●2, 5●3	108	415	3418	—	68447	●4●●2●●●5	106	597	—	3395	68713	●4, 2, 3, 2●●2●	549	761
3406	—	68099	●4●●●7, 2	130	277	—	3386	68449	●4●●2●2, 4●	463	569	3434	—	68729	●4, 2, 3, 4, 2●	364	527
3407	—	68111	●4●●●5, 4	96	401	—	3387	68473	●4●●2●4, 2●	407	591	—	3396	68737	●4, 2, 2●6●	255	293
—	3374	68113	●4●●●4●3●	367	463	3419	—	68477	●4●●2●5●●	262	485	—	3397	68743	●4, 2, 2●4, 3	179	575
3408	—	68141	●4●●●3●●2●●	502	863	3420	—	68483	●4●●3, 5, 2	206	451	—	3398	68749	●4, 2, 2●3, 2●●	461	781
3409	—	68147	●4●●●3, 2, 2, 2	344	829	3421	—	68489	●4●●3, 3●2●	462	629	—	3399	68767	●4, 2, 2●2, 5	103	553
—	3375	68161	●4●●●2●5●	355	417	—	3388	68491	●4●●3, 3●●2	295	757	3435	—	68771	●4, 2, 2●●●3, 2	374	851
3410	—	68171	●4●●●2●2●●2	400	1031	3422	—	68501	●4●●3, 2●●●●●	562	907	3436	—	68777	●4, 2, 2●●●●●2●	710	981
3411	—	68207	●4●●●2, 2●4	152	715	3423	—	68507	●4●●3, 2, 2●2	306	829	—	3400	68791	●4, 2, 2●●2●3	233	867
—	3376	68209	●4●●●2, 3, 3●	501	653	—	3389	68521	●4●●3●●●●2●	595	823	3437	—	68813	●4, 2,2,2,2,2●●	536	915
3412	—	68213	●4●●●2, 3●●●●	546	895	3424	—	68531	●4●●3●2, 2, 2	328	795	3438	—	68819	●4, 2, 2,2●●2,2	406	969
3413	—	68219	●4●●●2, 4●2	242	681	—	3390	68539	●4●●3●3●2	239	667	—	3401	68821	●4, 2,2,2●●●●●●	655	1061
—	3377	68227	●4●●●●●5, 2	253	551	3425	—	68543	●4●●3●6	50	339	—	3402	68863	●4, 2, 2, 8	27	227
—	3378	68239	●4●●●●●3, 4	163	697	3426	—	68567	●4●●4●●●3	172	627	3439	—	68879	●4, 2●●4, 4	124	523
3414	—	68261	●4●●●●●●●2●●●	736	1163	—	3391	68581	●4●●5, 2●●●	327	521	—	3403	68881	●4, 2●●3●3●	469	593
3415	—	68279	●4●●●●●●2●3	264	983	3427	—	68597	●4●●6●●●●	238	393	3440	—	68891	●4, 2●●3, 2●2	318	857
—	3379	68281	●4●●●●●●3, 2●	601	865	—	3392	68611	●4, 2, 8, 2	93	197	3441	—	68897	●4, 2●●2●4●	458	555
—	3380	68311	●4●●●●2●●●3	275	999	3428	—	68633	●4, 2, 5, 2, 2●	322	453	—	3404	68899	●4, 2●●2●3, 2	361	819
—	3381	68329	●4●●●●3●●2●	589	819	3429	—	68639	●4, 2, 5, 5	60	311	3442	—	68903	●4, 2●●2●2, 3	264	889
3416	—	68351	●4●●●●●8	28	241	—	3393	68659	●4, 2, 4, 2, 2, 2	267	643	3443	—	68909	●4, 2●●2●●2●●	598	1029
—	3382	68371	●4●●2, 3●2, 2	341	805	3430	—	68669	●4, 2, 4, 4●●	256	463	—	3405	68917	●4, 2●●2, 2●●●●	641	1045

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
3444	—	68927	●4, 2●●2, 6	70	447	3457	—	69239	●4, 3, 2, 3●3	164	619	3470	—	69497	●4, 4●4, 2●	276	401
—	3406	68947	●4, 2●●●●●●●2, 2	479	1141	—	3418	69247	●4, 3, 2, 7	37	275	—	3430	69499	●4, 4●4●2	151	427
3445	—	68963	●4, 2●●●2, 3, 2	382	877	3458	—	69257	●4, 3●●3●2●	470	639	3471	—	69539	●4, 5●●3, 2	202	461
3446	—	68993	●4, 2●2, 6●	274	317	—	3419	69259	●4, 3●●3●●2	301	771	3472	—	69557	●4, 5●2●●●●	326	533
—	3407	69001	●4, 2●2, 3●2●	521	709	3459	—	69263	●4, 3●●3, 4	132	565	3473	—	69593	●4, 6●2, 2●	242	345
3447	—	69011	●4, 2●2, 2●2, 2	392	929	—	3420	69313	●4, 3●2, 5●	311	369	3474	—	69623	●4, 8●3	46	179
—	3408	69019	●4, 2●2, 2, 2●2	349	945	3460	—	69317	●4, 3●2, 3●●●	448	701	3475	—	69653	●3●7●●●●●●	210	337
3448	—	69029	●4, 2●2●●2●●●	628	993	—	3421	69337	●4, 3●2●2, 2●	511	727	—	3431	69661	●3●7, 3●●	161	283
—	3409	69031	●4, 2●2●●2, 3	263	891	3461	—	69341	●4. 3●2●3●●	374	669	3476	—	69677	●3●6●●2●●	258	443
—	3410	69061	●4, 2●3, 3●●●	445	697	3462	—	69371	●4, 3●5●2	142	405	—	3432	69691	●3●6, 3●2	141	389
—	3411	69067	●4, 2●3, 2●●2	327	847	—	3422	69379	●4, 4, 6, 2	131	283	—	3433	69697	●3●5●5●	199	233
—	3412	69073	●4, 2●3●●3●	477	611	3463	—	69383	●4, 4, 5, 3	110	351	—	3434	69709	●3●5●2, 2●●	325	553
—	3413	69109	●4, 2●5●●●●	305	503	3464	—	69389	●4, 4, 4, 2●●	288	487	3477	—	69737	●3●5, 2●●2●	402	557
3449	—	69119	●4, 2●9	16	155	3465	—	69401	●4, 4, 3, 2, 2●	382	539	—	3435	69739	●3●5, 2●●●2	247	649
—	3414	69127	●4, 3, 6, 3	101	319	—	3423	69403	●4, 4, 3, 2●2	225	607	3478	—	69761	●3●4●6●	198	227
3450	—	69143	●4, 3, 4●●3	154	547	—	3424	69427	●4, 4, 2, 2, 2, 2	277	669	—	3436	69763	●3●4●5, 2	169	367
3451	—	69149	●4, 3, 4, 3●●	292	515	3466	—	69431	●4, 4, 2, 2●3	162	601	3479	—	69767	●3●4●4, 3	140	449
—	3415	69151	●4, 3, 4, 5	69	361	—	3425	69439	●4, 4, 2, 6	47	303	3480	—	69779	●3●4●2●2, 2	304	719
—	3416	69163	●4, 3, 3●●●●●2	313	817	—	3426	69457	●4, 4●●●●●3●	433	553	3481	—	69809	●3●4●●2, 3●	458	593
3452	—	69191	●4, 3, 2●3, 3	196	641	—	3427	69463	●4, 4●●●●●●3	193	699	3482	—	69821	●3●4●●4●●	294	535
—	3417	69193	●4, 3, 2●2●2●	535	731	3467	—	69467	●4, 4●●●2●2	266	725	3483	—	69827	●3●4, 2, 4, 2	236	525
3453	—	69197	●4, 3, 2●2, 2●●	482	821	3468	—	69473	●4, 4●2, 4●	318	391	—	3437	69829	●3●4, 2, 3●●●	419	655
3454	—	69203	●4, 3, 2●●●2, 2	376	895	—	3428	69481	●4, 4●2●●2●	443	615	3484	—	69833	●3●4, 2, 2●2●	496	679
3455	—	69221	●4, 3, 2, 2, 2●●●	524	831	3469	—	69491	●4, 4●3, 2, 2	224	547	—	3438	69847	●3●4, 2●●●3	207	751
3456	—	69233	●4, 3, 2, 3, 3●	418	545	—	3429	69493	●4, 4●3●●●●	349	573	3485	—	69857	●3●4, 3, 4●	332	409

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3439	69859	●3●4, 3, 3, 2	255	587
—	3440	69877	●3●4, 4●●●●	351	577
3486	—	69899	●3●3●4●●2	254	647
3487	—	69911	●3●3●3●●3	206	733
3488	—	69929	●3●3●2●●●2●	656	905
—	3441	69931	●3●3●2●●●●2	407	1063
3489	—	69941	●3●3●2, 2●●●●	608	991
3490	—	69959	●3●3●●●3, 3	244	799
—	3442	69991	●3●3●●2, 2, 3	263	899
—	3443	69997	●3●3●●2●2●●	569	985
3491	—	70001	●3●3●●3, 3●	502	655
—	3444	70003	●3●3●●3, 2, 2	349	851
—	3445	70009	●3●3●●4, 2●	435	631
3492	—	70019	●3●3, 2, 5, 2	234	511
—	3446	70039	●3●3, 2, 2●●3	253	907
—	3447	70051	●3●3, 2●●3, 2	377	859
3493	—	70061	●3●3, 2●●●2●●	606	1045
3494	—	70067	●3●3, 2●2, 2, 2	396	959
3495	—	70079	●3●3, 2●6	62	415
—	3448	70099	●3●3, 3●●2, 2	367	877
—	3449	70111	●3●3, 3●5	81	467
—	3450	70117	●3●3, 4, 2●●●	443	705
3496	—	70121	●3●3, 4●●2●	462	643
—	3451	70123	●3●3, 4●●●2	281	743
3497	—	70139	●3●3, 6●2	138	395

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3452	70141	●3●3, 7●●	157	295
3498	—	70157	●3●2●5, 2●●	346	583
3499	—	70163	●3●2●4●2, 2	308	725
—	3453	70177	●3●2●3●4●	431	521
3500	—	70181	●3●2●3●2●●●	592	933
—	3454	70183	●3●2●3●2, 3	251	843
3501	—	70199	●3●2●3, 2●3	232	857
—	3455	70201	●3●2●3, 3, 2●	535	767
—	3456	70207	●3●2●3, 6	71	445
3502	—	70223	●3●2●2●2, 4	194	847
3503	—	70229	●3●2●2●●●●●●●	828	1339
—	3457	70237	●3●2●2●●3●●	563	1003
3504	—	70241	●3●2●2, 2, 4●	544	667
—	3458	70249	●3●2●2, 2●●2●	771	1069
3505	—	70271	●3●2●2, 7	52	383
3506	—	70289	●3●2●●●2●3●	704	893
—	3459	70297	●3●2●●●2, 2, 2●	789	1115
—	3460	70309	●3●2●●●●●2●●●●	855	1351
3507	—	70313	●3●2●●●●●●●●2●	940	1299
—	3461	70321	●3●2●●●●2, 3●	751	973
—	3462	70327	●3●2●●●●2●3	307	1143
—	3463	70351	●3●2●●2, 2, 4	203	897
3508	—	70373	●3●2●●3, 2●●●	656	1043
3509	—	70379	●3●2●●3●●●2	420	1109
—	3464	70381	●3●2●●3●2●●	571	991

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3465	70393	●3●2●●5, 2●	401	585
—	3466	70423	●3●2, 2, 3●●3	259	923
—	3467	70429	●3●2, 2, 3, 3●●	485	857
3510	—	70439	●3●2, 2, 2●2, 3	306	1031
3511	—	70451	●3●2, 2, 2, 2,2,2	466	1125
3512	—	70457	●3●2, 2, 2, 3, 2●	626	899
—	3468	70459	●3●2, 2, 2, 3●2	353	979
3513	—	70481	●3●2, 2●●●●3●	748	955
3514	—	70487	●3●2, 2●●●●●3	334	1209
—	3469	70489	●3●2, 2●●●2, 2●	795	1129
—	3470	70501	●3●2, 2●2, 2●●●	729	1157
—	3471	70507	●3●2, 2●2●●●2	475	1251
3515	—	70529	●3●2, 3, 6●	296	343
—	3472	70537	●3●2, 3, 3●2●	559	761
—	3473	70549	●3●2, 3, 2●●●●●●	681	1099
3516	—	70571	●3●2, 3●●●●●2	446	1169
—	3474	70573	●3●2, 3●●●2●●	615	1061
3517	—	70583	●3●2, 3●2●3	230	859
3518	—	70589	●3●2, 3●4●●	352	643
3519	—	70607	●3●2, 4, 2, 4	136	605
3520	—	70619	●3●2, 4●2●2	286	783
—	3475	70621	●3●2, 4●3●●	361	647
—	3476	70627	●3●2, 5, 3, 2	239	553
—	3477	70639	●3●2, 5●4	89	431
—	3478	70657	●3●●●●9●	135	149

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3479	70663	●3●●●7, 3	107	335	—	3491	70951	●3●●●●●2●2, 3	365	1229	—	3506	71233	●3●●2, 2●5●	445	523
3521	—	70667	●3●●●6●●2	200	507	—	3492	70957	●3●●●●●2●●2●●	827	1423	3544	—	71237	●3●●2, 2●3●●●	656	1023
—	3480	70687	●3●●●5, 5	79	409	—	3493	70969	●3●●●●●2, 3, 2●	753	1081	3545	—	71249	●3●●2, 2●●●3●	766	977
3522	—	70709	●3●●●4, 2●●●●	562	915	3534	—	70979	●3●●●●●●●4, 2	448	993	—	3507	71257	●3●●2, 2●●2, 2●	821	1165
—	3481	70717	●3●●●4, 4●●	339	613	—	3494	70981	●3●●●●●●●3●●●	799	1247	3546	—	71261	●3●●2, 2●●3●●	610	1087
—	3482	70729	●3●●●3●2●2●	673	919	3535	—	70991	●3●●●●●●●2, 4	254	1113	—	3508	71263	●3●●2, 2●●5	133	743
—	3483	70753	●3●●●3, 2, 4●	515	631	3536	—	70997	●3●●●●●●●●●●●●●	1076	1741	—	3509	71287	●3●●2, 2, 3●3	243	917
3523	—	70769	●3●●●3, 3, 3●	552	719	—	3495	70999	●3●●●●●●●●●●3	411	1487	—	3510	71293	●3●●2, 2, 5●●	353	651
—	3484	70783	●3●●●3, 7	51	371	—	3496	71011	●3●●●●●●2, 3, 2	531	1219	—	3511	71317	●3●●2●●2●●●●●	875	1411
3524	—	70793	●3●●●2●3●2●	672	913	—	3497	71023	●3●●●●●●2●4	217	1025	3547	—	71327	●3●●2●●2, 5	142	765
3525	—	70823	●3●●●2●●●2, 3	366	1237	3537	—	71039	●3●●●●●●7	60	457	—	3512	71329	●3●●2●●●●4●	655	797
3526	—	70841	●3●●●2●●3, 2●	718	1033	—	3498	71059	●3●●●●2, 2●2, 2	549	1301	3548	—	71333	●3●●2●●●●2●●●	884	1397
—	3485	70843	●3●●●2●●3●2	403	1121	3538	—	71069	●3●●●●2, 2, 3●●	632	1121	3549	—	71339	●3●●2●●●●●●●2	600	1571
—	3486	70849	●3●●●2, 2, 5●	477	565	3539	—	71081	●3●●●●2●●●●2●	964	1333	—	3513	71341	●3●●2●●●●●2●●	829	1429
3527	—	70853	●3●●●2, 2, 3●●●	690	1079	—	3499	71089	●3●●●●2●2, 3●	761	987	—	3514	71347	●3●●2●●●2, 2, 2	545	1319
—	3487	70867	●3●●●2, 2●●2, 2	551	1315	—	3500	71119	●3●●●●3, 2, 4	189	839	—	3515	71353	●3●●2●●●3, 2●	719	1035
3528	—	70877	●3●●●2, 2●3●●	588	1051	3540	—	71129	●3●●●●3●2, 2●	696	991	—	3516	71359	●3●●2●●●6	87	577
—	3488	70879	●3●●●2, 2●5	125	713	—	3501	71143	●3●●●●4, 2, 3	235	811	3550	—	71363	●3●●2●2, 4, 2	380	847
—	3489	70891	●3●●●2, 3●●●2	449	1185	3541	—	71147	●3●●●●4●●●2	364	963	3551	—	71387	●3●●2●2●2●2	444	1213
3529	—	70901	●3●●●2, 4●●●●	560	921	3542	—	71153	●3●●●●5, 3●	410	539	—	3517	71389	●3●●2●2●3●●	563	1007
3530	—	70913	●3●●●●●7●	282	319	—	3502	71161	●3●●●●6, 2●	327	479	3552	—	71399	●3●●2●3, 2, 3	270	929
3531	—	70919	●3●●●●●5, 3	208	661	—	3503	71167	●3●●●●9	23	221	3553	—	71411	●3●●2●4, 2, 2	334	819
—	3490	70921	●3●●●●●4●2●	587	795	3543	—	71171	●3●●2, 7, 2	170	363	—	3518	71413	●3●●2●4●●●●	517	851
3532	—	70937	●3●●●●●3, 2, 2●	744	1049	—	3504	71191	●3●●2, 4●●3	225	799	—	3519	71419	●3●●2●5●2	215	613
3533	—	70949	●3●●●●●2●2●●●	864	1363	—	3505	71209	●3●●2, 3●●●2●	739	1019	3554	—	71429	●3●●3, 5●●●	370	571

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
—	3520	71437	●3●●3, 4, 2●●	443	749	—	3534	71719	●3, 2, 5●2, 3	165	553	3579	—	71987	●3, 2, 2●2, 2, 2, 2	482	1163
—	3521	71443	●3●●3, 3●2, 2	379	895	3566	—	71741	●3, 2, 5, 4●●	254	459	3580	—	71993	●3, 2, 2●2, 3, 2●	650	933
3555	—	71453	●3●●3, 3, 3●●	452	799	—	3535	71761	●3, 2, 4●●●3●	503	641	3581	—	71999	●3, 2, 2●2, 6	84	535
3556	—	71471	●3●●3, 2●●4	178	817	3567	—	71777	●3, 2, 4, 2, 4●	396	485	—	3546	72019	●3, 2, 2●●●●●2, 2	579	1379
—	3522	71473	●3●●3, 2, 2, 3●	607	785	3568	—	71789	●3, 2, 4, 2●2●●	476	823	—	3547	72031	●3, 2, 2●●●●5	137	769
—	3523	71479	●3●●3, 2, 2●3	251	931	3569	—	71807	●3, 2, 4. 7	40	289	—	3548	72043	●3, 2, 2●●2●●●2	517	1361
3557	—	71483	●3●●3, 2, 3●2	324	899	—	3536	71809	●3, 2, 3●6●	271	311	3582	—	72047	●3, 2, 2●●2●4	190	897
—	3524	71503	●3●●3●●2, 4	187	821	—	3537	71821	●3, 2, 3●3. 2●●	493	835	3583	—	72053	●3. 2, 2●●3●●●●	676	1109
—	3525	71527	●3●●3●2, 2, 3	269	921	3570	—	71837	●3, 2, 3●3●●	484	857	—	3549	72073	●3, 2, 2, 2, 3●2●	649	883
3558	—	71537	●3●●3●3, 3●	506	661	3571	—	71843	●3, 2, 3●●●3. 2	404	919	3584	—	72077	●3, 2, 2, 2, 3, 2●●	596	1011
3559	—	71549	●3●●3●5●●	278	515	3572	—	71849	●3, 2, 3●●●●●●2●	768	1061	3585	—	72089	●3, 2, 2, 2, 2, 2, 2●	746	1055
—	3526	71551	●3●●3●7	41	319	3573	—	71861	●3, 2, 3●●2●●●●	688	1123	—	3550	72091	●3, 2, 2, 2, 2, 2●2	437	1183
—	3527	71563	●3●●4, 3●●2	305	783	3574	—	71867	●3, 2, 3●●3●2	324	901	3586	—	72101	●3, 2, 2, 2●●2●●●	790	1249
—	3528	71569	●3●●4, 2●3●	487	619	3575	—	71879	●3, 2, 3, 2, 3, 3	244	803	—	3551	72103	●3, 2, 2, 2●●2, 3	331	1121
—	3529	71593	●3●●4●●●●2●	605	837	—	3538	71881	●3, 2, 3, 2, 2●2●	661	905	—	3552	72109	●3, 2, 2, 2●●●2●●	737	1271
3560	—	71597	●3●●4●●●2●●	514	887	—	3539	71887	●3, 2, 3, 2, 2, 4	173	763	—	3553	72139	●3, 2, 2, 3, 2●●2	419	1085
3561	—	71633	●3●●5●●3●	386	495	—	3540	71899	●3, 2, 3, 2●2●2	377	1029	3587	—	72161	●3, 2, 2, 4, 4●	410	507
—	3530	71647	●3●●5●5	59	345	3576	—	71909	●3, 2, 3, 3, 2●●●	572	909	3588	—	72167	●3, 2, 2, 4, 2, 3	216	745
3562	—	71663	●3●●6●4	68	331	—	3541	71917	●3, 2, 3, 3●2●●	501	869	—	3554	72169	●3, 2, 2, 4●●2●	551	767
—	3531	71671	●3●●7●3	77	299	3577	—	71933	●3, 2, 3, 6●●	226	421	3589	—	72173	●3, 2, 2, 4●2●●	454	789
3563	—	71693	●3, 2, 7, 2●●	210	353	—	3542	71941	●3, 2, 2●5●●●	385	593	—	3555	72211	●3, 2●●4●2, 2	347	817
3564	—	71699	●3, 2, 6●2, 2	192	451	—	3543	71947	●3, 2, 2●4●●2	323	823	3590	—	72221	●3, 2●●4, 3●●	426	751
—	3532	71707	●3, 2, 6, 2●2	183	491	3578	—	71963	●3, 2, 2●3, 2●2	376	1013	—	3556	72223	●3, 2●●4, 5	101	527
3565	—	71711	●3, 2, 6, 5	58	299	—	3544	71971	●3, 2, 2●2●3, 2	429	973	3591	—	72227	●3, 2●●3●3, 2	382	865
—	3533	71713	●3, 2, 5●4●	281	339	—	3545	71983	●3, 2, 2●2●●4	199	911	—	3557	72229	●3, 2●●3●2●●●	663	1045

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
3592	—	72251	●3, 2●●3, 3●2	338	935	3604	—	72551	●3, 2●2●2, 2, 3	310	1061	—	3585	72859	●3, 3, 2●2, 2●2	391	1057
—	3558	72253	●3, 2●●3, 4●●	417	755	—	3571	72559	●3, 2●2●2●4	179	847	3615	—	72869	●3, 3, 2●●●2●●●	726	1147
3593	—	72269	●3, 2●●2●2, 2●●	724	1233	—	3572	72577	●3, 2●3, 6●	301	349	—	3586	72871	●3, 3, 2●●●2, 3	305	1031
—	3559	72271	●3, 2●●2●2, 4	215	939	—	3573	72613	●3, 2●3●●2●●●	667	1055	—	3587	72883	●3, 3, 2●●2, 2, 2	451	1091
—	3560	72277	●3, 2●●2●●●●●●●	917	1483	3605	—	72617	●3, 2●3●●●●2●	728	1007	—	3588	72889	●3, 3, 2●●3, 2●	597	859
3594	—	72287	●3, 2●●2●●5	136	759	3606	—	72623	●3, 2●3●●●4	170	789	3616	—	72893	●3, 3, 2●●4●●	408	743
—	3561	72307	●3, 2●●2, 3, 2, 2	443	1079	—	3574	72643	●3, 2●4, 4, 2	257	575	—	3589	72901	●3, 3, 2, 2, 3●●●	571	893
—	3562	72313	●3, 2●●2, 4, 2●	557	807	3607	—	72647	●3, 2●4, 3, 3	196	649	—	3590	72907	●3, 3, 2, 2, 2●●2	425	1099
—	3563	72337	●3, 2●●●●2●3●	767	973	—	3575	72649	●3, 2●4, 2●2●	527	723	3617	—	72911	●3, 3, 2, 2, 2, 4	176	777
3595	—	72341	●3, 2●●●●2●●●●●	916	1477	—	3576	72661	●3, 2●4●●●●●●●	553	897	3618	—	72923	●3, 3 2, 2●2●2	382	1043
3596	—	72353	●3, 2●●●●●●●4●	688	837	3608	—	72671	●3, 2●4●5	74	431	—	3591	72931	●3, 3, 2, 3, 3, 2	339	781
—	3564	72367	●3, 2●●●●●●●●4	241	1113	—	3577	72673	●3, 2●5, 4●	309	383	—	3592	72937	●3, 3, 2, 3●●2●	605	841
—	3565	72379	●3, 2●●●●●●3●2	425	1183	—	3578	72679	●3, 2●5, 2, 3	161	557	—	3593	72949	●3, 3, 2, 4●●●●	459	755
3597	—	72383	●3, 2●●●●●●6	92	609	3609	—	72689	●3, 2●6, 3●	274	361	3619	—	72953	●3, 3, 2, 5, 2●	356	519
—	3566	72421	●3, 2●●●3, 2●●●	705	1121	3610	—	72701	●3, 2●8●●	126	239	3620	—	72959	●3, 3, 2, 8	30	253
3598	—	72431	●3, 2●●●3●4	162	775	3611	—	72707	●3, 3, 8, 2	108	229	—	3594	72973	●3, 3●●4, 2●●	441	745
3599	—	72461	●3, 2●2, 4, 2●●	494	835	3612	—	72719	●3, 3, 6, 4	82	341	3621	—	72977	●3, 3●●3●3●	518	655
3600	—	72467	●3, 2●2, 3●2, 2	424	1001	—	3579	72727	●3, 3, 5●●3	151	535	—	3595	72997	●3, 3●●2●2●●●	689	1087
—	3567	72469	●3, 2●2, 3●●●●●	695	1119	—	3580	72733	●3, 3, 5, 3●●	289	509	—	3596	73009	●3, 3●●2, 2, 3●	629	813
—	3568	72481	●3, 2●2, 2●4●	555	673	—	3581	72739	●3, 3, 4●3, 2	263	595	3622	—	73013	●3, 3●●2, 2●●●●	706	1151
—	3569	72493	●3, 2●2, 2●●2●●	721	1241	—	3582	72763	●3, 3, 4, 3●2	237	655	3623	—	73019	●3, 3●●2, 3●2	338	937
3601	—	72497	●3, 2●2, 2, 2, 3●	686	887	3613	—	72767	●3, 3, 4, 6	56	349	3624	—	73037	●3, 3●●●●2, 2●●	680	1159
3602	—	72503	●3, 2●2, 2, 2●3	284	1053	3614	—	72797	●3, 3, 3●●3●●	452	805	—	3597	73039	●3, 3●●●●2, 4	201	881
3603	—	72533	●3, 2●2●●●●●●●●	904	1463	—	3583	72817	●3, 3, 3, 3, 3●	469	611	3625	—	73043	●3, 3●●●●●●2, 2	526	1253
—	3570	72547	●3, 2●2●2, 3, 2	441	1013	—	3584	72823	●3, 3, 3, 3●3	185	697	3626	—	73061	●3, 3●●●2, 2●●●	714	1133

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z'	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
—	3598	73063	●3, 3●●●2, 2, 3	295	1009	3638	—	73421	●3, 4●2, 2, 2●●	476	813	—	3621	73681	●3, 7●●3●	219	281
3627	—	73079	●3. 3●●●3●3	218	825	3639	—	73433	●3, 4●2●2, 2●	518	737	—	3622	73693	●3, 7●3●●	161	289
3628	—	73091	●3, 3●2, 5, 2	252	551	—	3612	73453	●3, 4●3●2●●	383	665	—	3623	73699	●3, 8, 3, 2	103	239
3629	—	73121	●3, 3●2●●4●	508	619	—	3613	73459	●3, 4●4, 2, 2	223	547	3654	—	73709	●3, 8●2●●	144	251
3630	—	73127	●3, 3●2●●2, 3	286	969	—	3614	73471	●3, 4●8	21	185	3655	—	73721	●3, 10, 2●	86	127
3631	—	73133	●3, 3●2●●●2●●	636	1097	—	3615	73477	●3, 5, 5●●●	239	369	3656	—	73727	●3, 13	4	53
—	3599	73141	●3, 3●2●2●●●●	653	1067	—	3616	73483	●3, 5, 4●●2	197	503	3657	—	73751	●2●8●●3	74	261
3632	—	73181	●3, 3●3●3●●	388	695	3640	—	73517	●3, 5, 2●●2●●	406	699	3658	—	73757	●2●8, 3●●	144	253
—	3600	73189	●3, 3●4, 2●●●	439	699	3641	—	73523	●3, 5, 2, 2, 2, 2	272	657	—	3624	73771	●2●7●●●●2	167	435
—	3601	73237	●3, 4, 4●●●●●	411	661	3642	—	73529	●3, 5, 2, 3, 2●	364	523	—	3625	73783	●2●7, 2●3	97	357
—	3602	73243	●3, 4, 4, 2●2	233	627	3643	—	73547	●3, 5●●2●●2	280	723	—	3626	73819	●2●6●●2●2	205	557
3633	—	73259	●3, 4, 3●●●●2	326	851	3644	—	73553	●3, 5●●●●3●	422	539	3659	—	73823	●2●6●●5	58	321
3634	—	73277	●3, 4, 3, 4●●	292	529	—	3617	73561	●3, 5●●●2, 2●	447	635	3660	—	73847	●2●6, 3●3	112	421
—	3603	73291	●3, 4, 2●2●●2	351	905	3645	—	73571	●3, 5●2, 3, 2	238	547	—	3627	73849	●2●6, 4, 2●	251	363
—	3604	73303	●3, 4, 2●●●●3	241	871	3646	—	73583	●3, 5●2●4	96	455	3661	—	73859	●2●5●5, 2	158	343
—	3605	73309	●3, 4, 2●●3●●	427	761	3647	—	73589	●3, 5●3●●●●	338	555	—	3628	73867	●2●5●3●●2	235	601
—	3606	73327	●3, 4, 2, 2●4	131	617	—	3618	73597	●3, 5●5●●	171	317	3662	—	73877	●2●5●2●●●●●	466	751
3635	—	73331	●3, 4, 2, 3, 2, 2	300	731	3648	—	73607	●3, 6, 4, 3	104	337	3663	—	73883	●2●5●2, 2●2	258	697
—	3607	73351	●3, 4●●4, 3	173	557	—	3619	73609	●3, 6, 3●2●	287	391	—	3629	73897	●2●5●●●●●2●	535	739
3636	—	73361	●3, 4●●2●3●	502	637	3649	—	73613	●3, 6, 3, 2●●	262	445	3664	—	73907	●2●5●●2, 2, 2	304	735
—	3608	73363	●3, 4●●2●2, 2	367	869	3650	—	73637	●3, 6●●2●●●	328	519	—	3630	73939	●2●5, 2●●2, 2	319	761
—	3609	73369	●3, 4●●2, 2, 2●	561	793	3651	—	73643	●3, 6●●●●●2	220	577	3665	—	73943	●2●5, 2●●●3	196	711
3637	—	73379	●3, 4●●●●3, 2	350	797	—	3620	73651	●3, 6●2, 2, 2	195	473	—	3631	73951	●2●5, 2●5	73	415
—	3610	23387	●3, 4●●●●●●●2	409	1071	3652	—	73673	●3, 7, 2●2●	244	335	3666	—	73961	●2●5, 3●●2●	434	603
—	3611	73417	●3, 4●2, 2●2●	535	733	3653	—	73679	●3, 7, 2, 4	62	277	3667	—	73973	●2●5, 4●●●●	334	549

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3632	73999	●2●4●4, 4	111	467	—	3646	74257	●2●3●4●3●	421	531	—	3660	74527	●2●3, 2, 3, 5	117	619
—	3633	74917	●2●4●2●4●	417	505	3679	—	74279	●2●3●3●2, 3	254	853	3690	—	74531	●2●3, 2, 2●3, 2	434	985
3668	—	74021	●2●4●2●2●●●	570	899	—	3647	74287	●2●3●3●●4	163	743	—	3661	74551	●2●3, 2, 2, 2●3	283	1049
3669	—	74027	●2●4●2●●●●2	394	1029	—	3648	74293	●2●3●3, 2●●●●	633	1031	3691	—	74561	●2●3, 2●●5●	464	547
—	3634	74047	●2●4●2, 6	65	413	3680	—	74297	●2●3●3, 3, 2●	542	777	3692	—	74567	●2●3, 2●●3, 3	298	977
3670	—	74051	●2●4●●●4, 2	302	669	—	3649	74311	●2●3●2●3, 3	269	879	3693	—	74573	●2●3, 2●●2, 2●●	728	1241
—	3635	74071	●2●4●●●●●●3	279	1009	—	3650	74317	●2●3●2●2, 2●●	663	1129	—	3662	74587	●2●3, 2●●●2●2	479	1305
—	3636	74077	●2●4●●●●3●●	493	879	—	3651	74323	●2●3●2●●●2, 2	519	1235	3694	—	74597	●2●3, 2●2, 2●●●	758	1203
3671	—	74093	●2●4●●2●2●●	554	959	—	3652	74353	●2●3●2, 3, 3●	587	765	3695	—	74609	●2●3, 2●3, 3●	592	773
3672	—	74099	●2●4●●3, 2, 2	340	829	3681	—	74357	●2●3●2, 3●●●●	640	1049	—	3663	74611	●2●3, 2●3, 2, 2	411	1003
—	3637	74101	●2●4●●3●●●●	531	871	3682	—	74363	●2●3●2, 4●2	284	799	—	3664	74623	●2●3, 2●7	49	377
—	3638	74131	●2●4, 2, 2●2, 2	393	931	—	3653	74377	●2●3●●●3●2●	685	931	—	3665	74653	●2●3, 3, 2, 3●●	501	889
—	3639	74143	●2●4, 2, 2, 5	103	557	3683	—	74381	●2●3●●●3, 2●●	632	1071	3696	—	74687	●2●3, 3●6	64	433
—	3640	74149	●2●4, 2●●2●●●	637	1007	—	3654	74383	●2●3●●●3, 4	193	825	3697	—	74699	●2●3, 4, 2●●2	350	907
3673	—	74159	●2●4, 2●●●4	164	759	3684	—	74411	●2●3●●●●●●●●2	594	1555	—	3666	74707	●2●3, 4●●2, 2	365	873
—	3641	74161	●2●4, 2●2, 3●	553	717	—	3655	74413	●2●3●●●●●●●2●●	821	1415	—	3667	74713	●2●3, 4●2, 2●	523	745
—	3642	74167	●2●4, 2●2●3	225	839	—	3656	74419	●2●3●●●●2, 2, 2	541	1309	3698	—	74717	●2●3, 4●3●●	380	681
3674	—	74177	●2●4, 3, 5●	324	385	3685	—	74441	●2●3●●2, 2●2●	798	1093	—	3668	74719	●2●3, 4●5	79	459
3675	—	74189	●2●4, 3, 2, 2●●	484	827	—	3657	74449	●2●3●●2●●3●	745	953	3699	—	74729	●2●3, 5●●2●	440	613
—	3643	74197	●2●4, 3●●●●●●	583	945	3686	—	74453	●2●3●●2●●●●●●	866	1403	—	3669	74731	●2●3, 5●●●2	267	707
3676	—	74201	●2●4, 3●2, 2●	522	743	3687	—	74471	●2●3●●3, 2, 3	276	949	3700	—	74747	●2●3, 7●2	124	357
—	3644	74203	●2●4, 3●2●2	301	823	3688	—	74489	●2●3●●5, 2●	412	601	3701	—	74759	●2●2●7, 3	116	363
—	3645	74209	●2●4, 4, 4●	339	419	3689	—	74507	●2●3, 2, 4●●2	336	857	—	3670	74761	●2●2●6●2●	333	449
3677	—	74219	●2●4, 4●●●2	278	735	—	3658	74509	●2●3, 2, 4, 2●●	487	823	3702	—	74771	●2●2●5●2, 2	288	677
3678	—	74231	●2●4, 5●3	118	453	—	3659	74521	●2●3, 2, 3, 2, 2●	653	921	—	3671	74779	●2●2●5, 2●2	273	733

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3672	74797	●2●2●4●●2●●	557	957	3715	—	75083	●2●2●●●●●●2●●2	674	1739	—	3698	75367	●2●2, 2, 2, 2, 2, 3	367	1253
—	3673	74821	●2●2●3●3●●●	609	949	—	3685	75109	●2●2●●●●2, 2●●●	1009	1601	3727	—	75377	●2●2, 2, 2, 3, 3●	708	923
—	3674	74827	●2●2●3●2●●2	467	1203	—	3686	75133	●2●2●●●●●5●●	443	819	3728	—	75389	●2●2, 2, 2, 5●●	404	745
3703	—	74831	●2●2●3●2, 4	198	863	3716	—	75149	●2●2●●2, 3, 2●●	7[illegible]8	1269	—	3699	75391	●2●2, 2, 2, 7	63	467
3704	—	74843	●2●2●3●●2●2	452	1229	3717	—	75161	●2●2●●2, 2, 2, 2●	934	1321	3729	—	75401	●2●2, 2●●3●2●	804	1093
—	3675	74857	●2●2●3, 2●●2●	803	1113	3718	—	75167	●2●2●●2, 2, 5	160	867	—	3700	75403	●2●2, 2●●3●●2	515	1319
3705	—	74861	●2●2●3, 2●2●●	676	1169	—	3687	75169	●2●2●●2●●4●	733	893	3730	—	75407	●2●2, 2●●3, 4	226	967
—	3676	74869	●2●2●3, 3●●●●	661	1083	—	3688	75181	●2●2●●2●●●2●●	919	1585	3731	—	75431	●2●2, 2●●●●2, 3	426	1441
3706	—	74873	●2●2●3, 4, 2●	534	773	—	3689	75193	●2●2●●2●3, 2●	785	1131	3732	—	75437	●2●2, 2●●●●●●2●●	952	1641
—	3677	74887	●2●2●2●4, 3	265	851	3719	—	75209	●2●2●●3, 2●2●	822	1127	3733	—	75479	●2●2, 2●2●●●3	374	1359
3707	—	74891	●2●2●2●3●●2	474	1213	—	3690	75211	●2●2●●3, 2●●2	517	1339	3734	—	75503	●2●2, 2●3●4	174	833
3708	—	74897	●2●2●2●2●3●	780	989	—	3691	75217	●2●2●●3●●3●	755	967	—	3701	75511	●2●2, 2●4●3	211	807
3709	—	74903	●2●2●2●2●●3	362	1295	—	3692	75223	●2●2●●3●●●3	331	1205	3735	—	75521	●2●2, 3, 7●	270	307
—	3678	74923	●2●2●2●●●●●●●2	653	1709	3720	—	75227	●2●2●●3●2●2	450	1231	3736	—	75527	●2●2, 3, 5, 3	196	625
—	3679	74929	●2●2●2●●2, 3●	847	1097	3721	—	75239	●2●2●●4, 2, 3	264	911	3737	—	75533	●2●2, 3, 4, 2●●	514	869
3710	—	74933	●2●2●2●●2●●●●	944	1541	—	3693	75253	●2●2●●5●●●●	487	803	3738	—	75539	●2●2, 3, 3●2, 2	440	1039
—	3680	74941	●2●2●2●●4●●	541	985	3722	—	75269	●2●2, 2, 6●●●	360	553	—	3702	75541	●2●2, 3, 3●●●●●	721	1161
—	3681	74959	●2●2●2, 2, 2, 4	235	1037	—	3694	75277	●2●2, 2, 5, 2●●	449	757	—	3703	75553	●2●2, 3, 2●4●	573	695
3711	—	75011	●2●2●●●6, 2	272	585	—	3695	75289	●2●2, 2, 4, 2, 2●	627	883	3739	—	75557	●2●2, 3, 2●2●●●	780	1231
—	3682	75013	●2●2●●●5●●●	503	775	—	3696	75307	●2●2, 2, 3●●●●2	523	1365	—	3704	75571	●2●2, 3, 2, 2, 2, 2	499	1205
3712	—	75017	●2●2●●●4●2●	652	883	3723	—	75323	●2●2, 2, 3, 3●2	382	1057	—	3705	75577	●2●2, 3, 2, 3, 2●	669	961
3713	—	75029	●2●2●●●3●●●●●	868	1397	3724	—	75329	●2●2, 2, 2●5●	508	597	—	3706	75583	●2●2, 3, 2, 6	85	547
—	3683	75037	●2●2●●●3, 3●●	637	1125	—	3697	75337	●2●2, 2, 2●2●2●	901	1231	3740	—	75611	●2●2, 3●●●2●2	484	1319
3714	—	75041	●2●2●●●2●4●	704	853	3725	—	75347	●2●2, 2, 2●●●2, 2	634	1509	3741	—	75617	●2●2, 3●2, 4●	580	713
—	3684	75079	●2●2●●●●●3, 3	391	1281	3726	—	75353	●2●2, 2, 2●●2, 2●	938	1331	—	3707	75619	●2●2, 3●2, 3, 2	447	1027

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
3742	—	75629	•2•2, 3•2•2••	676	1171	—	3718	75931	•2•••3•2, 2•2	477	1289	—	3733	76213	•2•••2, 2•2••••	991	1619
3743	—	75641	•2•2, 3•4, 2•	506	735	—	3719	75937	•2•••3••••4•	659	801	—	3734	76231	•2•••2, 3, 3, 3	323	1067
3744	—	75653	•2•2, 4, 4•••	454	705	3757	—	75941	•2•••3•••2•••	892	1409	—	3735	76243	•2•••2, 3••2, 2	577	1379
3745	—	75659	•2•2, 4, 3••2	358	919	—	3720	75967	•2•••3••6	91	597	—	3736	76249	•2•••2, 3•2, 2•	831	1183
—	3708	75679	•2•2, 4, 2, 5	107	583	—	3721	75979	•2•••3, 2, 2••2	535	1383	3767	—	76253	•2•••2, 3•3••	606	1085
3746	—	75683	•2•2, 4••3, 2	380	867	3758	—	75983	•2•••3, 2, 2, 4	222	979	3768	—	76259	•2•••2, 4, 3, 2	410	947
3747	—	75689	•2•2, 4•••••2•	712	985	3759	—	75989	•2•••3, 2••••••	928	1503	—	3737	76261	•2•••2, 4, 2•••	693	1103
—	3709	75703	•2•2, 4•2•3	225	841	—	3722	75991	•2•••3, 2•••3	353	1281	3769	—	76283	•2•••2, 6•2	214	613
3748	—	75707	•2•2, 4•3•2	284	793	—	3723	75997	•2•••3, 2•3••	615	1099	3770	—	76289	•2•••••8•	250	279
—	3710	75709	•2•2, 4•4••	343	627	3760	—	76001	•2•••3, 3, 4•	564	695	—	3738	76303	•2•••••5, 4	163	681
—	3711	75721	•2•2, 5, 2•2•	505	693	—	3724	76003	•2•••3, 3, 3, 2	433	997	—	3739	76333	•2•••••3••2••	851	1463
3749	—	75731	•2•2, 5••2, 2	328	785	3761	—	76031	•2•••3, 8	40	331	3771	—	76343	•2•••••3, 2•3	344	1271
3750	—	75743	•2•2, 5•5	70	409	—	3725	76039	•2•••2•5, 3	229	727	3772	—	76367	•2••••••2•2, 4	286	1249
3751	—	75767	•2•2, 7•3	92	357	3762	—	76079	•2•••2•2••4	258	1181	—	3740	76369	•2••••••2•••3•	1039	1325
3752	—	75773	•2•2, 9••	114	217	—	3726	76081	•2•••2•2, 2, 3•	883	1141	3773	—	76379	•2••••••2••2•2	648	1763
—	3712	75781	•2•••8•••	201	307	3763	—	76091	•2•••2•2, 3•2	476	1319	—	3741	76387	•2••••••2, 2, 3, 2	619	1419
—	3713	75787	•2•••7••2	179	453	—	3727	76099	•2•••2•••4, 2	505	1119	3774	—	76403	•2••••••2, 3, 2, 2	590	1437
—	3714	75793	•2•••6•3•	325	409	3764	—	76103	•2•••2•••3, 3	396	1297	3775	—	76421	•2••••••••4•••	778	1205
3753	—	75797	•2•••6••••••	398	639	—	3728	76123	•2•••2•••••2•2	643	1751	—	3742	76423	•2•••••••4, 3	351	1129
3754	—	75821	•2•••5••2••	478	821	—	3729	76129	•2•••2••2, 4•	781	959	—	3743	76441	•2•••••••2,2,2•	1147	1621
3755	—	75833	•2•••5, 3, 2•	456	653	—	3730	76147	•2•••2••3, 2, 2	563	1373	3776	—	76463	•2••••••••••4	322	1487
—	3715	75853	•2•••4•2, 2••	587	999	3765	—	76157	•2•••2••5••	454	839	—	3744	76471	•2•••••••••2•3	445	1657
3756	—	75869	•2•••4••3••	514	915	—	3731	76159	•2•••2••7	69	523	3777	—	76481	•2••••••2, 5•	662	785
—	3716	75883	•2•••4, 2•••2	441	1159	3766	—	76163	•2•••2, 2, 5, 2	374	817	3778	—	76487	•2••••••2, 3, 3	416	1371
—	3717	75913	•2•••3•3•2•	681	925	—	3732	76207	•2•••2, 2•••4	265	1227	3779	—	76493	•2••••••2,2,2••	1002	1711

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3745	76507	●2●●●●●●2●2●2	633	1729	—	3758	76801	●2●●2, 9●	169	187	3806	—	77093	●2●●2●●2●2●●●	992	1565
3780	—	76511	●2●●●●●●2●5	170	973	—	3759	76819	●2●●2, 5●2, 2	327	769	—	3769	77101	●2●●2●●2●●2●●	949	1633
—	3746	76519	●2●●●●●●3, 2, 3	387	1331	3792	—	76829	●2●●2, 5, 3●●	406	715	—	3770	77137	●2●●2●●●●●●●3●	1049	1339
—	3747	76537	●2●●●●●●5, 2●	575	839	—	3760	76831	●2●●2, 5, 5	97	503	3807	—	77141	●2●●2●●●●●●●●●●●	1228	1987
3781	—	76541	●2●●●●●●6●●	358	669	—	3761	76837	●2●●2, 4●2●●●	643	1013	3808	—	77153	●2●●2●●●2, 4●	784	963
—	3748	76543	●2●●●●●●8	47	405	3793	—	76847	●2●●2, 4●●4	176	801	—	3771	77167	●2●●2●●●2●4	247	1167
—	3749	76561	●2●●●●2, 3●3●	777	983	3794	—	76871	●2●●2, 3●3, 3	298	973	3809	—	77171	●2●●2●●●3, 2, 2	562	1371
—	3750	76579	●2●●●●2, 2●3, 2	589	1337	—	3762	76873	●2●●2, 3●2●2●	815	1113	—	3772	77191	●2●●2●2, 4, 3	297	959
—	3751	76597	●2●●●●2,2,2●●●●	1037	1691	3795	—	76883	●2●●2, 3●●●2, 2	578	1375	3810	—	77201	●2●●2●2, 2●3●	848	1077
—	3752	76603	●2●●●●2, 2, 3●2	495	1373	3796	—	76907	●2●●2, 3, 2●●●2	542	1425	3811	—	77213	●2●●2●2, 2, 3●●	712	1263
3782	—	76607	●2●●●●2, 2, 6	112	719	3797	—	76913	●2●●2, 3, 3, 3●	664	865	3812	—	77237	●2●●2●2●2●●●●	948	1549
3783	—	76631	●2●●●●2●●●●●3	466	1687	3798	—	76919	●2●●2, 3, 3●3	262	987	—	3773	77239	●2●●2●2●2●3	347	1295
3784	—	76649	●2●●●●2●2●●2●	1080	1499	3799	—	76943	●2●●2, 2●3, 4	226	965	3813	—	77243	●2●●2●2●3●2	440	1227
—	3753	76651	●2●●●●2●2●●●2	661	1741	3800	—	76949	●2●●2, 2●2●●●●●	1008	1625	3814	—	77249	●2●●2●3, 5●	490	583
3785	—	76667	●2●●●●2●4●2	372	1051	3801	—	76961	●2●●2, 2●●●4●	764	929	3815	—	77261	●2●●2●3, 2, 2●●	726	1241
3786	—	76673	●2●●●●3, 6●	408	473	—	3763	76963	●2●●2, 2●●●3, 2	599	1363	—	3774	77263	●2●●2●3, 2, 4	211	937
3787	—	76679	●2●●●●3, 4, 3	278	899	3802	—	76991	●2●●2, 2●●6	104	685	3816	—	77267	●2●●2●3●●2, 2	540	1291
3788	—	76697	●2●●●●3, 2, 2, 2●	870	1231	3803	—	77003	●2●●2, 2, 2, 2●●2	606	1567	—	3775	77269	●2●●2●3●●●●●●	869	1409
—	3754	76717	●2●●●●3●●●2●●	841	1451	—	3764	77017	●2●●2, 2, 2●2, 2●	943	1341	3817	—	77279	●2●●2●3●5	118	683
3789	—	76733	●2●●●●3●4●●	480	877	—	3765	77023	●2●●2, 2, 2●5	147	839	3818	—	77291	●2●●2●4●●●2	404	1069
—	3755	76753	●2●●●●4●●3●	653	837	—	3766	77029	●2●●2, 2, 3, 2●●●	821	1305	—	3776	77317	●2●●3, 6●●●	339	521
3790	—	76757	●2●●●●4●●●●●●	754	1223	—	3767	77041	●2●●2, 2, 4, 3●	613	803	—	3777	77323	●2●●3, 5●●2	289	735
—	3756	76771	●2●●●●5, 3, 2	321	743	—	3768	77047	●2●●2, 2, 4●3	233	889	3819	—	77339	●2●●3, 4, 2●2	346	931
—	3757	76777	●2●●●●5●●2●	559	779	3804	—	77069	●2●●2●●4, 2●●	634	1071	—	3778	77347	●2●●3, 3●3, 2	403	913
3791	—	76781	●2●●●●5●2●●	458	797	3805	—	77081	●2●●2●●3, 2, 2●	856	1207	3820	—	77351	●2●●3, 3●2, 3	296	995

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3779	77359	●2●●3, 3●●4	189	863	3831	—	77591	●2●●4, 3●●3	238	849	3842	—	77849	●2, 2, 7, 2, 2●	274	385
3821	—	77369	●2●●3, 3, 3, 2●	624	895	—	3794	77611	●2●●4, 2●●●●2	451	1179	—	3808	77863	●2, 2, 6●2, 3	149	499
—	3780	77377	●2●●3, 2●5●	467	549	—	3795	77617	●2●●4, 2, 2, 3●	593	767	3843	—	77867	●2, 2, 6●●●●2	246	641
—	3781	77383	●2●●3, 2●3, 3	303	991	3832	—	77621	●2●●4, 2, 2●●●●	664	1083	—	3809	77893	●2, 2, 5●3●●●	391	609
3822	—	77417	●2●●3, 2, 2●●2●	866	1201	—	3796	77641	●2●●4●●2●2●	685	937	—	3810	77899	●2, 2, 5●2●●2	301	775
—	3782	77419	●2●●3, 2, 2●●●2	531	1397	—	3797	77647	●2●●4●●2, 4	181	795	—	3811	77929	●2, 2, 5, 2●●2●	529	733
—	3783	77431	●2●●3, 2, 3●3	253	955	—	3798	77659	●2●●4●●●2●2	401	1093	3844	—	77933	●2, 2, 5, 2●2●●	446	771
3823	—	77447	●2●●3●●4, 3	260	837	3833	—	77681	●2●●4●3, 3●	486	635	3845	—	77951	●2, 2, 5, 7	38	273
3824	—	77471	●2●●3●●2, 5	146	787	3834	—	77687	●2●●4●3●3	188	713	3846	—	77969	●2, 2, 4●2●3●	542	687
3825	—	77477	●2●●3●●●●2●●●	908	1435	—	3799	77689	●2●●4●4, 2●	415	603	—	3812	77977	●2, 2, 4●2, 2, 2●	611	863
—	3784	77479	●2●●3●●●●2, 3	381	1289	3835	—	77699	●2●●5, 5, 2	202	443	—	3813	77983	●2, 2, 4●2, 5	107	573
3826	—	77489	●2●●3●●●2, 3●	794	1029	3836	—	77711	●2●●5, 3, 4	124	535	3847	—	77999	●2, 2, 4●●●●4	176	811
—	3785	77491	●2●●3●●●2, 2, 2	559	1353	—	3800	77713	●2●●5, 2●3●	457	581	—	3814	78007	●2, 2, 4●●2●3	245	911
—	3786	77509	●2●●3●2, 3●●●	687	1075	—	3801	77719	●2●●5, 2●●3	209	751	3848	—	78017	●2, 2, 4, 2, 5●	376	445
3827	—	77513	●2●●3●2, 2●2●	808	1107	3837	—	77723	●2●●5, 2, 2●2	294	797	—	3815	78031	●2, 2, 4, 2, 2, 4	169	745
—	3787	77521	●2●●3●2●●3●	751	961	—	3802	77731	●2●●5●●3, 2	301	687	3849	—	78041	●2, 2, 4, 2●2, 2●	638	907
—	3788	77527	●2●●3●2●●●3	331	1203	—	3803	77743	●2●●5●●●4	131	609	—	3816	78049	●2, 2, 4, 3, 4●	431	531
3828	—	77543	●2●●3●3, 2, 3	274	943	3838	—	77747	●2●●5●2, 2, 2	308	747	3850	—	78059	●2, 2, 4, 3●●●2	362	955
3829	—	77549	●2●●3●3●2●●	580	1007	—	3804	77761	●2●●6, 5●	237	283	—	3817	78079	●2, 2, 4, 8	31	255
—	3789	77551	●2●●3●3●4	153	733	—	3805	77773	●2●●6, 2, 2●●	343	587	3851	—	78101	●2, 2, 3●3●●●●●●	678	1091
—	3790	77557	●2●●3●4●●●●	523	861	3839	—	77783	●2●●6●●●3	152	555	—	3818	78121	●2, 2, 3●2●●●●2●	843	1163
—	3791	77563	●2●●3●5●2	217	619	—	3806	77797	●2●●7, 2●●●	279	445	3852	—	78137	●2, 2, 3●2, 3, 2●	664	953
—	3792	77569	●2●●4, 7●	231	263	3840	—	77801	●2●●7●●2●	286	399	—	3819	78139	●2, 2, 3●2, 3●2	375	1039
3830	—	77573	●2●●4, 5●●●	366	565	3841	—	77813	●2●●8●●●●	194	321	—	3820	78157	●2, 2, 3●●●2, 2●●	767	1307
—	3793	77587	●2●●4, 3●2, 2	373	881	—	3807	77839	●2, 2, 8, 4	59	243	—	3821	78163	●2, 2, 3●●●●●2, 2	595	1417

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
3853	—	78167	●2, 2, 3●●●●●●●3	368	1331	—	3833	78487	●2, 2, 2●●●2●●3	407	1457	—	3847	78781	●2, 2, 2, 3●4●●	433	791
3854	—	78173	●2, 2, 3●●●●●3●●	650	1159	3867	—	78497	●2, 2, 2●●●●●4●	790	961	—	3848	78787	●2, 2, 2, 4, 4, 2	317	709
3855	—	78179	●2, 2, 3●●2, 3, 2	478	1097	3868	—	78509	●2, 2, 2●●●●●●●2●●	1002	1727	3878	—	78791	●2, 2, 2, 4, 3, 3	242	801
3856	—	78191	●2, 2, 3●●2●4	196	925	—	3834	78511	●2, 2, 2●●●●●●4	277	1279	3879	—	78797	●2, 2, 2, 4 2, 2●●	576	985
—	3822	78193	●2, 2, 3●●3, 3●	643	839	—	3835	78517	●2, 2, 2●●●●2●●●●	1043	1703	3880	—	78803	●2, 2, 2, 4●●2, 2	426	1019
3857	—	78203	●2, 2, 3●●4●2	306	863	3869	—	78539	●2, 2, 2●●2, 2●●2	612	1583	3881	—	78809	●2, 2, 2, 4●2, 2●	610	869
—	3823	78229	●2, 2, 3, 2, 2●●●●●●	835	1347	—	3836	78541	●2, 2, 2●●2, 2, 2●●	865	1477	—	3849	78823	●2, 2, 2. 5, 2, 3	201	695
3858	—	78233	●2, 2, 3, 2, 2, 2, 2●	780	1103	—	3837	78553	●2, 2, 2●●2●2, 2●	947	1347	3882	—	78839	●2, 2, 2, 6●3	126	487
—	3824	78241	●2, 2, 3, 2●●4●	615	749	3870	—	78569	●2, 2, 2●●3●●2●	858	1193	—	3850	78853	●2, 2●●7●●●	275	421
—	3825	78259	●2, 2, 3, 2●2, 2, 2	505	1223	—	3838	78571	●2, 2, 2●●3●●●2	523	1381	3883	—	78857	●2, 2●●6●2●	370	499
—	3826	78277	●2, 2, 3, 3, 3●●●	601	941	—	3839	78577	●2, 2, 2●●4, 3●	605	793	—	3851	78877	●2, 2●●5, 3●●	397	699
—	3827	78283	●2, 2, 3, 3, 2●●2	443	1147	—	3840	78583	●2, 2, 2●●4●3	229	875	3884	—	78887	●2, 2●●4●2, 3	268	899
—	3828	78301	●2, 2, 3, 3●3●●	491	879	3871	—	78593	●2, 2, 2, 2, 7●	304	345	—	3852	78889	●2, 2●●4●●●2●	709	977
—	3829	78307	●2, 2, 3, 4, 3, 2	333	769	—	3841	78607	●2, 2, 2, 2, 4, 4	181	765	3885	—	78893	●2, 2●●4●●2●●	614	1055
3859	—	78311	●2, 2, 3, 4, 2, 3	230	793	3872	—	78623	●2, 2, 2, 2, 3, 5	140	741	—	3853	78901	●2, 2●●4, 2●●●●	675	1099
3860	—	78317	●2, 2, 3, 4●2●●	484	841	—	3842	78643	●2, 2, 2, 2, 2, 2, 2. 2	577	1393	—	3854	78919	●2, 2●●3●3, 3	295	963
3861	—	78341	●2, 2, 2●6●●●	346	531	—	3843	78649	●2, 2, 2, 2, 2, 3, 2●	775	1113	3886	—	78929	●2, 2●●3●●●3●	790	1007
3862	—	78347	●2, 2. 2●5●●2	298	757	3873	—	78653	●2, 2, 2, 2, 2, 4●●	536	973	3887	—	78941	●2, 2●●3●●3●●	634	1129
—	3830	78367	●2, 2, 2●4, 5	113	589	—	3844	78691	●2, 2, 2, 2●2, 3, 2	529	1215	3888	—	78977	●2, 2●●2●6●	410	471
3863	—	78401	●2, 2, 2●2●5●	510	599	—	3845	78697	●2, 2, 2, 2●2●●2●	959	1331	—	3855	78979	●2, 2●●2●5, 2	349	759
—	3831	78427	●2, 2, 2●2●●2●2	551	1499	3874	—	78707	●2, 2, 2, 2●3, 2, 2	488	1191	3889	—	78989	●2, 2●●2●3. 2●●	742	1257
3864	—	78437	●2, 2, 2●2, 2, 2●●●	900	1427	3875	—	78713	●2, 2, 2, 2●4, 2●	604	877	3890	—	79031	●2, 2●●2●●2●3	376	1399
—	3832	78439	●2, 2, 2●2, 2, 2, 3	373	1273	—	3846	78721	●2, 2, 2, 3, 6●	365	423	—	3856	79039	●2, 2●●2●●6	105	691
3865	—	78467	●2. 2, 2●●●5, 2	366	797	3876	—	78737	●2, 2, 2, 3, 2●3●	706	897	3891	—	79043	●2, 2●●2, 2, 4, 2	464	1033
3866	—	78479	●2, 2, 2●●●3, 4	236	1009	3877	—	78779	●2, 2, 2, 3●3●2	358	999	—	3857	79063	●2, 2●●2, 2●●●3	403	1463

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3858	79087	●2, 2●●2, 3●4	193	921	3906	—	79349	●2, 2●●●5●●●●	510	841	—	3881	79627	●2, 2●3, 4●●2	353	901
3892	—	79103	●2, 2●●2, 8	44	369	—	3869	79357	●2, 2●●●7●●	233	439	3919	—	79631	●2, 2●3, 4, 4	158	669
—	3859	79111	●2, 2●●●●5, 3	247	785	3907	—	79367	●2, 2●2, 6, 3	172	543	—	3882	79633	●2, 2●3, 3●3●	595	753
3893	—	79133	●2, 2●●●●3, 3●●	680	1201	3908	—	79379	●2, 2●2, 4●2, 2	408	961	—	3883	79657	●2, 2●3, 2●●●2●	857	1183
3894	—	79139	●2, 2●●●●2●3, 2	592	1343	—	3870	79393	●2, 2●2, 3●4●	563	681	—	3884	79669	●2, 2●3, 2, 2●●●●	783	1277
—	3860	79147	●2, 2●●●●2●●●●2	707	1847	3909	—	79397	●2, 2●2, 3●2●●●	772	1217	—	3885	79687	●2, 2●3●●3, 3	299	981
3895	—	79151	●2, 2●●●●2●●4	274	1255	—	3871	79399	●2, 2●2, 3●2, 3	327	1099	3920	—	79691	●2, 2●3●●2●●2	514	1327
—	3861	79153	●2, 2●●●●2, 2, 3●	937	1211	—	3872	79411	●2, 2●2, 3, 2, 2, 2	509	1227	—	3886	79693	●2, 2●3●●2, 2●●	729	1243
—	3862	79159	●2, 2●●●●2, 2●3	389	1441	—	3873	79423	●2, 2●2, 3, 6	91	573	3921	—	79697	●2, 2●3●●●●●3●	776	991
3896	—	79181	●2, 2●●●●●●2, 2●●	1018	1735	3910	—	79427	●2, 2●2, 2●4, 2	428	947	—	3887	79699	●2, 2●3●●●●2, 2	561	1337
3897	—	79187	●2, 2●●●●●●●●2, 2	788	1877	3911	—	79433	●2, 2●2, 2●2●2●	920	1257	3922	—	79757	●2, 2●4, 3, 2●●	500	849
3898	—	79193	●2, 2●●●●●●●2, 2●	1160	1647	3912	—	79451	●2, 2●2, 2●●2●2	556	1513	3923	—	79769	●2, 2●4, 2, 2, 2●	614	869
—	3863	79201	●2, 2●●●●●2, 4●	815	1001	3913	—	79481	●2, 2●2, 2, 4, 2●	630	913	—	3888	79777	●2, 2●4●●4●	473	577
3899	—	79229	●2, 2●●●●●5●●	470	869	3914	—	79493	●2, 2●2●●4●●●	650	1007	—	3889	79801	●2, 2●4●3, 2●	493	711
—	3864	79231	●2, 2●●●●●7	71	541	—	3874	79531	●2, 2●2●●●●●●●●2	697	1825	3924	—	79811	●2, 2●5, 4, 2	238	533
3900	—	79241	●2, 2●●●2, 3●2●	862	1173	—	3875	79537	●2, 2●2●●●2, 3●	899	1165	—	3890	79813	●2, 2●5, 3●●●	419	657
3901	—	79259	●2, 2●●●2, 2, 2●2	578	1565	—	3876	79549	●2, 2●2●●●4●●	569	1037	3925	—	79817	●2, 2●5, 2●2●	486	667
—	3865	79273	●2, 2●●●2●●●●2●	1139	1575	3915	—	79559	●2, 2●2●2, 3, 3	340	1121	3926	—	79823	●2, 2●5, 2, 4	124	553
—	3866	79279	●2, 2●●●2●●●4	267	1237	—	3877	79561	●2, 2●2●2, 2●2●	919	1259	3927	—	79829	●2, 2●5●●●●●●●	506	821
3902	—	79283	●2, 2●●●2●2, 2, 2	632	1531	—	3878	79579	●2, 2●2●2●2●2	515	1407	3928	—	79841	●2, 2●6, 4●	278	345
3903	—	79301	●2, 2●●●3, 3●●●	740	1159	3916	—	79589	●2, 2●2●3, 2●●●	764	1215	—	3891	79843	●2, 2●6, 3, 2	211	489
—	3867	79309	●2, 2●●●3, 2, 2●●	767	1311	3917	—	79601	●2, 2●2●4, 3●	562	737	3929	—	79847	●2, 2●6, 2, 3	144	499
3904	—	79319	●2, 2●●●3●●●3	348	1267	—	3879	79609	●2, 2●2●5, 2●	461	673	—	3892	79861	●2, 2●7●●●●	251	415
—	3868	79333	●2, 2●●●4, 2●●●	679	1081	3918	—	79613	●2, 2●2●6●●	286	535	—	3893	79867	●2, 2●8●2	97	281
3905	—	79337	●2, 2●●●4●●2●	706	983	—	3880	79621	●2, 2●3, 5●●●	427	659	—	3894	79873	●2, 3, 10●	103	113

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
3930	—	79889	•2, 3, 6•3•	282	355	3945	—	80177	•2, 3, 2•2, 2, 3 •	722	933	3956	—	80471	•2, 3••2••••3	364	1315
3931	—	79901	•2, 3, 6, 3••	262	461	—	3905	80191	•2, 3. 2•2, 6	89	567	—	3919	80473	•2, 3••2••2, 2•	869	1233
—	3895	79903	•2, 3, 6, 5	63	325	3946	—	80207	•2, 3, 2•••2, 4	234	1025	3957	—	80489	•2, 3••2, 2••2•	882	1223
3932	—	79907	•2, 3, 5•3, 2	242	547	—	3906	80209	•2, 3, 2••••••3•	847	1081	—	3920	80491	•2, 3••2, 2•••2	541	1423
—	3896	79939	•2, 3, 4•4, 2	255	563	—	3907	80221	•2, 3, 2•••••3••	669	1193	3958	—	80513	•2, 3•••••6•	390	449
3933	—	79943	•2, 3, 4•3, 3	202	659	3947	—	80231	•2, 3, 2••2, 2, 3	346	1183	—	3921	80527	•2, 3••••3, 4	213	911
3934	—	79967	•2, 3, 4••5	96	533	—	3908	80233	•2, 3, 2••2••2•	893	1239	3959	—	80537	•2, 3••••2, 2. 2•	888	1255
3935	—	79973	•2, 3, 4, 2, 2•••	566	897	—	3909	80239	•2, 3, 2••2•4	201	949	—	3922	80557	•2, 3••••••••2••	901	1553
3936	—	79979	•2, 3, 4, 2•••2	374	983	—	3910	80251	•2, 3, 2••4•2	313	883	3960	—	80567	•2, 3••••••2•3	344	1281
—	3897	79987	•2, 3, 4, 3, 2, 2	321	781	—	3911	80263	•2, 3, 2, 2, 4, 3	247	797	—	3923	80599	•2, 3•••2•••3	357	1297
3937	—	79997	•2, 3, 4, 5••	268	493	3948	—	80273	•2, 3, 2, 2, 2•3•	708	899	3961	—	80603	•2, 3•••2•2•2	488	1333
—	3898	79999	•2, 3, 4, 7	43	311	3949	—	80279	•2, 3, 2, 2, 2••3	326	1169	—	3924	80611	•2, 3•••3, 3, 2	429	989
3938	—	80021	•2, 3, 3•2••••••	724	1167	—	3912	80287	•2, 3, 2, 2, 2, 5	135	731	3962	—	80621	•2, 3•••3•2••	632	1097
3939	—	80039	•2, 3, 3•••2, 3	314	1061	3950	—	80309	•2, 3, 2, 2•2•••••	800	1307	3963	—	80627	•2, 3•••4, 2, 2	370	907
3940	—	80051	•2, 3, 3••2, 2, 2	466	1127	—	3913	80317	•2, 3, 2, 2•4••	451	823	—	3925	80629	•2, 3•••4••••	573	943
—	3899	80071	•2, 3, 3, 2, 3, 3	261	859	—	3914	80329	•2, 3, 2, 3, 2•2•	701	961	3964	—	80651	•2, 3•2, 4••2	350	893
—	3900	80077	•2, 3, 3, 2, 2, 2••	631	1077	—	3915	80341	•2, 3, 2, 3•••••••	747	1211	3965	—	80657	•2, 3•2, 3•3•	592	749
—	3901	80107	•2, 3. 3, 3•••2	393	1037	—	3916	80347	•2, 3, 2, 3•2•2	385	1053	3966	—	80669	•2, 3•2, 3, 3••	520	919
3941	—	80111	•2, 3, 3, 3•4	142	677	3951	—	80363	•2, 3, 2, 4•••2	352	931	—	3926	80671	•2, 3•2, 3, 5	121	641
3942	—	80141	•2, 3, 2•4, 2••	498	841	3952	—	80369	•2, 3, 2, 5, 3•	398	523	—	3927	80677	•2, 3•2 2•2•••	775	1223
3943	—	80147	•2, 3, 2•3•2, 2	432	1019	3953	—	80387	•2, 3••7, 2	174	371	3967	—	80681	•2, 3•2, 2•••2•	860	1187
—	3902	80149	•2, 3, 2•3••••••	709	1141	—	3917	80407	•2, 3••4••3	233	827	—	3928	80683	•2, 3•2, 2••••2	533	1393
3944	—	80153	•2, 3, 2•3, 2, 2•	676	953	3954	—	80429	•2, 3••3••2••	666	1145	3968	—	80687	•2, 3•2, 2••4	206	945
—	3903	80167	•2; 3, 2•2•2, 3	333	1121	3955	—	80447	•2, 3••3, 6	82	515	—	3929	80701	•2, 3•2, 2, 4••	461	837
—	3904	80173	•2, 3, 2•2••2••	755	1299	—	3918	80449	•2, 3••2•5•	469	551	—	3930	80713	•2, 3•2••2•2•	827	1131

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3931	80737	●2, 3●2●2, 4●	585	719
3969	—	80747	●2, 3●2●2●●●2	500	1317
—	3932	80749	●2, 3●2●2●2●●	683	1183
—	3933	80761	●2, 3●2●4, 2●	513	745
3970	—	80777	●2, 3●3, 3●2●	578	787
—	3934	80779	●2, 3●3, 3●●2	369	947
3971	—	80783	●2, 3●3, 3, 4	160	689
3972	—	80789	●2, 3●3, 2●●●●●	702	1133
—	3935	80803	●2, 3●3●●3, 2	395	901
—	3936	80809	●2, 3●3●●●●●2●	741	1025
3973	—	80819	●2, 3●3●2, 2, 2	408	989
3974	—	80831	●2, 3●3●6	62	421
—	3937	80833	●2, 3●4, 5●	323	385
3975	—	80849	●2, 3●4●●3●	486	623
—	3938	80863	●2, 3●4●5	75	437
3976	—	80897	●2, 4, 9●	120	133
3977	—	80909	●2, 4, 6, 2●●	256	431
—	3939	80911	●2, 4, 6, 4	81	337
—	3940	80917	●2, 4, 5●●●●●	379	609
—	3941	80923	●2, 4, 5, 2●2	217	583
—	3942	80929	●2, 4, 4●4●	327	395
3978	—	80933	●2, 4, 4●2●●●	450	709
—	3943	80953	●2, 4, 4, 3, 2●	411	589
3979	—	80963	●2, 4, 3●4, 2	262	579
—	3944	80989	●2, 4, 3●●3●●	443	789

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	3945	81001	●2, 4, 3, 2●●2●	611	847
—	3946	81013	●2, 4, 3, 3●●●●	501	821
3980	—	81017	●2, 4, 3, 4, 2●	404	585
—	3947	81019	●2, 4, 3, 4●2	223	627
3981	—	81023	●2, 4, 3, 7	42	307
—	3948	81031	●2, 4, 2●4, 3	197	633
3982	—	81041	●2, 4, 2●2●3●	578	733
—	3949	81043	●2, 4, 2●2●2, 2	423	1001
3983	—	81047	●2, 4, 2●2●●3	268	959
—	3950	81049	●2, 4, 2●2, 2, 2●	649	917
3984	—	81071	●2, 4, 2●●●●4	184	849
3985	—	81077	●2, 4, 2●●2●●●●	694	1133
3986	—	81083	●2, 4, 2●●3●2	326	907
—	3951	81097	●2, 4, 2, 2, 2●2●	655	897
3987	—	81101	●2, 4, 2, 2, 2, 2●●	584	997
3988	—	81119	●2, 4, 2, 2●5	100	571
3989	—	81131	●2, 4, 2, 3●●●2	358	945
—	3952	81157	●2, 4●●5●●●	351	541
—	3953	81163	●2, 4●●4●●2	293	747
3990	—	81173	●2, 4●●3●●●●●	602	969
—	3954	81181	●2, 4●●3, 3●●	441	779
3991	—	81197	●2, 4●●2●●2●●	634	1091
—	3955	81199	●2, 4●●2●●4	177	811
3992	—	81203	●2, 4●●2, 2, 2, 2	428	1033
—	3956	81223	●2, 4●●●●3, 3	267	875

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
3993	—	81233	●2, 4●●●●●●●3●	698	891
3994	—	81239	●2, 4●●●●●●●3	312	1129
3995	—	81281	●2, 4●2, 6●	286	331
—	3957	81283	●2, 4●2, 5, 2	241	527
3996	—	81293	●2, 4●2, 3, 2●●	498	845
3997	—	81299	●2, 4●2, 2●2, 2	408	967
—	3958	81307	●2, 4●2, 2, 2●2	363	983
—	3959	81331	●2, 4●2●2, 2, 2	395	957
—	3960	81343	●2, 4●2●6	61	411
—	3961	81349	●2, 4●3, 3●●●	459	719
3998	—	81353	●2, 4●3, 2●2●	536	735
3999	—	81359	●2, 4●3, 2, 4	138	613
4000	—	81371	●2, 4●3●2●2	292	799
—	3962	81373	●2, 4●3●3●●	369	661
4001	—	81401	●2, 4●6, 2●	234	343
—	3963	81409	●2, 5, 8●	131	147
—	3964	81421	●2, 5, 5, 2●●	265	447
—	3965	81439	●2, 5, 4, 5	67	351
—	3966	81457	●2, 5, 3, 2, 3●	405	523
—	3967	81463	●2, 5, 3, 2●3	169	625
4002	—	81509	●2, 5, 2, 2, 2●●●	500	793
—	3968	81517	●2, 5, 2, 2●2●●	449	777
4003	—	81527	●2, 5, 2, 3●3	156	589
4004	—	81533	●2, 5, 2, 5●●	226	417
—	3969	81547	●2, 5●●3●●2	283	725

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4005	—	81551	●2, 5●●3, 4	124	531
—	3970	81553	●2, 5●●2●3●	461	585
—	3971	81559	●2, 5●●2●●3	213	763
4006	—	81563	●2, 5●●2, 2●2	302	817
4007	—	81569	●2, 5●●●●4●	410	499
4008	—	81611	●2, 5●2, 2●●2	308	797
—	3972	81619	●2, 5●2●●2, 2	327	781
4009	—	81629	●2, 5●2●3●●	346	619
—	3973	81637	●2, 5●3, 2●●●	403	641
4010	—	81647	●2, 5●3●4	92	441
—	3974	81649	●2, 5●4, 3●	295	387
—	3975	81667	●2, 6, 6, 2	117	253
4011	—	81671	●2, 6, 5, 3	98	313
4012	—	81677	●2, 6, 4, 2●●	256	433
4013	—	81689	●2, 6, 3, 2, 2●	338	477
4014	—	81701	●2, 6, 2●2●●●	382	603
—	3976	81703	●2, 6, 2●2, 3	161	543
4015	—	81707	●2, 6, 2●●●●2	262	685
—	3977	81727	●2, 6, 2, 6	41	265
4016	—	81737	●2, 6●●2●2●	394	539
4017	—	81749	●2, 6●●●●●●●●	438	709
4018	—	81761	●2, 6●2, 4●	274	337
—	3978	81769	●2, 6●2●●2●	381	529
4019	—	81773	●2, 6●2●2●●	318	551
—	3979	81799	●2, 7, 4, 3	91	295
—	3980	81817	●2, 7, 2, 2, 2●	279	395
4020	—	81839	●2, 7●●●4	72	335
—	3981	81847	●2, 7●2●3	97	363
—	3982	81853	●2, 7●4●●	147	269
4021	—	81869	●2, 8, 2, 2●●	184	315
—	3983	81883	●2, 8●2●2	109	299
4022	—	81899	●2, 9●●●2	90	239
—	3984	81901	●2, 9●2●●	121	211
—	3985	81919	●2, 14	3	43
4023	—	81929	●●●10●2●	102	137
—	3986	81931	●●●10●●2	67	169
—	3987	81937	●●●9●3●	125	157
—	3988	81943	●●●9●●3	61	215
4024	—	81953	●●●8●4●	142	171
—	3989	81967	●●●8●●4	55	249
4025	—	81971	●●●8, 2, 2, 2	136	327
—	3990	81973	●●●8, 2●●●●	217	353
—	3991	82003	●●●7●●●2, 2	199	473
4026	—	82007	●●●7●●●●3	124	447
—	3992	82009	●●●7●●2, 2●	297	421
4027	—	82013	●●●7●●3●●	222	395
—	3993	82021	●●●7, 2, 2●●●	291	461
4028	—	82031	●●●7, 2●4	72	337
4029	—	82037	●●●7, 3●●●●	262	429
—	3994	82039	●●●7, 3●3	95	357
—	3995	82051	●●●6●5, 2	135	293
4030	—	82067	●●●6●2●2, 2	244	577
4031	—	82073	●●●6●2, 2, 2●	376	531
—	3996	82129	●●●6, 2●●3●	381	487
4032	—	82139	●●●6, 2●2●2	232	633
—	3997	82141	●●●6, 2●3●●	295	527
—	3998	82153	●●●6, 3●●2●	375	521
4033	—	82163	●●●6, 4, 2, 2	186	455
—	3999	82171	●●●6, 5●2	123	349
—	4000	82183	●●●5●5, 3	117	371
—	4001	82189	●●●5●4, 2●●	311	525
4034	—	82193	●●●5●3●3●	368	465
—	4002	82207	●●●5●3, 5	77	405
4035	—	82217	●●●5●2●●●2●	556	767
—	4003	82219	●●●5●2●●●●2	345	901
4036	—	82223	●●●5●2●●4	134	613
—	4004	82231	●●●5●2, 2●3	191	707
—	4005	82237	●●●5●2, 4●●	305	553
4037	—	82241	●●●5●●●5●	322	379
—	4006	82261	●●●5●●●●●●●●●	641	1037
—	4007	82267	●●●5●●●●2●2	339	923
—	4008	82279	●●●5●●2, 2, 3	225	769
4038	—	82301	●●●5●●5●●	242	447
4039	—	82307	●●●5, 2, 5, 2	202	441
—	4009	82339	●●●5, 2●●3, 2	327	745

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4040	—	82349	●●●5, 2●●●2●●	526	907	—	4021	82609	●●●4●●●●2, 3●	697	903	4068	—	82903	●●●4, 4●●●3	205	747
—	4010	82351	●●●5, 2●●●4	145	671	4054	—	82613	●●●4●●●●2●●●●	776	1267	4069	—	82913	●●●4, 5, 4●	306	379
4041	—	82361	●●●5, 2●3, 2●	452	651	4055	—	82619	●●●4●●●●3●2	364	1013	—	4032	82939	●●●4, 7●2	115	331
4042	—	82373	●●●5, 3, 3●●●	412	645	—	4022	82633	●●●4●●2, 2●2●	725	993	—	4033	82963	●●●3●5●2, 2	271	637
—	4011	82387	●●●5, 3●●2, 2	321	767	—	4023	82651	●●●4●●2●2●2	409	1117	—	4034	82981	●●●3●4●2●●●	539	849
—	4012	82393	●●●5, 3●2, 2●	463	659	—	4024	82657	●●●4●●3, 4●	471	581	4070	—	82997	●●●3●4, 2●●●●	578	941
4043	—	82421	●●●5, 5●●●●	298	491	—	4025	82699	●●●4, 2, 4●●2	307	783	4071	—	83003	●●●3●4, 3●2	282	779
4044	—	82457	●●●4●4, 2, 2●	444	625	4056	—	82721	●●●4, 2, 2●4●	504	611	4072	—	83009	●●●3●3●5●	388	455
4045	—	82463	●●●4●4, 5	82	427	—	4026	82723	●●●4, 2, 2●3, 2	397	901	—	4035	83023	●●●3●3●2, 4	187	815
4046	—	82469	●●●4●3●2●●●	540	851	4057	—	82727	●●●4, 2, 2●2, 3	290	977	—	4036	83047	●●●3●3, 2, 2, 3	293	999
—	4013	82471	●●●4●3●2, 3	229	769	—	4027	82729	●●●4, 2, 2●●●2●	763	1053	—	4037	83059	●●●3●3, 3, 2, 2	399	971
—	4014	82483	●●●4●3, 2, 2, 2	359	865	4058	—	82757	●●●4, 2●●3●●●	622	971	4073	—	83063	●●●3●3, 3●3	226	851
4047	—	82487	●●●4●3, 2●3	212	783	—	4028	82759	●●●4, 2●●3, 3	273	895	—	4038	83071	●●●3●3, 7	53	385
4048	—	82493	●●●4●3, 4●●	342	619	4059	—	82763	●●●4, 2●●2●●2	470	1213	—	4039	83077	●●●3●2●4●●●	555	859
4049	—	82499	●●●4●2●4, 2	308	681	4060	—	82781	●●●4, 2●●●3●●	560	999	—	4040	83089	●●●3●2●2●3●	739	937
—	4015	82507	●●●4●2●2●●2	421	1085	4061	—	82787	●●●4, 2●2, 3, 2	408	937	4074	—	83093	●●●3●2●2●●●●●	884	1425
4050	—	82529	●●●4●2, 2, 4●	500	613	4062	—	82793	●●●4, 2●2●●2●	740	1027	—	4041	83101	●●●3●2●2, 3●●	633	1121
—	4016	82531	●●●4●2, 2, 3, 2	387	887	4063	—	82799	●●●4, 2●2●4	166	785	4075	—	83117	●●●3●2●●●●2●●	856	1475
—	4017	82549	●●●4●2, 3●●●●	579	949	4064	—	82811	●●●4, 2●4●2	256	723	—	4042	83137	●●●3●2, 2, 5●	499	591
4051	—	82559	●●●4●2, 7	48	353	—	4029	82813	●●●4, 2●5●●	301	557	4076	—	83177	●●●3●2, 3●●2●	772	1073
—	4018	82561	●●●4●●●6●	319	367	—	4030	82837	●●●4, 3, 2●●●●●	655	1057	—	4043	83203	●●●3●●●6, 2	259	557
—	4019	82567	●●●4●●●4, 3	223	717	4065	—	82847	●●●4, 3. 2, 5	104	565	4077	—	83207	●●●3●●●5, 3	220	699
4052	—	82571	●●●4●●●3●●2	398	1019	4066	—	82883	●●●4, 4, 4, 2	250	559	4078	—	83219	●●●3●●●3●2, 2	504	1189
—	4020	82591	●●●4●●●2, 5	127	683	4067	—	82889	●●●4, 4, 2●2●	514	705	—	4044	83221	●●●3●●●3●●●●●	827	1331
4053	—	82601	●●●4●●●●●●●●2●	872	1205	—	4031	82891	●●●4, 4, 2●●2	323	837	—	4045	83227	●●●3●●●3, 2●2	465	1253

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4079	—	83231	●●●3●●●3, 5	142	749	4090	—	83477	●●●3, 2, 4●●●●●●	630	1013	4102	—	83813	●●●3, 3●2, 2●●●	744	1181
—	4046	83233	●●●3●●●2●4●	671	813	—	4060	83497	●●●3, 2, 3●●●●2●	813	1121	—	4073	83833	●●●3, 3●4, 2●	495	719
4080	—	83243	●●●3●●●2●●●●2	632	1651	4091	—	83537	●●●3, 2, 2●●●3●	846	1079	4103	—	83843	●●●3, 4, 5, 2	246	539
—	4047	83257	●●●3●●●2, 3, 2●	799	1147	—	4061	83557	●●●3, 2, 2,2,2●●●	857	1359	—	4074	83857	●●●3, 4, 2●3●	561	713
4081	—	83267	●●●3●●●●●4, 2	476	1055	4092	—	83561	●●●3, 2, 2, 2●●2●	918	1273	—	4075	83869	●●●3, 4, 2, 3●●	467	829
—	4048	83269	●●●3●●●●●3●●●	849	1325	—	4062	83563	●●●3, 2, 2, 2●●●2	563	1481	4104	—	83873	●●●3, 4●●4●	478	583
4082	—	83273	●●●3●●●●●2●2●	1016	1389	4093	—	83579	●●●3, 2, 2, 4●2	330	929	4105	—	83891	●●●3, 4●2, 2, 2	384	931
—	4049	83299	●●●3●●●●2, 3, 2	565	1297	4094	—	83591	●●●3, 2●●4, 3	280	901	4106	—	83903	●●●3, 4●6	58	395
—	4050	83311	●●●3●●●●2●4	231	1091	4095	—	83597	●●●3, 2●●3, 2●●	718	1217	—	4076	83911	●●●3, 5, 3, 3	185	613
4083	—	83339	●●●3●●2, 3●●2	498	1277	4096	—	83609	●●●3, 2●●2, 2, 2●	912	1289	4107	—	83921	●●●3, 5●●3●	450	577
—	4051	83341	●●●3●●2, 3, 2●●	715	1213	—	4063	83617	●●●3, 2●●●●4●	729	887	4108	—	83933	●●●3, 5●3●●	334	599
4084	—	83357	●●●3●●2, 2, 3●●	676	1199	4097	—	83621	●●●3, 2●●●●2●●●	984	1555	4109	—	83939	●●●3, 6, 3, 2	218	505
—	4052	83383	●●●3●●2●2●3	331	1235	4098	—	83639	●●●3, 2●●●2●3	352	1311	4110	—	83969	●●●2●10●	118	129
—	4053	83389	●●●3●●2●4●●	509	929	—	4064	83641	●●●3, 2●●●3, 2●	801	1153	—	4077	83983	●●●2●7, 4	85	351
4085	—	83399	●●●3●●3, 3, 3	292	965	—	4065	83653	●●●3, 2●2, 3●●●	751	1175	4111	—	83987	●●●2●6●2, 2	244	573
—	4054	83401	●●●3●●3, 2●2●	787	1079	4099	—	83663	●●●3, 2●2, 2, 4	230	1017	4112	—	84011	●●●2●5●●●●2	348	907
—	4055	83407	●●●3●●3, 2, 4	203	901	—	4066	83689	●●●3, 2●3●●2●	773	1075	4113	—	84017	●●●2●5, 2, 3●	474	611
4086	—	83417	●●●3●●3●2, 2●	748	1065	—	4067	83701	●●●3, 2●4●●●●	579	953	4114	—	84047	●●●2●4●2, 4	178	775
4087	—	83423	●●●3●●3●5	114	659	4100	—	83717	●●●3, 3, 5●●●	418	645	4115	—	84053	●●●2●4●●●●●●●●	764	1235
—	4056	83431	●●●3●●4, 2, 3	253	873	—	4068	83719	●●●3, 3, 5, 3	191	609	4116	—	84059	●●●2●4●●2●2	408	1109
—	4057	83437	●●●3●●4●2●●	531	923	—	4069	83737	●●●3, 3, 3, 2, 2●	667	941	—	4078	84061	●●●2●4●●3●●	523	931
—	4058	83443	●●●3●●5, 2, 2	303	745	—	4070	83761	●●●3, 3, 2, 2, 3●	689	891	—	4079	84067	●●●2●4, 2, 3, 2	397	909
—	4059	83449	●●●3●●6, 2●	353	517	—	4071	83773	●●●3, 3, 2, 4●●	451	819	4117	—	84089	●●●2●4, 4, 2●	490	709
4088	—	83459	●●●3, 2, 7, 2	186	397	4101	—	83777	●●●3, 3●●5●	462	545	—	4080	84121	●●●2●3●2, 2, 2●	829	1171
4089	—	83471	●●●3, 2, 5, 4	136	569	—	4072	83791	●●●3, 3●●2, 4	213	935	—	4081	84127	●●●2●3●2, 5	145	777

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4118	—	84131	●●●2●3●●●3, 2	528	1201	4131	—	84401	●●●2●2, 2●2, 3●	920	1193	—	4104	84673	●●●2●●●●2, 5●	689	817
4119	—	84137	●●●2●3●●●●●●2●	1004	1387	4132	—	84407	●●●2●2, 2●2●3	374	1395	—	4105	84691	●●●2●●●●2●●2, 2	787	1879
4120	—	84143	●●●2●3●●●●4	238	1097	—	4094	84421	●●●2●2, 3, 3●●●	767	1201	—	4106	84697	●●●2●●●●2●2, 2●	1141	1623
—	4082	84163	●●●2●3, 2, 4, 2	413	919	4133	—	84431	●●●2●2, 3, 2, 4	232	1029	4146	—	84701	●●●2●●●●2●3●●	836	1495
4121	—	84179	●●●2●3, 2●●2, 2	588	1403	4134	—	84437	●●●2●2, 3●●●●●●●	958	1553	4147	—	84713	●●●2●●●●3●●2●	1032	1435
—	4083	84181	●●●2●3, 2●●●●●●	949	1537	4135	—	84443	●●●2●2, 3●2●2	494	1351	4148	—	84719	●●●2●●●●3●4	226	1081
4122	—	84191	●●●2●3, 2●5	134	763	4136	—	84449	●●●2●2, 4, 4●	554	685	4149	—	84731	●●●2●●●●5●2	324	923
—	4084	84199	●●●2●3, 3, 2, 3	309	1061	—	4095	84457	●●●2●2, 4●●2●	745	1037	4150	—	84737	●●●2●●2, 7●	362	411
—	4085	84211	●●●2●3, 4, 2, 2	391	957	—	4096	84463	●●●2●2, 4●4	161	775	—	4107	84751	●●●2●●2, 4, 4	215	909
4123	—	84221	●●●2●3, 6●●	298	555	4137	—	84467	●●●2●2, 5, 2, 2	352	865	4151	—	84761	●●●2●●2, 3, 2, 2●	928	1309
—	4086	84223	●●●2●3, 8	41	339	—	4097	84481	●●●2●●●8●	259	289	—	4108	84787	●●●2●●2, 2, 2, 2, 2	683	1649
—	4087	84229	●●●2●2●5●●●	511	787	—	4098	84499	●●●2●●●4●2, 2	477	1123	—	4109	84793	●●●2●●2, 2, 3, 2●	917	1317
4124	—	84239	●●●2●2●4, 4	194	817	4138	—	84503	●●●2●●●4●●3	308	1093	4152	—	84809	●●●2●●2●●2●2●	1140	1559
—	4088	84247	●●●2●2●3●●3	347	1235	4139	—	84509	●●●2●●●4, 3●●	586	1033	—	4110	84811	●●●2●●2●●2●●2	721	1861
4125	—	84263	●●●2●2●2●2, 3	418	1407	4140	—	84521	●●●2●●●3●●●2●	1022	1409	4153	—	84827	●●●2●●2●●●2●2	672	1831
4126	—	84299	●●●2●2●●●2●●2	702	1811	—	4099	84523	●●●2●●●3●●●●2	635	1657	4154	—	84857	●●●2●●2●4, 2●	710	1031
—	4089	84307	●●●2●2●●●●●●2, 2	773	1841	4141	—	84533	●●●2●●●3, 2●●●●	962	1567	—	4111	84859	●●●2●●2●4●2	389	1099
—	4090	84313	●●●2●2●●●●●2, 2●	1139	1617	4142	—	84551	●●●2●●●2●3, 3	406	1327	4155	—	84869	●●●2●●3, 4●●●	650	1009
4127	—	84317	●●●2●2●●●●3●●	844	1505	—	4100	84559	●●●2●●●2●2, 4	297	1297	—	4112	84871	●●●2●●3, 4, 3	291	941
—	4091	84319	●●●2●2●●●●●5	183	1027	—	4101	84589	●●●2●●●2, 2●2●●	989	1711	—	4113	84913	●●●2●●3●2, 3●	813	1055
4128	—	84347	●●●2●2●●4●2	396	1117	4143	—	84629	●●●2●●●●●●2●●●●●	1272	2051	—	4114	84919	●●●2●●3●2●3	329	1229
—	4092	84349	●●●2●2●●5●●	467	863	—	4102	84631	●●●2●●●●●●2●●3	493	1765	4156	—	84947	●●●2●●4●●2, 2	492	1177
4129	—	84377	●●●2●2,2,2,2, 2, ●	1002	1417	—	4103	84649	●●●2●●●●●●●●●●●2●	1419	1961	—	4115	84961	●●●2●●5, 4●	443	549
4130	—	84389	●●●2●2, 2●●2●●●	1062	1679	4144	—	84653	●●●2●●●●●●●●●●2●●	1212	2089	—	4116	84967	●●●2●●5, 2, 3	231	799
—	4093	84391	●●●2●2, 2●●2, 3	445	1507	4145	—	84659	●●●2●●●●●●●2, 2, 2	798	1931	4157	—	84977	●●●2●●6, 3●	394	519

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	4117	84979	●●●2●●6, 2, 2	269	663	—	4130	85243	●●●2, 2, 2, 5●2	295	839	—	4143	85549	●●●2, 3, 3●●2●●	731	1257
—	4118	84991	●●●2●●10	19	201	4170	—	85247	●●●2, 2, 2, 8	46	387	4182	—	85571	●●●2, 3, 2●4, 2	418	925
—	4119	85009	●●●2, 2, 5●3●	469	591	4171	—	85259	●●●2, 2●●4●●2	468	1193	4183	—	85577	●●●2, 3, 2●2●2●	898	1227
—	4120	85021	●●●2, 2, 5, 3●●	431	759	—	4131	85297	●●●2, 2●●2, 2, 3●	971	1255	—	4144	85597	●●●2, 3, 2●●3●●	693	1235
—	4121	85027	●●●2, 2, 4●3, 2	393	889	—	4132	85303	●●●2, 2●●2, 2●3	403	1493	4184	—	85601	●●●2, 3, 2, 2, 4●	666	817
4158	—	85037	●●●2, 2, 4●●2●●	664	1141	4172	—	85313	●●●2, 2●●●●5●	668	787	4185	—	85607	●●●2, 3, 2, 2, 2, 3	364	1243
4159	—	85049	●●●2, 2, 4, 3, 2●	626	897	4173	—	85331	●●●2, 2●●●●●●2, 2	814	1939	4186	—	85619	●●●2, 3, 2, 3, 2, 2	488	1189
4160	—	85061	●●●2, 2, 3●3●●●	718	1119	—	4133	85333	●●●2, 2●●●●●●●●●●●	1317	2131	—	4145	85621	●●●2, 3, 2, 3●●●●	763	1251
—	4122	85081	●●●2, 2, 3●●2, 2●	913	1295	4174	—	85361	●●●2, 2●●●3, 3●	868	1133	—	4146	85627	●●●2, 3, 2, 4●2	337	949
—	4123	85087	●●●2, 2, 3●●5	149	829	—	4134	85363	●●●2, 2●●●3, 2, 2	603	1471	—	4147	85639	●●●2, 3●●4, 3	283	911
4161	—	85091	●●●2, 2, 3, 2, 3, 2	512	1173	—	4135	85369	●●●2, 2●●●4, 2●	749	1087	4187	—	85643	●●●2, 3●●3●●2	504	1291
—	4124	85093	●●●2, 2, 3, 2, 2●●●	875	1387	—	4136	85381	●●●2, 2●2, 4●●●	711	1103	4188	—	85661	●●●2, 3●●2, 3●●	698	1237
4162	—	85103	●●●2, 2, 3, 2●4	214	1005	—	4137	85411	●●●2, 2●2●●3, 2	619	1411	4189	—	85667	●●●2, 3●●●●3, 2	574	1307
4163	—	85109	●●●2, 2, 3, 3●●●●	772	1265	4175	—	85427	●●●2, 2●2●2, 2, 2	646	1565	—	4148	85669	●●●2, 3●●●●2●●●	989	1563
4164	—	85121	●●●2, 2, 2●6●	436	501	—	4138	85429	●●●2, 2●2●2●●●●	1019	1665	4190	—	85691	●●●2, 3●●●3●2	450	1253
4165	—	85133	●●●2, 2, 2●3, 2●●	788	1335	4176	—	85439	●●●2, 2●2●6	100	673	4191	—	85703	●●●2, 3●2, 3, 3	326	1075
—	4125	85147	●●●2, 2, 2●2, 2●2	593	1603	—	4139	85447	●●●2, 2●3, 3, 3	327	1081	—	4149	85711	●●●2, 3●2, 2, 4	229	1013
—	4126	85159	●●●2, 2, 2●●●2, 3	463	1565	4177	—	85451	●●●2, 2●3, 2●●2	554	1435	—	4150	85717	●●●2, 3●2●●●●●●	951	1541
4166	—	85193	●●●2, 2, 2, 2, 2●2●	1026	1405	—	4140	85453	●●●2, 2●3, 2, 2●●	781	1335	4192	—	85733	●●●2, 3●3, 2●●●	730	1161
4167	—	85199	●●●2, 2, 2, 2, 2, 4	268	1183	4178	—	85469	●●●2. 2●3●3●●	608	1089	4193	—	85751	●●●2, 3●4●3	202	773
—	4127	85201	●●●2, 2, 2, 2●●3●	961	1229	4179	—	85487	●●●2, 2●4●4	154	743	4194	—	85781	●●●2, 4, 3●●●●●	670	1079
—	4128	85213	●●●2, 2, 2, 2●3●●	739	1321	—	4141	85513	●●●2, 3, 5●2●	483	653	4195	—	85793	●●●2, 4, 2●4●	530	643
4168	—	85223	●●●2, 2, 2, 3, 2, 3	360	1237	4180	—	85517	●●●2, 3, 5, 2●●	456	769	4196	—	85817	●●●2, 4, 2, 3, 2●	616	885
4169	—	85229	●●●2, 2, 2, 3●2●●	766	1329	4181	—	85523	●●●2, 3. 4●2, 2	402	947	—	4151	85819	●●●2, 4, 2, 3●2	347	963
—	4129	85237	●●●2, 2, 2, 4●●●●	701	1153	—	4142	85531	●●●2, 3, 4, 2●2	375	1009	4197	—	85829	●●●2, 4●●3●●●	632	987

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	4152	85831	●●●2, 4●●3, 3	277	909	—	4168	86161	●●●●●4●2●3●	643	815	4217	—	86381	●●●●●3●●2●2●●	874	1513
—	4153	85837	●●●2, 4●●2, 2●●	675	1151	4207	—	86171	●●●●●4●2, 2●2	426	1151	—	4183	86389	●●●●●3●●3●●●●	837	1373
—	4154	85843	●●●2, 4●●●●2, 2	519	1237	—	4169	86179	●●●●●4●●●3, 2	463	1053	4218	—	86399	●●●●●3●●7	66	499
4198	—	85847	●●●2, 4●●●●●3	320	1159	4208	—	86183	●●●●●4●●●2, 3	336	1135	—	4184	86413	●●●●●3, 2, 3, 2●●	747	1267
4199	—	85853	●●●2, 4●●●3●●	562	1003	—	4170	86197	●●●●●4●●2●●●●	791	1291	4219	—	86423	●●●●●3, 2, 2●●3	388	1391
4200	—	85889	●●●2, 5, 6●	266	309	4209	—	86201	●●●●●4●●3, 2●	664	955	4220	—	86441	●●●●●3, 2●●●●2●	1090	1507
—	4155	85903	●●●2, 5, 3, 4	137	591	—	4171	86209	●●●●●4, 2, 5●	447	529	4221	—	86453	●●●●●3, 2●2●●●●	958	1565
—	4156	85909	●●●2, 5, 2●●●●●	599	967	—	4172	86239	●●●●●4, 2●5	119	677	—	4185	86461	●●●●●3, 2●4●●	541	987
4201	—	85931	●●●2, 5●●●●●2	384	1007	4210	—	86243	●●●●●4, 3, 3, 2	394	907	—	4186	86467	●●●●●3, 3, 4, 2	409	913
—	4157	85933	●●●2, 5●●●2●●	529	913	4211	—	86249	●●●●●4, 3●●2●	706	981	4222	—	86477	●●●●●3, 3, 2, 2●●	752	1285
4202	—	85991	●●●2, 7, 2, 3	126	437	—	4173	86257	●●●●●4, 4, 3●	505	661	—	4187	86491	●●●●●3, 3●2●2	467	1277
—	4158	85999	●●●2, 7●4	67	327	—	4174	86263	●●●●●4, 4●3	193	735	4223	—	86501	●●●●●3, 4, 2●●●	678	1079
—	4159	86011	●●●2, 9●2	83	241	—	4175	86269	●●●●●4, 6●●	267	497	—	4188	86509	●●●●●3, 4●2●●	583	1013
—	4160	86017	●●●●●11●	93	101	—	4176	86287	●●●●●3●4, 4	177	745	4224	—	86531	●●●●●2●7, 2	224	477
4203	—	86027	●●●●●8●●2	146	369	4212	—	86291	●●●●●3●3●2, 2	494	1165	—	4189	86533	●●●●●2●6●●●	419	643
—	4161	86029	●●●●●8, 2●●	215	361	—	4177	86293	●●●●●3●3●●●●●	811	1305	—	4190	86539	●●●●●2●5●●2	361	917
4204	—	86069	●●●●●6, 2●●●●	448	729	4213	—	86297	●●●●●3●3, 2, 2●	774	1091	4225	—	86561	●●●●●2●3●4●	656	793
—	4162	86077	●●●●●6, 4●●	273	493	—	4178	86311	●●●●●3●2●2, 3	383	1289	4226	—	86573	●●●●●2●3●●2●●	872	1499
—	4163	86083	●●●●●5●4, 2	257	567	—	4179	86323	●●●●●3●2, 2, 2, 2	589	1421	4227	—	86579	●●●●●2●3, 2, 2, 2	598	1441
4205	—	86111	●●●●●5●●5	98	543	—	4180	86341	●●●●●3●●●3●●●	853	1331	—	4191	86587	●●●●●2●3, 3●2	461	1275
—	4164	86113	●●●●●5, 2, 4●	437	535	4214	—	86351	●●●●●3●●●2. 4	272	1191	—	4192	86599	●●●●●2●2●3, 3	403	1317
4206	—	86117	●●●●●5, 2, 2●●●	580	919	—	4181	86353	●●●●●3●●●●●3●	985	1257	4228	—	86627	●●●●●2●2, 2, 3, 2	640	1467
—	4165	86131	●●●●●5, 3, 2, 2	331	805	4215	—	86357	●●●●●3●●●●●●●●●●	1154	1867	—	4193	86629	●●●●●2●2, 2, 2●●●	1093	1733
—	4166	86137	●●●●●5, 4, 2●	421	609	4216	—	86369	●●●●●3●●2, 4●	742	911	—	4194	86677	●●●●●2●●●2●●●●●	1277	2059
—	4167	86143	●●●●●5. 7	45	323	—	4182	86371	●●●●●3●●2, 3, 2	573	1315	—	4195	86689	●●●●●2●●●●●4●	961	1169

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4229	—	86693	●●●●●2●●●●●2●●●	1298	2051	4245	—	87011	●●●●●2, 5, 3, 2	360	833	4257	—	87293	●●●●●●2, 6●●	406	757
4230	—	86711	●●●●●2●●●●●2●3	466	1735	—	4205	87013	●●●●●2, 5, 2●●●	607	967	4258	—	87299	●●●●●●●●●6, 2	364	783
—	4196	86719	●●●●●2●●●●●6	129	853	—	4206	87037	●●●●●2, 8●●	197	373	—	4218	87313	●●●●●●●●●3●3●	961	1215
4231	—	86729	●●●●●2●●2, 2●2●	1182	1619	4246	—	87041	●●●●●●●9●	202	223	4259	—	87317	●●●●●●●●●3●●●●●	1160	1867
—	4197	86743	●●●●●2●●2●●●3	487	1769	—	4207	87049	●●●●●●●6●2●	459	619	4260	—	87323	●●●●●●●●●3, 2●2	652	1757
4232	—	86753	●●●●●2●●3, 4●	766	945	4247	—	87071	●●●●●●●5, 5	118	611	—	4219	87337	●●●●●●●●●2●●●2●	1427	1969
—	4198	86767	●●●●●2●●3●4	229	1095	4248	—	87083	●●●●●●●4●●●●2	548	1429	4261	—	87359	●●●●●●●●●2, 6	144	919
4233	—	86771	●●●●●2●●4, 2, 2	508	1245	—	4208	87103	●●●●●●●4, 6	97	603	4262	—	87383	●●●●●●●●●●●●●●3	610	2207
4234	—	86783	●●●●●2●●8	50	429	4249	—	87107	●●●●●●●3●4, 2	464	1025	—	4220	87403	●●●●●●●●●●2●●●2	877	2309
4235	—	86813	●●●●●2, 2, 3, 3●●	734	1297	4250	—	87119	●●●●●●●3●2, 4	270	1177	4263	—	87407	●●●●●●●●●●2●4	322	1521
4236	—	86837	●●●●●2, 2, 2, 2●●●●	1118	1823	—	4209	87121	●●●●●●●3●●●3●	983	1253	—	4221	87421	●●●●●●●●●●●5●●	589	1089
4237	—	86843	●●●●●2, 2, 2, 3●2	534	1481	—	4210	87133	●●●●●●●3●●3●●	789	1405	—	4222	87427	●●●●●●●●2, 5, 2	479	1047
—	4199	86851	●●●●●2, 2●●4, 2	555	1231	4251	—	87149	●●●●●●●3, 2●2●●	920	1591	—	4223	87433	●●●●●●●●2, 3●2●	1081	1471
—	4200	86857	●●●●●2, 2●●2●2●	1181	1615	—	4211	87151	●●●●●●●3, 2●4	249	1169	4264	—	87443	●●●●●●●●2, 2●2. 2	814	1929
4238	—	86861	●●●●●2, 2●●2, 2●●	1060	1807	4252	—	87179	●●●●●●●2●3●●2	642	1643	4265	—	87473	●●●●●●●●2●2, 3●	1128	1463
—	4201	86869	●●●●●2, 2●●●●●●●●	1323	2141	—	4212	87181	●●●●●●●2●3, 2●●	925	1567	—	4224	87481	●●●●●●●●2●3, 2●	1039	1497
—	4202	86923	●●●●●2, 3, 3●●2	539	1383	—	4213	87187	●●●●●●●2●2●2, 2	773	1829	4266	—	87491	●●●●●●●●3, 4, 2	526	1175
4239	—	86927	●●●●●2, 3, 3, 4	234	1007	—	4214	87211	●●●●●●●2●●●●●●2	883	2311	4267	—	87509	●●●●●●●●3●●●●●●	1154	1871
—	4203	86929	●●●●●2, 3, 2●3●	865	1099	4253	—	87221	●●●●●●●2●●2●●●●	1276	2083	—	4225	87511	●●●●●●●●3●●●3	437	1591
4240	—	86939	●●●●●2, 3, 2, 2●2	560	1517	—	4215	87223	●●●●●●●2●●2●3	469	1745	—	4226	87517	●●●●●●●●3●3●●	751	1345
4241	—	86951	●●●●●2, 3●●2, 3	418	1417	4254	—	87251	●●●●●●●2, 2●●2, 2	820	1957	—	4227	87523	●●●●●●●●4, 3. 2	505	1167
—	4204	86959	●●●●●2, 3●●●4	255	1183	—	4216	87253	●●●●●●●2, 2●●●●●●	1323	2143	4268	—	87539	●●●●●●●●5, 2, 2	416	1023
4242	—	86969	●●●●●2, 3●3. 2●	786	1133	4255	—	87257	●●●●●●●2, 2●2, 2●	1192	1695	—	4228	87541	●●●●●●●●5●●●●	641	1057
4243	—	86981	●●●●●2, 4, 3●●●	686	1075	—	4217	87277	●●●●●●●2, 3●2●●	909	1577	—	4229	87547	●●●●●●●●6●2	259	743
4244	—	86993	●●●●●2, 4●●3●	728	933	4256	—	87281	●●●●●●●2, 4, 3●	778	1019	—	4230	87553	●●●●●●2, 8●	285	319

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4269	—	87557	●●●●●●2, 6●●●	468	719	4280	—	87797	●●●●●●2●4●●●●	760	1251	—	4255	88093	●●●●2, 6, 3●●	345	607
—	4231	87559	●●●●●●2, 6, 3	217	685	4281	—	87803	●●●●●●2●5●2	316	901	—	4256	88117	●●●●2, 5, 2●●●●	599	975
—	4232	87583	●●●●●●2, 4, 5	149	779	—	4245	87811	●●●●●●3, 6, 2	295	637	—	4257	88129	●●●●2, 4●5●	407	477
4270	—	87587	●●●●●●2, 3●3, 2	562	1273	4282	—	87833	●●●●●●3, 3, 2, 2●	864	1219	4295	—	88169	●●●●2, 4, 2●●2●	806	1117
—	4233	87589	●●●●●●2, 3●2●●●	975	1537	—	4246	87853	●●●●●●3, 2●●2●●	937	1613	—	4258	88177	●●●●2, 4, 3, 3●	609	793
—	4234	87613	●●●●●●2, 3, 4●●	609	1103	4283	—	87869	●●●●●●3, 2, 4●●	582	1057	4296	—	88211	●●●●2, 3●2●2, 2	588	1391
4271	—	87623	●●●●●●2, 2●3, 3	426	1393	—	4247	87877	●●●●●●3●●3●●●	869	1357	4297	—	88223	●●●●2, 3●2, 5	158	847
4272	—	87629	●●●●●●2, 2●2, 2●●	1048	1785	4284	—	87881	●●●●●●3●●2●2●	1036	1417	—	4259	88237	●●●●2, 3●●●●2●●	935	1611
—	4235	87631	●●●●●●2, 2●2, 4	311	1359	4285	—	87887	●●●●●●3●●2, 4	274	1203	4298	—	88241	●●●●2, 3●●2. 3●	878	1137
4273	—	87641	●●●●●●2, 2●●2, 2●	1210	1717	4286	—	87911	●●●●●●3●2, 2, 3	394	1349	4299	—	88259	●●●●2, 3, 2, 4, 2	448	997
—	4236	87643	●●●●●●2, 2●●2●2	703	1913	4287	—	87917	●●●●●●3●2●2●●	848	1469	—	4260	88261	●●●●2, 3, 2, 3●●●	795	1243
—	4237	87649	●●●●●●2, 2, 2, 4●	865	1061	—	4248	87931	●●●●●●3●4●2	347	981	4300	—	88289	●●●●2, 3, 3, 4●	624	769
4274	—	87671	●●●●●●2, 2, 3●3	358	1351	—	4249	87943	●●●●●●4, 4, 3	253	819	4301	—	88301	●●●●2, 3, 3●2●●	712	1235
—	4238	87679	●●●●●●2, 2, 7	81	601	4288	—	87959	●●●●●●4, 2●●3	326	1171	—	4261	88321	●●●●2, 2●7●	339	383
4275	—	87683	●●●●●●2●●5, 2	452	985	—	4250	87961	●●●●●●4, 2, 2, 2●	785	1111	—	4262	88327	●●●●2, 2●5, 3	251	797
—	4239	87691	●●●●●●2●●3●●2	661	1693	—	4251	87973	●●●●●●4●●2●●●	811	1283	4302	—	88337	●●●●2, 2●3●3●	784	991
—	4240	87697	●●●●●●2●●2●3●	1079	1369	4289	—	87977	●●●●●●4●●●●2●	884	1223	—	4263	88339	●●●●2, 2●3●2, 2	577	1361
4276	—	87701	●●●●●●2●●2●●●●●	1288	2077	—	4252	87991	●●●●●●4●2●3	279	1043	4303	—	88379	●●●●2, 2●2, 3●2	520	1441
4277	—	87719	●●●●●●2●●●●2, 3	546	1847	4290	—	88001	●●●●●●5, 5●	378	451	4304	—	88397	●●●●2, 2●●●2, 2●●	1058	1803
—	4241	87721	●●●●●●2●●●●●●2●	1429	1975	—	4253	88003	●●●●●●5, 4, 2	305	683	—	4264	88411	●●●●2, 2●●●●2●2	701	1909
—	4242	87739	●●●●●●2●●●3●2	593	1651	4291	—	88007	●●●●●●5, 3, 3	232	769	—	4265	88423	●●●●2, 2●●2, 2, 3	463	1583
4278	—	87743	●●●●●●2●●●6	128	849	4292	—	88019	●●●●●●5●●2, 2	404	967	4305	—	88427	●●●●2, 2●●2●●●2	732	1927
—	4243	87751	●●●●●●2●2, 3, 3	431	1421	4293	—	88037	●●●●●●6, 2●●●	456	727	4306	—	88463	●●●●2, 2. 2, 3, 4	256	1099
4279	—	87767	●●●●●●2●2●●●3	478	1737	—	4254	88069	●●●●2, 8●●●	231	353	4307	—	88469	●●●●2, 2, 2,2●●●●●	1130	1823
—	4244	87793	●●●●●●2●4, 3●	713	935	4294	—	88079	●●●●2, 7, 4	96	397	—	4266	88471	●●●●2, 2, 2, 2●●3	437	1567

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4308	—	88493	●●●●2, 2, 2●●●2●●	1042	1797	—	4280	88807	●●●●2●●●3, 2, 3	405	1393	4331	—	89057	●●●●2●5, 4●	430	533
4309	—	88499	●●●●2, 2, 2●2, 2, 2	680	1647	4320	—	88811	●●●●2●●●3●●●2	632	1669	4332	—	89069	●●●●2●5●2●●	466	811
—	4267	88513	●●●●2, 2, 3, 5●	561	667	—	4281	88813	●●●●2●●●3●2●●	859	1491	—	4294	89071	●●●●2●5●4	121	587
4310	—	88523	●●●●2, 2, 3, 2●●2	592	1533	4321	—	88817	●●●●2●●●4, 3●	730	957	—	4295	89083	●●●●2●7●2	157	453
4311	—	88547	●●●●2, 2, 4, 3, 2	442	1021	—	4282	88819	●●●●2●●●4, 2, 2	503	1233	4333	—	89087	●●●●2●10	18	193
4312	—	88589	●●●●2●●5, 2●●	550	927	—	4283	88843	●●●●2●2, 4●●2	477	1217	—	4296	89101	●●●●3, 6, 2●●	357	601
—	4268	88591	●●●●2●●5, 4	173	723	4322	—	88853	●●●●2●2, 3●●●●●	972	1565	—	4297	89107	●●●●3, 5●2, 2	321	755
4313	—	88607	●●●●2●●4, 5	142	741	—	4284	88861	●●●●2●2, 3, 3●●	709	1253	—	4298	89113	●●●●3, 5, 2, 2●	511	719
—	4269	88609	●●●●2●●3●4●	679	821	—	4285	88867	●●●●2●2, 2●3, 2	611	1387	—	4299	89119	●●●●3, 5, 5	95	493
4314	—	88643	●●●●2●●2●4, 2	524	1159	—	4286	88873	●●●●2●2, 2●●●2●	1173	1619	4334	—	89123	●●●●3, 4●3, 2	362	819
—	4270	88651	●●●●2●●2●2●●2	715	1843	4323	—	88883	●●●●2●2, 2, 2, 2, 2	678	1637	—	4300	89137	●●●●3. 4, 2, 3●	593	765
—	4271	88657	●●●●2●●2●●●3●	1097	1399	—	4287	88897	●●●●2●2●●5●	647	763	4335	—	89153	●●●●3, 3●5●	444	521
4315	—	88661	●●●●2●●2●●●●●●●	1288	2083	—	4288	88903	●●●●2●2●●3, 3	415	1361	4336	—	89189	●●●●3, 3, 2, 2●●●	798	1265
—	4272	88663	●●●●2●●2●●●●3	493	1781	4324	—	88919	●●●●2●2●●●●●●3	482	1745	—	4301	89203	●●●●3, 3, 3, 2, 2	449	1093
4316	—	88667	●●●●2●●2●●2●2	684	1861	4325	—	88937	●●●●2●2●2●●2●	1116	1549	—	4302	89209	●●●●3, 3, 4, 2●	567	821
—	4273	88681	●●●●2●●2, 2●●2●	1195	1657	—	4289	88951	●●●●2●2●3●3	317	1201	4337	—	89213	●●●●3, 3, 5●●	372	685
4317	—	88721	●●●●2●●●●2●3●	1076	1365	—	4290	88969	●●●●2●3, 3●2●	791	1077	—	4303	89227	●●●●3, 2●3●●2	495	1267
—	4274	88729	●●●●2●●●●2, 2, 2●	1205	1703	—	4291	88993	●●●●2●3●●4●	693	845	4338	—	89231	●●●●3, 2●3, 4	218	931
—	4275	88741	●●●●2●●●●●●2●●●	1303	2059	4326	—	88997	●●●●2●3●●2●●●	930	1471	4339	—	89237	●●●●3, 2●2●●●●●	972	1567
—	4276	88747	●●●●2●●●●●●●●●2	885	2317	4327	—	89003	●●●●2●3●●●●●●2	626	1641	4340	—	89261	●●●●3, 2●●●●2●●	936	1613
—	4277	88771	●●●●2●●●2, 4, 2	565	1259	4328	—	89009	●●●●2●3●2, 3●	796	1033	—	4304	89269	●●●●3, 2●●2●●●●	977	1595
—	4278	88789	●●●●2●●●2●●●●●●	1277	2069	—	4292	89017	●●●●2●3●3, 2●	729	1051	4341	—	89273	●●●●3, 2●●3, 2●	818	1177
4318	—	88793	●●●●2●●●2●2, 2●	1148	1633	4329	—	89021	●●●●2●3●4●●	492	899	—	4305	89293	●●●●3, 2, 2, 2, 2●●	823	1405
4319	—	88799	●●●●2●●●2●5	178	1019	—	4293	89041	●●●●2●4●●3●	667	855	4342	—	89303	●●●●3, 2, 2●●●3	382	1387
—	4279	88801	●●●●2●●●3, 4●	761	939	4330	—	89051	●●●●2●4●2●2	394	1079	—	4306	89317	●●●●3, 2, 3, 2●●●	787	1251

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	4307	89329	●●●●3, 2, 4, 3●	587	769	4357	—	89597	●●●●3●7●●	202	381	4369	—	89867	●●●●5, 4●●2	262	669
4343	—	89363	●●●●3●●3●2, 2	520	1227	—	4318	89599	●●●●3●9	23	225	4370	—	89891	●●●●5, 2●3, 2	328	745
—	4308	89371	●●●●3●●3, 2●2	479	1291	4358	—	89603	●●●●4, 7, 2	166	355	4371	—	89897	●●●●5, 2●●●2●	628	867
4344	—	89381	●●●●3●●2●2●●●	940	1483	—	4319	89611	●●●●4, 5●●2	263	669	—	4331	89899	●●●●5, 2●●●●2	389	1017
4345	—	89387	●●●●3●●2●●●●2	648	1693	4359	—	89627	●●●●4, 4, 2●2	314	845	4372	—	89909	●●●●5, 2, 2●●●●	572	933
4346	—	89393	●●●●3●●2, 2, 3●	858	1109	4360	—	89633	●●●●4, 3●4●	462	559	—	4332	89917	●●●●5, 2, 4●●	333	605
4347	—	89399	●●●●3●●2, 2●3	356	1319	—	4320	89653	●●●●4, 3, 2●●●●	661	1077	—	4333	89923	●●●●5●●4, 2	277	615
—	4309	89413	●●●●3●●●●3●●●	863	1347	4361	—	89657	●●●●4, 3, 3, 2●	564	809	4373	—	89939	●●●●5●●●●2, 2	404	963
4348	—	89417	●●●●3●●●●2●2●	1032	1411	—	4321	89659	●●●●4, 3, 3●2	319	883	—	4334	89959	●●●●5●2, 2, 3	221	757
—	4310	89431	●●●●3●●●●●●●●3	443	1603	4362	—	89669	●●●●4, 2●3●●●	620	967	4374	—	89963	●●●●5●2●●●2	348	917
—	4311	89443	●●●●3●●●2, 3, 2	571	1311	—	4322	89671	●●●●4, 2●3, 3	273	893	—	4335	89977	●●●●5●4, 2●	353	513
—	4312	89449	●●●●3●●●2●●2●	1037	1439	4363	—	89681	●●●●4, 2●●●3●	722	921	—	4336	89983	●●●●5●7	33	259
4349	—	89459	●●●●3●●●3, 2, 2	530	1293	—	4323	89689	●●●●4, 2●●2, 2●	773	1097	—	4337	89989	●●●●6, 4●●●	307	477
4350	—	89477	●●●●3●2, 4●●●	622	965	4364	—	89753	●●●●4●●2, 2, 2●	752	1063	—	4338	90001	●●●●6, 2●3●	383	487
—	4313	89491	●●●●3●2, 2●2, 2	581	1377	4365	—	89759	●●●●4●●2, 5	130	701	—	4339	90007	●●●●6, 2●●3	175	629
4351	—	89501	●●●●3●2, 2, 3●●	668	1185	—	4324	89767	●●●●4●●●●2, 3	339	1147	4375	—	90011	●●●●6, 2, 2●2	246	667
4352	—	89513	●●●●3●2●●●●●2●	1016	1405	—	4325	89779	●●●●4●●●2, 2, 2	497	1203	4376	—	90017	●●●●6●●4●	322	393
4353	—	89519	●●●●3●2●●●4	238	1103	4366	—	89783	●●●●4●●●2●3	288	1073	—	4340	90019	●●●●6●●3, 2	251	573
—	4314	89521	●●●●3●2●2, 3●	801	1039	—	4326	89797	●●●●4●2, 3●●●	609	953	4377	—	90023	●●●●6●●2, 3	180	611
—	4315	89527	●●●●3●2●2●3	325	1213	—	4327	89809	●●●●4●2●●3●	665	851	—	4341	90031	●●●●6●●●4	109	507
—	4316	89533	●●●●3●2●4●●	499	911	4367	—	89819	●●●●4●2●2●2	400	1093	4378	—	90053	●●●●7, 3●●●	276	433
4354	—	89561	●●●●3●3●2, 2●	724	1031	—	4328	89821	●●●●4●2●3●●	507	907	4379	—	90059	●●●●7, 2●●2	200	519
—	4317	89563	●●●●3●3●2●2	417	1141	—	4329	89833	●●●●4●3●●2●	619	861	—	4342	90067	●●●●7●●2. 2	205	491
4355	—	89567	●●●●3●3●5	110	637	—	4330	89839	●●●●4●3●4	135	647	4380	—	90071	●●●●7●●●3	124	453
4356	—	89591	●●●●3●5●3	156	601	4368	—	89849	●●●●4●5, 2●	354	517	—	4343	90073	●●●●7●2, 2●	291	415

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4381	—	90089	●●●●8●●2●	230	321	—	4355	90379	●●2, 4●4●●2	287	731	4406	—	90677	●●2, 3●3, 2●●●●	730	1189
4382	—	90107	●●●●1●●2	58	169	—	4356	90397	●●2, 4●3, 3●●	439	775	—	4369	90679	●●2, 3●3, 2●3	271	1001
—	4344	90121	●●2, 9●2●	151	203	4395	—	90401	●●2, 4●2●4●	488	591	—	4370	90697	●●2, 3●2●2●2●	847	1157
—	4345	90127	●●2, 9, 4	47	193	—	4357	90403	●●2, 4●2●3, 2	385	873	—	4371	90703	●●2, 3●2●2, 4	227	991
4383	—	90149	●●2, 7●2●●●	284	447	4396	—	90407	●●2, 4●2●2, 3	282	949	—	4372	90709	●●2, 3●2●●●●●●●●	969	1567
—	4346	90163	●●2, 7, 2, 2, 2	195	469	4397	—	90437	●●2, 4●●●3●●●	630	983	4407	—	90731	●●2, 3●2, 2●●●2	554	1457
4384	—	90173	●●2, 7, 4●●	190	343	—	4358	90439	●●2, 4●●●3, 3	277	907	4408	—	90749	●●2, 3●2, 5●●	388	715
—	4347	90187	●●2, 6●2●●2	249	641	—	4359	90469	●●2, 4●●2, 2●●●	723	1147	—	4373	90787	●●2, 3●●●●●3, 2	583	1327
4385	—	90191	●●2, 6●2, 4	106	461	4398	—	90473	●●2, 4●●2●●2●	772	1071	—	4374	90793	●●2, 3●●●●●●●●2●	1105	1527
4386	—	90197	●●2, 6●●●●●●●●	456	737	—	4360	90481	●●2, 4●●3, 3●	571	745	4409	—	90803	●●2, 3●●●●2, 2, 2	622	1505
—	4348	90199	●●2, 6●●●●3	175	631	—	4361	90499	●●2, 4, 2, 5, 2	267	583	4410	—	90821	●●2, 3●●2, 3●●●	778	1217
4387	—	90203	●●2, 6●●2●2	244	663	—	4362	90511	●●2, 4, 2, 3, 4	169	725	—	4375	90823	●●2, 3●●2, 3, 3	339	1117
—	4349	90217	●●2, 6, 2●●2●	441	611	—	4363	90523	●●2, 4, 2, 2, 2●2	409	1107	4411	—	90833	●●2, 3●●2●●3●	856	1095
4388	—	90227	●●2, 6, 3, 2, 2	234	569	4399	—	90527	●●2, 4, 2, 2, 5	120	649	—	4376	90841	●●2, 3●●2●2, 2●	895	1273
4389	—	90239	●●2, 6, 7	32	229	—	4364	90529	●●2, 4, 2●●4●	551	671	—	4377	90847	●●2, 3●●2●5	139	795
—	4350	90247	●●2, 5●4, 3	155	497	4400	—	90533	●●2, 4, 2●●2●●●	742	1173	4412	—	90863	●●2, 3●●3●4	178	851
4390	—	90263	●●2, 5●2●●3	214	765	—	4365	90547	●●2, 4, 2●2, 2, 2	453	1097	4413	—	90887	●●2, 3, 2, 5, 3	212	675
—	4351	90271	●●2, 5●2, 5	91	487	—	4366	90583	●●2, 4, 3●●●3	257	935	—	4378	90901	●●2, 3, 2. 3●●●●●	787	1267
4391	—	90281	●●2, 5●●●●●●2●	632	873	4401	—	90599	●●2, 4, 4, 2, 3	208	717	—	4379	90907	●●2, 3, 2, 3, 2●2	441	1189
—	4352	90289	●●2, 5●●2, 3●	509	659	4402	—	90617	●●2, 4, 6, 2●	296	433	4414	—	90911	●●2, 3, 2, 3, 5	134	709
—	4353	90313	●●2, 5, 2, 2●2●	553	757	—	4367	90619	●●2, 4, 6●2	159	455	4415	—	90917	●●2, 3, 2, 2●2●●●	860	1357
4392	—	90353	●●2, 5, 4, 3●	366	479	—	4368	90631	●●2, 3●6, 3	149	469	—	4380	90931	●●2, 3, 2, 2, 2, 2, 2	553	1335
4393	—	90359	●●2, 5, 4●3	140	533	4403	—	90641	●●2, 3●4●3●	486	613	4416	—	90947	●●2, 3, 2●●4, 2	436	967
4394	—	90371	●●2, 4●6, 2	184	395	4404	—	90647	●●2, 3●4●●3	232	823	4417	—	90971	●●2, 3, 2●●●2●2	548	1493
—	4354	90373	●●2, 4●5●●●	341	525	4405	—	90659	●●2, 3●3●3, 2	398	901	4418	—	90977	●●2, 3, 2●2, 4●	660	811

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4419	—	90989	●●2, 3, 2●2●2●●	772	1337	4431	—	91253	●●2, 2●3, 3●●●●	744	1219	4443	—	91541	●●2, 2●●2, 2●●●●●	1120	1807
—	4381	90997	●●2, 3, 2●3●●●●	733	1203	4432	—	91283	●●2, 2●2●2●2, 2	642	1519	4444	—	91571	●●2, 2●●2●2, 2, 2	670	1623
—	4382	91009	●●2, 3, 3, 6●	353	409	—	4394	91291	●●2, 2●2●2, 2●2	579	1565	—	4407	91573	●●2, 2●●2●2●●●●	1057	1727
4420	—	91019	●●2, 3, 3, 3●●2	426	1093	—	4395	91297	●●2, 2●2●●●4●	797	969	4445	—	91577	●●2, 2●●2●3, 2●	878	1265
—	4383	91033	●●2, 3, 3, 2, 2, 2●	757	1071	—	4396	91303	●●2, 2●2●●●2, 3	453	1531	4446	—	91583	●●2, 2●●2●6	104	699
4421	—	91079	●●2, 3, 4, 3, 3	236	781	—	4397	91309	●●2, 2●2●●●●●2●●	1015	1749	—	4408	91591	●●2, 2●●3, 3, 3	341	1127
—	4384	91081	●●2, 3, 4, 2●2●	635	871	4433	—	91331	●●2, 2●2, 2, 4, 2	482	1073	—	4409	91621	●●2, 2●●4, 2●●●	723	1151
4422	—	91097	●●2, 3, 4●2, 2●	596	849	4434	—	91367	●●2, 2●2, 3, 2, 3	356	1223	4447	—	91631	●●2, 2●●4●4	162	781
—	4385	91099	●●2, 3, 4●2●2	343	939	—	4398	91369	●●2, 2●2, 3●●2●	913	1269	—	4410	91639	●●2, 2●●5●3	191	735
4423	—	91121	●●2, 3, 6, 3●	338	445	4435	—	91373	●●2, 2●2, 3●2●●	758	1315	4448	—	91673	●●2, 2, 2, 4, 2, 2●	698	983
4424	—	91127	●●2, 3, 6●3●	124	479	—	4399	91381	●●2, 2●2, 4●●●●	695	1143	4449	—	91691	●●2, 2, 2, 3●●●●2	582	1519
—	4386	91129	●●2, 3, 7, 2●	265	389	—	4400	91387	●●2, 2●2, 5●2	293	833	4450	—	91703	●●2, 2, 2, 3, 2●3	326	1205
4425	—	91139	●●2, 2●8, 2	148	313	—	4401	91393	●●2, 2●●●7●	351	397	—	4411	91711	●●2, 2, 2, 3, 6	99	623
—	4387	91141	●●2, 2●7●●●	279	427	4436	—	91397	●●2, 2●●●5●●●	564	869	4451	—	91733	●●2, 2, 2,2●●●●●●●	1142	1847
4426	—	91151	●●2, 2●6, 4	114	473	—	4402	91411	●●2, 2●●●3●2, 2	593	1399	—	4412	91753	●●2, 2, 2, 2, 2●●2●	1055	1463
—	4388	91153	●●2, 2●5●3●	439	553	—	4403	91423	●●2, 2●●●3, 5	167	881	4452	—	91757	●●2, 2, 2, 2, 2●2●●	886	1533
—	4389	91159	●●2, 2●5●●3	211	747	4437	—	91433	●●2, 2●●●2●●●2●	1198	1653	—	4413	91271	●●2, 2, 2, 2, 4●2	379	1067
4427	—	91163	●●2, 2●5, 2●2	308	827	—	4404	91453	●●2, 2●●●2, 4●●	651	1181	4453	—	91781	●●2, 2, 2●●4●●●	712	1103
—	4390	91183	●●2, 2●4●●4	177	805	4438	—	91457	●●2, 2●●●●●5●	680	801	—	4414	91801	●●2, 2, 2●●2, 2, 2●	1045	1477
4428	—	91193	●●2, 2●4, 3, 2●	594	851	—	4405	91459	●●2, 2●●●●●4, 2	559	1239	—	4415	91807	●●2, 2, 2●●2, 5	181	975
4429	—	91199	●●2, 2●4, 6	80	497	4439	—	91463	●●2, 2●●●●●3, 3	438	1435	4454	—	91811	●●2, 2, 2●●●●3, 2	654	1489
4430	—	91229	●●2, 2●3●●3●●	652	1161	4440	—	91493	●●2, 2●●●●2, 2●●●	1130	1793	—	4416	91813	●●2, 2, 2●●●●2●●●	1127	1781
—	4391	91237	●●2, 2●3, 2, 2●●●	841	1333	4441	—	91499	●●2, 2●●●●2●●●2	738	1943	4455	—	91823	●●2, 2, 2●●●●●4	292	1349
—	4392	91243	●●2, 2●3, 2●●●2	555	1459	—	4406	91513	●●2, 2●●●●4, 2●	767	1113	—	4417	91837	●●2, 2, 2●●●4●●	625	1139
—	4393	91249	●●2, 2●3, 3, 3●	681	887	4442	—	91529	●●2, 2●●2, 3●2●	912	1241	4456	—	91841	●●2, 2, 2●2, 5●	596	707

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	4418	91867	●●2, 2, 2●2●2●2	567	1549	4467	—	92177	●●2●●6●3●	352	443	4479	—	92399	●●2●●3, 3●4	184	877
—	4419	91873	●●2, 2, 2●3, 4●	649	801	—	4433	92179	●●2●●6●2, 2	261	613	—	4446	92401	●●2●●3, 4, 3●	595	779
—	4420	91909	●●2, 2, 3, 5●●●	475	733	4468	—	92189	●●2●●6, 3●●	328	577	—	4447	92413	●●2●●3, 6●●	313	583
—	4421	91921	●●2, 2, 3, 3●3●	663	839	—	4434	92203	●●2●●5●●●●2	371	967	—	4448	92419	●●2●●2●6, 2	289	621
—	4422	91939	●●2, 2, 3, 2●3, 2	499	1133	4469	—	92219	●●2●●5, 3●2	280	773	—	4449	92431	●●2●●2●4, 4	203	855
4457	—	91943	●●2, 2, 3, 2●2, 3	364	1227	—	4435	92221	●●2●●5, 4●●	347	627	4480	—	92459	●●2●●2●2●●●●2	714	1865
—	4423	91951	●●2, 2, 3, 2●●4	229	1051	—	4436	92227	●●2●●4●4, 2	323	713	—	4450	92461	●●2●●2●2●●2●●	991	1705
—	4424	91957	●●2, 2, 3. 2, 2●●●●	875	1427	—	4437	92233	●●2●●4●2●2●	701	957	—	4451	92467	●●2●●2●2, 2, 2, 2	671	1619
4458	—	91961	●●2, 2, 3, 2, 3, 2●	740	1063	4470	—	92237	●●2●●4●2, 2●●	634	1079	—	4452	92479	●●2●●2●2, 6	117	745
4459	—	91967	●●2, 2, 3, 2, 6	94	605	4471	—	92243	●●2●●4●●●2, 2	500	1189	4481	—	92489	●●2●●2●●●2●2●	1158	1583
—	4425	91969	●●2, 2, 3●●5●	523	617	—	4438	92251	●●2●●4●●2●2	433	1177	—	4453	92503	●●2●●2●●●●●●●3	499	1805
4460	—	91997	●●2, 2, 3●●●3●●	682	1217	—	4439	92269	●●2●●4, 2●2●●	653	1129	4482	—	92507	●●2●●2●●●●●2●2	690	1879
4461	—	92003	●●2, 2, 3●2, 3, 2	494	1135	4472	—	92297	●●2●●3●3●2●	734	997	—	4454	92551	●●2●●2, 2, 4, 3	327	1055
4462	—	92009	●●2, 2, 3●2●●2●	894	1241	—	4440	92311	●●2●●3●2●●3	361	1291	—	4455	92557	●●2●●2, 2, 3, 2●●	833	1413
4463	—	92033	●●2, 2, 4, 6●	330	383	—	4441	92317	●●2●●3●2, 3●●	667	1181	4483	—	92567	●●2●●2, 2, 2●●3	432	1549
—	4426	92041	●●2, 2, 4, 3●2●	619	843	4473	—	92333	●●2●●3●●●●●2●●	906	1561	—	4456	92569	●●2●●2, 2, 2, 2, 2●	1043	1475
4464	—	92051	●●2, 2, 4, 2●2, 2	460	1091	—	4442	92347	●●2●●3●●3●2	447	1243	—	4457	92581	●●2●●2, 2●●2●●●	1105	1747
—	4427	92077	●●2, 2, 4●●●2●●	667	1151	—	4443	92353	●●2●●3, 2, 5●	533	631	—	4458	92593	●●2●●2, 2●2, 3●	957	1241
—	4428	92083	●●2, 2, 4●2, 2, 2	431	1045	4474	—	92357	●●2●●3, 2, 3●●●	772	1207	—	4459	92623	●●2●●2, 3, 2, 4	241	1069
—	4429	92107	●●2, 2, 5, 2●●2	349	905	4475	—	92363	●●2●●3, 2, 2●●2	576	1489	4484	—	92627	●●2●●2, 3●●2, 2	618	1477
4465	—	92111	●●2, 2, 5, 2, 4	142	633	4476	—	92369	●●2●●3, 2●●3●	858	1097	4485	—	92639	●●2●●2, 3●5	136	785
—	4430	92119	●●2, 2, 5●●●3	219	799	—	4444	92377	●●2●●3, 2●2, 2●	901	1281	—	4460	92641	●●2●●2, 4, 4●	575	711
—	4431	92143	●●2, 2, 6●4	89	433	4477	—	92381	●●2●●3, 2●3●●	662	1183	—	4461	92647	●●2●●2, 4, 2, 3	303	1045
4466	—	92153	●●2, 2, 8, 2●	214	315	—	4445	92383	●●2●●3, 2●5	141	803	4486	—	92657	●●2●●2, 5, 3●	532	699
—	4432	92173	●●2●●7, 2●●	285	479	4478	—	92387	●●2●●3, 3, 3, 2	466	1073	4487	—	92669	●●2●●2, 7●●	260	489

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	4462	92671	●●2●●2, 9	31	291	—	4475	92899	●●2●●●●●3, 3, 2	593	1367	—	4485	93187	●●2●2, 8, 2	159	337
4488	—	92681	●●2●●●●5●2●	584	789	4500	—	92921	●●2●●●●●5, 2●	612	893	—	4486	93199	●●2●2, 6, 4	121	503
—	4463	92683	●●2●●●●5●●2	379	963	4501	—	92927	●●2●●●●●8	50	431	—	4487	93229	●●2●2, 4●●2●●	657	1129
4489	—	92693	●●2●●●●4●●●●●	808	1299	—	4476	92941	●●2●●●2, 4, 2●●	707	1195	4515	—	93239	●●2●2, 4, 2●3	268	989
4490	—	92699	●●2●●●●4, 2●2	460	1237	4502	—	92951	●●2●●●2, 3●●3	388	1383	—	4488	93241	●●2●2, 4, 3, 2●	619	887
—	4464	92707	●●2●●●●3●3, 2	541	1225	4503	—	92957	●●2●●●2, 3, 3●●	726	1283	4516	—	93251	●●2●2, 3●4, 2	396	875
4491	—	92717	●●2●●●●3●●2●●	908	1561	—	4477	92959	●●2●●●2, 3, 5	169	895	—	4489	93253	●●2●2, 3●3●●●	709	1105
4492	—	92723	●●2●●●●3, 2, 2, 2	622	1499	4504	—	92987	●●2●●●2, 2, 3●2	526	1459	4517	—	93257	●●2●2, 3●2●2●	856	1169
—	4465	92737	●●2●●●●●2●5●	641	753	4505	—	92993	●●2●●●2●●5●	664	783	4518	—	93263	●●2●2, 3●2, 4	230	1003
4493	—	92753	●●2●●●●●2●●●3●	1108	1413	—	4478	93001	●●2●●●2●●2●2●	1159	1585	4519	—	93281	●●2●2, 3, 2, 4●	652	799
—	4466	92761	●●2●●●●●2●●2, 2●	1189	1687	4506	—	93047	●●2●●●2●3●3	326	1235	—	4490	93283	●●2●2, 3, 2, 3, 2	505	1157
—	4467	92767	●●2●●●●●2●●5	193	1077	4507	—	93053	●●2●●●2●5●●	464	859	4520	—	93287	●●2●2, 3, 2, 2, 3	358	1221
—	4468	92779	●●2●●●●2, 2●●●2	741	1949	4508	—	93059	●●2●●●3, 5, 2	364	797	—	4491	93307	●●2●2, 3, 4●2	339	953
4494	—	92789	●●2●●●●2, 3●●●●	984	1613	4509	—	93077	●●2●●●3, 2●●●●●●	992	1601	—	4492	93319	●●2●2, 2●4, 3	301	967
—	4469	92791	●●2●●●●2, 3●3	355	1339	4510	—	93083	●●2●●●3, 2, 2●2	540	1463	4521	—	93323	●●2●2, 2●3●●2	538	1377
4495	—	92801	●●2●●●●●●●●6●	536	617	4511	—	93089	●●2●●●3●●4●	716	873	4522	—	93329	●●2●2, 2●2●3●	884	1121
—	4470	92809	●●2●●●●●●●3●2●	1041	1415	—	4479	93097	●●2●●●3●●●●●2●	1049	1451	—	4493	93337	●●2●2, 2●2,2,2●	993	1403
—	4471	92821	●●2●●●●●●●2●●●●●●	1303	2101	—	4480	93103	●●2●●●3●●●4	245	1137	4523	—	93371	●●2●2, 2●●3●2	500	1391
4496	—	92831	●●2●●●●●●2, 5	212	1141	4512	—	93113	●●2●●●3●3, 2●	754	1087	4524	—	93377	●●2●2, 2, 2, 5●	590	699
4497	—	92849	●●2●●●●●●●2, 3●	1160	1503	4513	—	93131	●●2●●●4, 2●●2	478	1239	4525	—	93383	●●2●2, 2, 2, 3, 3	372	1225
—	4472	92857	●●2●●●●●●●●3, 2●	1079	1553	—	4481	93133	●●2●●●4, 2, 2●●	673	1151	4526	—	93407	●●2●2, 2, 2●5	154	879
4498	—	92861	●●2●●●●●●●●●4●●	736	1341	—	4482	93139	●●2●●●4●●2, 2	497	1189	4527	—	93419	●●2●2, 2, 3●●●2	552	1457
—	4473	92863	●●2●●●●●●●●6	131	867	—	4483	93151	●●2●●●4●5	107	623	—	4494	93427	●●2●2, 2, 4, 2, 2	443	1085
4499	—	92867	●●2●●●●●2, 4, 2	574	1279	—	4484	93169	●●2●●●6, 3●	397	523	—	4495	93463	●●2●2●●3●●3	367	1307
—	4474	92893	●●2●●●●●●2●3●●	855	1529	4514	—	93179	●●2●●●7●2	164	473	4528	—	93479	●●2●2●●2●2, 3	438	1475

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	N
—	4496	93481	●●2●2●●2●●●2●	1153	1591	4540	—	93809	●●2●3, 2, 3, 3●	668	871	—	4523	94063	●●2●4●2●4	153	725
—	4497	93487	●●2●2●●2●●4	277	1269	—	4510	93811	●●2●3, 2, 3, 2, 2	465	1133	4552	—	94079	●●2●4●7	40	313
4529	—	93491	●●2●2●●2, 2, 2, 2	670	1617	4541	—	93827	●●2●3●●5, 2	328	715	—	4524	94099	●●2●5, 2●2, 2	341	809
—	4498	93493	●●2●2●●2, 2●●●●	1063	1733	4542	—	93851	●●2●3●●2, 2●2	512	1385	4553	—	94109	●●2●5, 2, 3●●	388	689
4530	—	93497	●●2●2●●2, 3, 2●	902	1295	—	4511	93871	●●2●3●●●●●4	243	1123	—	4525	94111	●●2●5, 2, 5	87	475
4531	—	93503	●●2●2●●2, 6	116	741	4543	—	93887	●●2●3●●●6	92	611	—	4526	94117	●●2●5●●2●●●	529	837
—	4499	93523	●●2●2●●●●●●●2, 2	793	1889	—	4512	93889	●●2●3●2, 5●	493	585	4554	—	94121	●●2●5●●●●●2●	576	797
—	4500	93529	●●2●2●●●●●●2, 2●	1167	1657	4544	—	93893	●●2●3●2, 3●●●	710	1111	4555	—	94151	●●2●6, 3, 3	148	491
—	4501	93553	●●2●2●●●3, 3●	845	1103	—	4513	93901	●●2●3●2, 2, 2●●	743	1269	—	4527	94153	●●2●6, 2●2●	397	545
4532	—	93557	●●2●2●●●3●●●●	916	1503	4545	—	93911	●●2●3●2●●●3	342	1243	4556	—	94169	●●2●6●2, 2●	364	519
—	4502	93559	●●2●2●●●3●3	329	1245	—	4514	93913	●●2●3●2●2, 2●	809	1151	—	4528	94201	●●2●9, 2●	143	211
4533	—	93563	●●2●2●●●4●2	400	1129	4546	—	93923	●●2●3●3, 3, 2	408	941	—	4529	94207	●●2●12	7	89
4534	—	93581	●●2●2●2, 3, 2●●	788	1337	—	4515	93937	●●2●3●4, 3●	507	665	—	4530	94219	●●3, 8●●2	123	311
—	4503	93601	●●2●2●2●●4●	769	937	4547	—	93941	●●2●3●4●●●●	540	889	4557	—	94229	●●3, 7●●●●●	276	443
—	4504	93607	●●2●2●2●●2, 3	433	1467	—	4516	93949	●●2●3●6●●	257	481	4558	—	94253	●●3, 6●●2●●	336	577
4535	—	93629	●●2●2●2●4●●	556	1015	—	4517	93967	●●2●4, 4, 4	139	589	—	4531	94261	●●3, 6, 2●●●●	373	607
—	4505	93637	●●2●2●3, 3●●●	731	1145	4548	—	93971	●●2●4, 3●2, 2	384	907	—	4532	94273	●●3, 5●5●	257	301
4536	—	93683	●●2●2●5, 2, 2	324	797	—	4518	93979	●●2●4, 3, 2●2	351	947	—	4533	94291	●●3, 5●●●2, 2	331	787
4537	—	93701	●●2●3, 6●●●	352	541	4549	—	93983	●●2●4, 3, 5	106	563	4559	—	94307	●●3, 5, 2, 3, 2	280	641
—	4506	93703	●●2●3, 6, 3	163	515	—	4519	93997	●●2●4, 2●●2●●	643	1107	—	4534	94309	●●3, 5, 2, 2●●●	479	759
4538	—	93719	●●2●3, 4●●3	248	881	4550	—	94007	●●2●4, 2, 2●3	252	935	—	4535	94321	●●3, 5, 3, 3●	391	509
—	4507	93739	●●2●3, 3●●●●2	503	1313	—	4520	94009	●●2●4, 2, 3, 2●	577	829	—	4536	94327	●●3, 5, 3●3	155	583
4539	—	93761	●●2●3, 2●5●	484	569	—	4521	94033	●●2●4●●●●●3●	671	857	4560	—	94331	●●3, 5, 4●2	192	539
—	4508	93763	●●2●3, 2●4, 2	399	883	4551	—	94049	●●2●4●2, 4●	492	605	4561	—	94343	●●3, 4●4, 3	178	571
—	4509	93787	●●2●3, 2●●2●2	517	1407	—	4522	94057	●●2●4●2●●2●	685	951	4562	—	94349	●●3, 4●3, 2●●	460	779

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	4537	94351	●●3, 4●3, 4	141	601	4575	—	94613	●●3, 3, 2, 2●●●●●	804	1297	4586	—	94907	●●3, 2●●●●3●2	466	1297
4563	—	94379	●●3, 4●●●●●●2	446	1167	—	4550	94621	●●3, 3, 2, 2, 3●●	569	1009	—	4564	94933	●●3, 2●●2●●●●●●	1003	1625
4564	—	94397	●●3, 4●●4●●	372	677	4576	—	94649	●●3, 3, 2●3, 2●	638	919	4587	—	94949	●●3, 2●●3, 2●●●	778	1237
—	4538	94399	●●3, 4●●6	67	439	—	4551	94651	●●3, 3, 2●3●2	357	995	—	4565	94951	●●3, 2●●3, 2, 3	319	1097
4565	—	94421	●●3, 4, 2●●●●●●	686	1111	—	4552	94687	●●3, 3, 3●5	99	571	4588	—	94961	●●3, 2●●4, 3●	576	755
4566	—	94427	●●3, 4, 2●2●2	358	977	—	4553	94693	●●3, 3, 4, 2●●●	541	861	—	4566	94993	●●3, 2, 2, 3●3●	649	821
4567	—	94433	●●3, 4, 3, 4●	418	515	4577	—	94709	●●3, 3, 5●●●●	412	679	—	4567	94999	●●3, 2, 2, 3●●3	305	1087
4568	—	94439	●●3, 4, 3, 2, 3	224	769	—	4554	94723	●●3, 2●7, 2	177	377	4589	—	95003	●●3, 2, 2, 3, 2●2	438	1181
—	4539	94441	●●3, 4, 3●●2●	575	799	4578	—	94727	●●3, 2●6, 3	154	485	4590	—	95009	●●3, 2, 2, 2●4●	626	759
—	4540	94447	●●3, 4, 3●4	127	605	—	4555	94747	●●3, 2●4, 2●2	347	933	4591	—	95021	●●3, 2, 2, 2●●2●●	814	1401
4569	—	94463	●●3, 4, 8	30	247	—	4556	94771	●●3, 2●3, 2, 2, 2	471	1135	4592	—	95027	●●3, 2, 2, 2, 2, 2, 2	548	1323
—	4541	94477	●●3, 3●4, 2●●	459	775	—	4557	94777	●●3, 2●3, 3, 2●	641	919	4593	—	95063	●●3, 2, 2●●●●●3	392	1419
—	4542	94483	●●3, 3●3●2, 2	399	941	4579	—	94781	●●3, 2●3, 4●●	448	811	—	4568	95071	●●3, 2, 2●●●5	149	839
—	4543	94513	●●3, 3●2, 2, 3●	671	867	—	4558	94789	●●3, 2●2●3●●●	719	1121	—	4569	95083	●●3, 2, 2●2●●●2	557	1467
4570	—	94529	●●3, 3●●●5●	468	551	4580	—	94793	●●3, 2●2●2●2●	866	1183	4594	—	95087	●●3, 2, 2●2●4	204	965
—	4544	94531	●●3, 3●●●4, 2	385	853	4581	—	94811	●●3, 2●2●●2●2	526	1431	—	4570	95089	●●3, 2, 2●3, 3●	667	871
4571	—	94541	●●3, 3●●●2, 2●●	740	1261	—	4559	94819	●●3, 2●2, 2, 3, 2	503	1153	4595	—	95093	●●3, 2, 2●3●●●●	722	1185
—	4545	94543	●●3, 3●●●2, 4	219	959	4582	—	94823	●●3, 2●2, 2, 2, 3	356	1215	—	4571	95101	●●3, 2, 2●5●●	369	683
4572	—	94547	●●3, 3●●●●●2, 2	574	1367	—	4560	94837	●●3, 2●2, 3●●●●	751	1231	—	4572	95107	●●3, 2, 3, 5, 2	291	637
4573	—	94559	●●3, 3●●●●5	136	763	4583	—	94841	●●3, 2●2, 4, 2●	604	875	4596	—	95111	●●3, 2, 3, 4, 3	236	763
—	4546	94561	●●3, 3●●2, 4●	597	733	4584	—	94847	●●3, 2●2, 7	62	457	—	4573	95131	●●3, 2, 3, 2, 2●2	433	1173
—	4547	94573	●●3, 3●●2●2●●	703	1217	—	4561	94849	●●3, 2●●●6●	411	473	—	4574	95143	●●3, 2, 3●●2, 3	323	1095
4574	—	94583	●●3, 3●●3●3	242	915	—	4562	94873	●●3, 2●●●2, 2, 2●	939	1327	4597	—	95153	●●3, 2, 3●2, 3●	662	859
—	4548	94597	●●3, 3, 2, 4●●●	523	811	4585	—	94889	●●3, 2●●●●●●●●2●	1118	1545	4598	—	95177	●●3, 2, 4, 2●2●	616	845
—	4549	94603	●●3, 3, 2, 3●●2	417	1069	—	4563	94903	●●3, 2●●●●2●3	365	1359	4599	—	95189	●●3, 2, 4●●●●●●	648	1081

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
—	4575	95191	●●3, 2, 4●●●3	245	893	—	4587	95443	●●3●●2, 2●●2, 2	613	1463	4625	—	95723	●●3●●●4●●●2	398	1053
—	4576	95203	●●3, 2, 5, 3, 2	277	641	—	4588	95461	●●3●●2, 3, 2●●●	777	1235	—	4600	95731	●●3●●●5, 2, 2	307	755
4600	—	95213	●●3, 2, 5●2●●	396	689	—	4589	95467	●●3●●2, 3●●●2	499	1317	—	4601	95737	●●3●●●6, 2●	357	523
4601	—	95219	●●3, 2, 6, 2, 2	222	547	4613	—	95471	●●3●●2, 3●4	180	859	4626	—	95747	●●3●2, 7, 2	184	393
4602	—	95231	●●3, 2, 10	16	167	—	4590	95479	●●3●●2, 4●3	221	843	—	4602	95773	●●3●2, 4, 3●●	461	813
—	4577	95233	●●3●●9●	153	169	4614	—	95483	●●3●●2, 5●2	262	745	4627	—	95783	●●3●2, 3●2, 3	302	1015
—	4578	95239	●●3●●7, 3	121	379	4615	—	95507	●●3●●●●3●2, 2	526	1241	4628	—	95789	●●3●2, 3●●2●●	688	1183
—	4579	95257	●●3●●5, 2, 2●	477	671	—	4591	95527	●●3●●●●2●2, 3	403	1357	—	4603	95791	●●3●2, 3●●4	193	881
4603	—	95261	●●3●●5, 3●●	372	655	4616	—	95531	●●3●●●●2●●●●2	658	1719	4629	—	95801	●●3●2, 3, 3, 2●	638	915
4604	—	95267	●●3●●4●3, 2	340	769	—	4592	95539	●●3●●●●2, 2, 2, 2	617	1489	—	4604	95803	●●3●2, 3, 3●2	361	999
4605	—	95273	●●3●●4●●●2●	664	915	4617	—	95549	●●3●●●●2, 4●●	576	1045	4630	—	95813	●●3●2, 2●3●●●	706	1101
4606	—	95279	●●3●●4●●4	162	737	4618	—	95561	●●3●●●●●●●2●2●	1054	1441	4631	—	95819	●●3●2, 2●2●●2	538	1387
—	4580	95287	●●3●●4, 2●3	235	867	—	4593	95569	●●3●●●●●●●●●●3●	1013	1293	—	4605	95857	●●3●2, 2, 3, 3●	665	867
—	4581	95311	●●3●●3●2, 4	203	885	—	4594	95581	●●3●●●●●●●●●3●●	799	1425	—	4606	95869	●●3●2, 2, 5●●	379	699
—	4582	95317	●●3●●3●●●●●●●●	869	1405	4619	—	95597	●●3●●●●●●2●2●●	890	1541	4632	—	95873	●●3●2●●6●	388	447
4607	—	95327	●●3●●3●●5	130	723	4620	—	95603	●●3●●●●●●3, 2, 2	544	1327	—	4607	95881	●●3●2●●3●2●	751	1021
4608	—	95339	●●3●●3, 2●●●2	504	1325	—	4595	95617	●●3●●●2, 6●	421	487	4633	—	95891	●●3●2●●2●2, 2	574	1359
4609	—	95369	●●3●●2●3●2●	750	1019	4621	—	95621	●●3●●●2, 4●●●	644	999	—	4608	95911	●●3●2●●●●2, 3	397	1343
—	4583	95383	●●3●●2●2●●3	367	1313	—	4596	95629	●●3●●●2, 3, 2●●	735	1247	—	4609	95917	●●3●2●●●●●●●2●●	887	1529
4610	—	95393	●●3●●2●●●4●	718	873	4622	—	95633	●●3●●●2, 2●3●	826	1049	—	4610	95923	●●3●2●●●2, 2, 2	583	1411
—	4584	95401	●●3●●2●●●●●●2●	1069	1477	4623	—	95651	●●3●●●2●●3, 2	562	1281	—	4611	95929	●●3●2●●●3, 2●	769	1107
—	4585	95413	●●3●●2●●2●●●●	955	1559	—	4597	95701	●●3●●●3●●●●●●	853	1383	—	4612	95947	●●3●2●2, 2●●2	533	1379
—	4586	95419	●●3●●2●●3●2	449	1249	—	4598	95707	●●3●●●3●2●2	439	1201	4634	—	95957	●●3●2●2●●●●●●●	914	1481
4611	—	95429	●●3●●2, 2, 3●●●	768	1201	—	4599	95713	●●3●●●4, 4●	489	605	—	4613	95959	●●3●2●2●●●3	347	1261
4612	—	95441	●●3●●2, 2●●3●	850	1087	4624	—	95717	●●3●●●4, 2●●●	630	1003	—	4614	95971	●●3●2●3, 3, 2	415	957

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	N	N
4635	—	95987	●●3●2●4, 2, 2	356	873	—	4627	96289	●●4, 5●4●	271	327	4663	—	96587	●●4, 2●●●2●●2	488	1259
—	4615	95989	●●3●2●4●●●●	551	907	4648	—	96293	●●4, 5●2●●●	374	589	—	4637	96589	●●4, 2●●●2, 2●●	693	1181
—	4616	96001	●●3●3, 7●	247	281	4649	—	96323	●●4, 4●4, 2	226	499	—	4638	96601	●●4, 2●●●●2, 2●	791	1123
—	4617	96013	●●3●3, 4, 2●●	469	793	4650	—	96329	●●4, 4●2●2●	490	669	—	4639	96643	●●4, 2, 2, 5, 2	265	579
4636	—	96017	●●3●3, 3●3●	546	691	—	4628	96331	●●4, 4●2●●2	311	801	—	4640	96661	●●4, 2, 2, 2●●●●●	737	1189
—	4618	96043	●●3●3, 2●●●●2	487	1273	—	4629	96337	●●4, 4●●●3●	481	613	—	4641	96667	●●4, 2, 2, 2, 2●2	403	1091
4637	—	96053	●●3●3, 2, 2●●●●	718	1171	4651	—	96353	●●4, 4, 2, 4●	378	463	4664	—	96671	●●4, 2, 2, 2, 5	118	639
4638	—	96059	●●3●3, 2, 3●2	342	949	4652	—	96377	●●4, 4, 4, 2●	360	521	—	4642	96697	●●4, 2, 2●3, 2●	581	837
—	4619	96079	●●3●3●●2, 4	197	865	4653	—	96401	●●4, 3●2●3●	534	677	—	4643	96703	●●4, 2, 2●6	69	463
—	4620	96097	●●3●3●2, 4●	523	643	4654	—	96419	●●4, 3●●●3, 2	382	869	4665	—	96731	●●4, 2, 3●2●2	336	919
4639	—	96137	●●3●4, 3●2●	500	681	4655	—	96431	●●4, 3●●●●4	172	793	4666	—	96737	●●4, 2, 4, 4●	376	465
4640	—	96149	●●3●4, 2●●●●●	604	975	4656	—	96443	●●4, 3●●3●2	306	851	—	4644	96739	●●4, 2, 4, 3, 2	287	663
—	4621	96157	●●3●4, 2, 3●●	423	751	—	4630	96451	●●4, 3, 2, 4, 2	297	661	4667	—	96749	●●4, 2, 4●2●●	416	723
4641	—	96167	●●3●4●●2, 3	242	821	—	4631	96457	●●4, 3, 2, 2●2●	623	853	—	4645	96757	●●4, 2, 5●●●●	367	605
4642	—	96179	●●3●4●2, 2, 2	346	839	4657	—	96461	●●4, 3, 2, 2, 2●●	556	949	—	4646	96763	●●4, 2, 6●2	149	427
—	4622	96181	●●3●4●2●●●●	545	891	—	4632	96469	●●4, 3, 2●●●●●●	681	1103	—	4647	96769	●●4●●8●	171	191
—	4623	96199	●●3●5, 3, 3	165	547	4658	—	96479	●●4, 3, 2●5	96	547	4668	—	96779	●●4●●5●●2	242	615
—	4624	96211	●●3●5●●2, 2	287	687	—	4633	96487	●●4, 3, 3, 2, 3	221	759	—	4648	96787	●●4●●4●2, 2	313	737
4643	—	96221	●●3●5●3●●	296	531	—	4634	96493	●●4, 3, 3●2●●	471	817	4669	—	96797	●●4●●4, 3●●	384	677
—	4625	96223	●●3●5●5	61	357	4659	—	96497	●●4, 3, 4, 3●	404	529	—	4649	96799	●●4●●4, 5	91	475
4644	—	96233	●●3●6●●2●	332	463	—	4635	96517	●●4, 2●5●●●	359	553	4670	—	96821	●●4●●3, 2●●●●	628	1023
—	4626	96259	●●4, 9, 2	83	175	4660	—	96527	●●4, 2●4, 4	136	573	—	4650	96823	●●4●●3, 2●3	233	861
4645	—	96263	●●4, 8, 3	74	231	—	4636	96553	●●4, 2●2●●●2●	769	1061	4671	—	96827	●●4●●3, 3●2	304	841
4646	—	96269	●●4, 7, 2●●	204	343	4661	—	96557	●●4, 2●2●●2●●	662	1139	—	4651	96847	●●4●●2●2, 4	193	843
4647	—	96281	●●4, 6, 2, 2●	298	419	4662	—	96581	●●4, 2●●●3●●●	644	1005	4672	—	96851	●●4●●2●●●2, 2	508	1209

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
4673	—	96857	●●4●●2●●2, 2●	752	1067	—	4663	97171	●●4●3, 2●2, 2	369	875	—	4677	97501	●●5, 2, 2●3●●	391	699
4674	—	96893	●●4●●2, 5●●	326	601	—	4664	97177	●●4●3, 2, 2, 2●	559	791	4698	—	97511	●●5, 2, 3, 2, 3	190	653
—	4652	96907	●●4●●●●3●●2	419	1073	4687	—	97187	●●4●3●●3, 2	338	771	4699	—	97523	●●5, 2, 4, 2, 2	238	583
4675	—	96911	●●4●●●●3, 4	184	787	—	4665	97213	●●4●3●4●●	307	561	4700	—	97547	●●5●●4●●2	242	617
—	4653	96931	●●4●●●●●●●3, 2	481	1095	—	4666	97231	●●4●4, 2, 4	117	521	—	4678	97549	●●5●●4, 2●●	351	593
4676	—	96953	●●4●●●●●3, 2●	676	973	4688	—	97241	●●4●4●2, 2●	426	607	4701	—	97553	●●5●●3●3●	412	521
4677	—	96959	●●4●●●●●6	82	543	4689	—	97259	●●4●5●●●2	214	567	—	4679	97561	●●5●●3, 2, 2●	473	667
—	4654	96973	●●4●●●2, 2, 2●●	667	1139	4690	—	97283	●●5, 8, 2	90	191	4702	—	97571	●●5●●2●3, 2	316	717
—	4655	96979	●●4●●●2●●2, 2	503	1201	4691	—	97301	●●5, 5●●●●●	318	511	4703	—	97577	●●5●●2●●●2●	608	839
4678	—	96989	●●4●●●2●3●●	534	955	—	4667	97303	●●5, 5●●3	125	443	—	4680	97579	●●5●●2●●●●2	377	985
—	4656	96997	●●4●●●3, 2●●●	627	997	—	4668	97327	●●5, 4●●4	103	469	4704	—	97583	●●5●●2●●4	146	669
4679	—	97001	●●4●●●3●●2●	658	915	4692	—	97367	●●5, 3●●●●3	208	751	4705	—	97607	●●5●●●●3, 3	220	721
—	4657	97003	●●4●●●3●●●2	401	1059	—	4669	97369	●●5, 3●●2, 2●	497	705	—	4681	97609	●●5●●●●2●2●	599	819
4680	—	97007	●●4●●●3●4	144	689	4693	—	97373	●●5, 3●●3●●	370	659	4706	—	97613	●●5●●●●2, 2●●	538	917
—	4658	97021	●●4●●●6●●	237	443	4694	—	97379	●●5, 3, 2, 3, 2	278	637	4707	—	97649	●●5●●●3, 3●	442	577
—	4659	97039	●●4●2, 4, 4	135	571	—	4670	97381	●●5, 3, 2, 2●●●	475	753	—	4682	97651	●●5●●●3, 2, 2	307	749
4681	—	97073	●●4●2, 2, 2, 3●	604	781	—	4671	97387	●●5, 3, 2●●●2	313	823	4708	—	97673	●●5●2, 3●2●	446	607
—	4660	97081	●●4●2, 2, 3, 2●	573	823	4695	—	97397	●●5, 3, 3●●●●	418	685	—	4683	97687	●●5●2, 2●●3	211	757
4682	—	97103	●●4●2●●2, 4	188	825	—	4672	97423	●●5, 2●3, 4	129	551	—	4684	97711	●●5●2●●●4	137	635
—	4661	97117	●●4●2●●●3●●	533	951	—	4673	97429	●●5, 2●2●●●●●●	575	927	—	4685	97729	●●5●3, 5●	263	313
4683	—	97127	●●4●2●2, 2, 3	272	931	—	4674	97441	●●5, 2●●●4●	435	529	—	4686	97771	●●5●4●●●2	215	569
4684	—	97151	●●4●2●7	42	325	—	4675	97453	●●5, 2●●●●●2●●	553	953	—	4687	97777	●●5●5, 3●	241	317
4685	—	97157	●●4●3, 4●●●	400	621	—	4676	97459	●●5, 2●●2, 2, 2	365	883	4709	—	97787	●●5●6●2	102	293
—	4662	97159	●●4●3, 4, 3	179	579	4696	—	97463	●●5, 2●●2●3	212	789	—	4688	97789	●●5●7●●	115	217
4686	—	97169	●●4●3, 2●3●	506	643	4697	—	97499	●●5, 2, 2●2●2	308	841	—	4689	97813	●●6, 4●●●●●	309	497

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	˙N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4710	—	97829	●●6, 3●2●●●	352	555	—	4700	98101	●●7, 2, 2●●●●	301	491	—	4715	98419	2, 8, 3, 2, 2	123	299
4711	—	97841	●●6, 3, 2, 3●	326	421	4725	—	98123	●●7●●2●●2	194	501	4735	—	98429	2, 8, 5●●	104	191
—	4690	97843	●●6, 3, 2, 2, 2	231	557	4726	—	98129	●●7●●●●3●	292	373	—	4716	98443	2, 7●3●●2	149	381
4712	—	97847	●●6, 3, 2●3	136	503	—	4701	98143	●●7●●●5	49	277	4736	—	98453	2, 7●2●●●●●	296	477
—	4691	97849	●●6, 3, 3, 2●	313	449	—	4702	98179	●●8, 5, 2	87	191	4737	—	98459	2, 7●2, 2●2	164	443
4713	—	97859	●●6, 2●4, 2	192	425	4727	—	98207	●●8, 2, 5	36	197	—	4717	98467	2, 7●●●3, 2	179	407
—	4692	97861	●●6, 2●3●●●	343	535	4728	—	98213	●●8●●2●●●	218	345	—	4718	98473	2, 7●●●●●2●	341	471
4714	—	97871	●●6, 2●2, 4	110	481	—	4703	98221	●●8●●●2●●	201	347	—	4719	98479	2, 7●●●●4	81	373
—	4693	97879	●●6, 2●●●●3	179	647	—	4704	98227	●●8●2, 2, 2	129	313	—	4720	98491	2, 7●●3●2	145	403
4715	—	97883	●●6, 2●●2●2	248	675	—	4705	98251	●●9, 2●●2	99	257	4738	—	98507	2, 7, 2, 2●●2	190	491
4716	—	97919	●●6, 2, 7	28	209	—	4706	98257	●●9●●3●	141	181	4739	—	98519	2, 7, 2●●●3	126	457
—	4694	97927	●●6●●4, 3	127	409	—	4707	98269	●●9●3●●	103	185	—	4721	98533	2, 7, 3, 2●●●	265	421
4717	—	97931	●●6●●3●●2	226	579	4729	—	98297	●●12, 2●	52	77	4740	—	98543	2, 7, 3●4	62	295
4718	—	97943	●●6●●2●●3	170	609	—	4708	98299	●●12●2	27	79	4741	—	98561	2, 6●7●	118	133
4719	—	97961	●●6●●●●●●●2●	484	669	—	4709	98317	2, 11, 2●●	71	119	—	4722	98563	2, 6●6, 2	103	221
4720	—	97967	●●6●●●●●4	114	527	4730	—	98321	2, 10●3●	90	113	4742	—	98573	2, 6●4, 2●●	234	395
4721	—	97973	●●6●●●2●●●●	428	699	—	4710	98323	2, 10●2, 2	67	157	4743	—	98597	2, 6●2●2●●●	376	593
—	4695	97987	●●6●2, 4, 2	187	417	4731	—	98327	2, 10●●3	44	155	4744	—	98621	2, 6●2, 4●●	230	417
4722	—	98009	●●6●2●2, 2●	376	535	—	4711	98347	2, 9●●●●2	101	263	4745	—	98627	2, 6●●●4, 2	200	443
—	4696	98011	●●6●2●2●2	217	593	4732	—	98369	2, 8●5●	112	131	4746	—	98639	2, 6●●●2, 4	114	499
—	4697	98017	●●6●3, 4●	247	305	—	4712	98377	2, 8●2●2●	203	277	—	4723	98641	2, 6●●●●●3●	413	527
—	4698	98041	●●6●5, 2●	191	279	4733	—	98387	2, 8●●●2, 2	146	347	4747	—	98663	2, 6●●2, 2, 3	170	581
—	4699	98047	●●6●8	15	133	—	4713	98389	2, 8●●●●●●●	237	383	4748	—	98669	2, 6●●2●2●●	368	637
4723	—	98057	●●7, 4●2●	216	293	—	4714	98407	2, 8, 2. 2, 3	89	303	—	4724	98689	2, 6, 2, 6●	181	209
4724	—	98081	●●7, 2●4●	220	267	4734	—	98411	2, 8, 2●●●2	142	373	4749	—	98711	2, 6, 2, 2●●3	166	595

z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\bar{N}$	N
—	4725	98713	2, 6, 2, 2, 2, 2●	401	567	—	4738	98953	2, 5●●●3●2●	479	651	4778	—	99233	2, 5, 3●●4●	370	451
4750	—	98717	2, 6, 2, 2, 3●●	304	539	4762	—	98963	2, 5●●●2●2, 2	368	871	—	4747	99241	2, 5, 3●●●●●2●	543	751
4751	—	98729	2, 6, 2●●●●●2●	468	647	4763	—	98981	2, 5●●●●●2●●●	612	967	4779	—	99251	2, 5, 3●2, 2, 2	300	727
—	4726	98731	2, 6, 2●●●●●●2	289	757	4764	—	98993	2, 5●●●●2, 3●	538	697	4780	—	99257	2, 5, 3●3, 2●	392	565
—	4727	98737	2, 6, 2●2, 3●	371	481	4765	—	98999	2, 5●●●●2●3	220	819	—	4748	99259	2, 5, 3●3●2	219	611
—	4728	98773	2, 6, 3●●●●●●●	393	637	—	4739	99013	2, 5●●2, 3●●●	475	743	—	4749	99277	2, 5, 4, 2, 2●●	355	607
—	4729	98779	2, 6, 3●2●2	203	555	4766	—	99017	2, 5●●2, 2●2●	560	767	—	4750	99289	2, 5, 4●2, 2●	377	537
4752	—	98801	2, 6, 5, 3●	214	281	4767	—	99023	2, 5●●2, 2, 4	146	645	4781	—	99317	2, 5, 6●●●●	226	373
4753	—	98807	2, 6, 5●3	80	307	4768	—	99041	2, 5●●3, 4●	364	449	4782	—	99347	2, 4●5●2, 2	214	503
—	4730	98809	2, 6, 6, 2●	173	253	4769	—	99053	2, 5●●3●2●●	412	715	—	4751	99349	2, 4●5●●●●●	353	567
4754	—	98837	2, 5●4●●●●●●	354	569	—	4740	99079	2, 5, 2, 5, 3	131	417	—	4752	99367	2, 4●4●2, 3	181	607
4755	—	98849	2, 5●3●4●	302	365	4770	—	99083	2, 5, 2, 4●●2	238	607	4783	—	99371	2, 4●4●●●●●2	298	777
4756	—	98867	2, 5●3, 2, 2, 2	276	665	4771	—	99089	2, 5, 2, 3●3●	404	511	4784	—	99377	2, 4●4, 2, 3●	404	521
—	4731	98869	2, 5●3, 2●●●●	439	715	—	4741	99103	2, 5, 2, 3, 5	83	439	—	4753	99391	2, 4●4, 6	53	329
4757	—	98873	2, 5●3, 3, 2●	376	539	—	4742	99109	2, 5, 2, 2●2●●●	533	841	—	4754	99397	2, 4●3●3●●●	455	709
—	4732	98887	2, 5●2●3, 3	187	611	4772	—	99119	2, 5, 2, 2●●4	142	651	4785	—	99401	2, 4●3●2●2●	550	751
—	4733	98893	2, 5●2●2, 2●●	461	785	4773	—	99131	2, 5, 2, 2, 3●2	260	721	—	4755	99409	2, 4●3●●●●3●	539	687
4758	—	98897	2, 5●2●●●3●	498	635	—	4743	99133	2, 5, 2, 2, 4●●	319	579	4786	—	99431	2, 4●3, 2, 2, 3	232	791
—	4734	98899	2, 5●2●●●●2, 2	361	859	4774	—	99137	2, 5, 2●●5●	330	389	—	4756	99439	2, 4●3, 2●4	137	643
4759	—	98909	2, 5●2●●3●●	398	709	—	4744	99139	2, 5, 2●●4, 2	271	601	—	4757	99469	2, 4●2●3, 2●●	513	869
—	4735	98911	2, 5●2●●5	87	485	4775	—	99149	2, 5, 2●●2, 2●●	518	883	—	4758	99487	2, 4●2●2, 5	115	617
4760	—	98927	2, 5●2, 2●4	124	583	4776	—	99173	2, 5, 2●2, 2●●●	540	857	4787	—	99497	2, 4●2●●●●●●2●	794	1097
—	4736	98929	2, 5●2, 3, 3●	409	533	—	4745	99181	2, 5, 2●2●2●●	481	833	—	4759	99523	2, 4●2, 2, 4, 2	323	719
4761	—	98939	2, 5●2, 4●2	198	557	4777	—	99191	2, 5, 2●3●3	164	621	4788	—	99527	2, 4●2, 2, 3, 3	250	823
—	4737	98947	2, 5●●●5, 2	209	455	—	4746	99223	2, 5, 3, 2●●3	197	707	—	4760	99529	2, 4●2, 2, 2●2●	677	927

z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N	z'	z''	Z	Exponenten	$\overline{N}$	N
4789	—	99551	2, 4●2, 2●5	104	593	—	4769	99709	2, 4●●●●5●●	337	623	—	4777	99859	2, 4, 2, 4●2, 2	307	723
—	4761	99559	2, 4●2, 3, 2, 3	239	821	4796	—	99713	2, 4●●2, 6●	326	377	—	4778	99871	2, 4, 2, 4, 5	89	465
4790	—	99563	2, 4●2, 3●●●2	374	987	4797	—	99719	2, 4●●2, 4, 3	224	723	—	4779	99877	2, 4, 2, 3●2●●●	583	919
—	4762	99571	2, 4●2, 4, 2, 2	301	737	—	4770	99721	2, 4●●2, 3●2●	621	845	4803	—	99881	2, 4, 2, 3●●●2●	652	899
—	4763	99577	2, 4●2, 5, 2●	363	529	—	4771	99733	2, 4●●2, 2●●●●●	763	1231	—	4780	99901	2, 4, 2, 3, 4●●	365	661
4791	—	99581	2, 4●2, 6●●	228	425	4798	—	99761	2, 4●●2●2, 3●	650	843	—	4781	99907	2, 4, 2, 2●4, 2	325	719
—	4764	99607	2, 4●●●3●●3	257	915	4799	—	99767	2, 4●●2●2●3	264	985	4804	—	99923	2, 4, 2, 2●●●2, 2	492	1171
4792	—	99611	2, 4●●●3, 2●2	370	997	—	4772	99787	2, 4●●3, 2●●2	395	1023	4805	—	99929	2, 4, 2, 2●●2, 2●	728	1033
4793	—	99623	2, 4●●●2●2, 3	308	1037	—	4773	99793	2, 4●●3●●3●	577	739	—	4782	99961	2, 4, 2, 2, 4, 2●	481	697
—	4765	99643	2, 4●●●2, 3●2	359	995	4800	—	99809	2, 4●●4, 4●	384	475	4806	—	99971	2, 4, 2●●5, 2	274	597
—	4766	99661	2, 4●●●●●2, 2●●	727	1239	—	4774	99817	2, 4●●4●●2●	515	717	4807	—	99989	2, 4, 2●●2●●●●●	782	1261
—	4767	99667	2, 4●●●●●●●●2, 2	563	1341	—	4775	99823	2, 4●●4●4	111	535	—	4783	99991	2, 4, 2●●2●●3	303	1085
—	4768	99679	2, 4●●●●●●●5	133	747	—	4776	99829	2, 4●●5●●●●	373	615						
4794	—	99689	2, 4●●●●2●●2●	818	1135	4801	—	99833	2, 4●●6, 2●	282	413						
4795	—	99707	2, 4●●●●4●2	286	807	4802	—	99839	2, 4●●9	20	191						

Bringt man alle Primzahlen der vorliegenden Tabelle gleich jenen der dyadischen Primzahlentabelle von 5 bis 16381 in Gruppen mit je einem gemeinsamen Werthe von N und bezeichnet die jeweiligen Zähler der mit N als Nenner versehenen Brüche mit N' oder N'', je nachdem die Verwandlung derselben in Kettenbrüche die charakteristischen Exponenten einer Primzahl (Z') von der Form $6l-1$ oder einer solchen (Z'') von der Gestalt $6l+1$ liefert, so ergibt sich folgendes Zahlenschema, in welchem jede gleichzeitig in zwei Rubriken auftretende Specialisirung von N mit einem Sternchen versehen ist, um hiedurch die Zusammengehörigkeit der bei solchen Zahlen räumlich getrennten Primzahlengruppen zu markiren.

N	N'	Z	N''	Z'
3	2	5	1	7
5	3	11	2	13
	4	17	1	31
7	4	23	5	19
	2	29	1	127
9	5	47	2	61
	8	257		
11	7	41	8	37
	3	59	9	67
			5	97
13	5	53	8	43
	10	71	9	79
	4	113	6	193
	11	131	1	8191
	7	191		
15	8	383	11	73
	2	509		
17	10	89	7	103
	3	251	6	223
	16	65537	4	241
			8	769
			2	1021
*19	12	83	7	109
	8	101		
	15	137		
	5	239		
	16	263		

N	N'	Z	N''	Z'
*19	6	449		
21	8	107	17	271
			2	4093
23	7	227	18	139
	6	479	16	157
	4	503	10	199
	15	641	21	4099
	3	1019		
	12	6143		
25	11	197	18	151
	7	233	16	163
	22	1031	4	1009
			17	1279
			12	12289
			2	16381
27	17	167	8	229
	22	269	5	499
	16	353	20	577
	23	521		
29	21	149	6	991
	17	179	25	1039
	20	317	26	2053
	22	1151	10	3583
	3	4091		
	27	32771		
*31	19	173	18	181
	24	281	12	211

N	N'	Z	N''	Z'
*31	14	389	17	379
	4	2039	9	463
			7	487
			27	1033
			25	1087
			23	1153
			5	2017
			21	5119
			29	65539
33	14	401	23	313
	5	1013	19	367
	29	2063	28	523
35	19	761	27	283
			13	433
37	26	311	29	277
	14	431	23	337
	8	491	11	457
	17	773	30	541
	22	1409	24	643
	31	2111	15	1663
			33	4111
			9	7681
			25	20479
39	14	443	17	397
	11	929	28	607
	5	4079	8	3967
*41	30	293	29	307

N	N'	Z	N''	Z'
*41	24	359	25	349
	16	419	23	373
	12	461	17	409
	9	977	15	439
	28	1277	19	1543
	35	2081	34	2113
	36	4127	5	8161
	8	7937	10	15361
	27	40961	4	16369
43	12	467	34	547
	33	569	24	751
	13	911	10	967
	28	1283	8	997
	17	3329	23	1531
	11	15359	15	1789
	40	65543	37	4159
			29	81919
45	29	647	28	673
	17	863		
	38	1049		
	32	1217		
*47	17	881	36	571
	20	1601	27	1471
			21	1567
			9	1987
			7	2029
			32	2557
			22	3079

N	N'	Z	N''	Z'
*47			41	4129
			5	8179
			35	18433
49	30	347	31	331
	13	953	19	421
	17	3581	34	631
	41	8447	20	829
	45	32783	11	1951
			9	1999
			26	3067
			44	8209
			12	61441
			4	65521
51	37	593	28	757
	31	701	43	1051
	11	983		
53	41	563	30	739
	31	719	37	1249
	23	797	25	6151
	19	887	49	65551
	42	1091		
	24	1553		
	16	1823		
	8	2027		
	7	4073		
	21	13313		
	9	16127		
	40	73727		

N	N'	Z	N''	Z'
55	43	557	49	16447
	31	743	9	32257
	7	16319		
57	13	971	47	1063
	20	1787		
	31	3041		
59	23	839	34	733
	32	1523	26	787
	16	1889	18	907
	37	2687	27	1549
	9	4049	21	1777
	31	12281	11	1993
	5	65519	46	2239
			22	3457
			7	8167
			53	16417
			12	63487
61	43	617	44	601
	39	653	36	709
	25	827	22	883
	48	1103	18	919
	24	1667	19	1801
	16	1913	52	2083
	53	2069	50	2143
	27	3137	38	2689
	11	4001	40	10243
	55	32831	10	64513
	51	33791		

N	N'	Z	N''	Z'
63	17	947	26	823
	52	1061	23	1759
	29	3089	11	2011
			50	2179
			58	32779
65	47	599	46	613
	42	1289	18	937
	38	1439	23	1783
	12	1997	29	6271
	56	4157	58	8221
	37	11777	28	12799
	44	20477		
	59	32801		
	57	33023		
67	49	587	55	1069
	14	1979	53	1093
	12	2003	43	1297
	57	2087	29	1597
	51	2297	16	3847
	54	4349	10	4057
	52	4481	35	24571
	36	6113	23	28669
	7	16361	61	65599
	44	20483		
*69	29	809	40	727
	19	941	56	2161
	38	1511	47	5113
	53	2273	62	32833

N	N'	Z	N''	Z'
*69	41	2819		
	26	6911		
	8	8171		
71	45	659	50	619
	27	857	26	877
	56	1097	55	1123
	40	1487	51	1213
	32	1559	29	1657
	16	1949	38	3061
	33	3083	28	3331
	58	4289	8	65407
	23	57347		
73	32	1583	57	1117
	28	1697	43	1423
	47	2591	41	1489
	23	3593	17	1933
	19	3833	62	2089
	52	19457	54	2311
	35	49157	50	2551
	64	66047	63	4153
			51	4993
			15	7933
75	31	821	46	691
	59	2207	53	1231
	23	3617	41	6079
	67	8219	7	32749
	32	25601		
*77	34	1571	23	7297

N	N'	Z	N''	Z'
*77	18	1931	48	10753
	65	2099	8	16363
	57	2309		
	53	2543		
	45	2879		
	40	98297		
79	49	677	50	661
	56	1223	30	859
	22	1871	61	1129
	65	2129	57	1201
	42	6131	51	1291
	32	6653	31	1669
	43	12161	12	4051
	9	16349	19	7687
			68	8317
			72	32797
			34	51199
			41	98299
81	68	4217	34	811
	32	6659	62	2287
	53	10247	52	2593
	23	59393	14	4027
			43	6133
			26	14341
*83	22	1907	23	1873
	51	2753	32	3391
	25	14591	24	3709
	15	16001	63	4603

N	N'	Z	N''	Z'
83*	52	21503	72	8287
			66	8707
			75	16411
			37	25087
			9	32707
85	62	1181	46	3049
	48	1481	31	7039
	36	1607	27	7177
	26	1811	19	31231
	18	1973	9	32719
	47	3011		
	74	4133		
	22	7673		
	13	16193		
	76	16433		
	66	17921		
	32	27647		
87	64	1163	55	1327
	37	3203	53	1399
	14	8069	38	3169
	77	8231	73	4219
			26	14593
*89	55	683	34	853
	26	1847	57	1303
	73	2141	25	1861
	69	2243	40	3121
	61	2549	16	4003
	49	3023	37	6529

N	N'	Z	N''	Z'
*89	39	3167	31	7159
	72	4337	19	7873
	14	8081	17	7951
	13	16253	42	12301
			36	13309
			51	94207
91	66	1187	27	1831
	71	2237	32	3571
	41	3119	24	3823
	37	3323	20	3907
	12	8147	48	12277
	69	9209		
	55	11261		
	33	14081		
93	52	1499	38	3313
	64	5087	22	3853
	14	8111	79	4177
	82	16481	77	4231
	44	24593	19	31741
	85	32789		
*95	66	1259	78	2137
	36	1721	52	3037
	37	3359	41	6397
	17	4007	84	8233
	44	6173	74	35839
	34	7103		
	14	8123		
	69	9473		

N	N'	Z	N''	Z'
*95	33	14321		
97	76	1109	71	1171
	62	1307	41	1609
	60	1361	74	2293
	36	1733	38	3343
	26	1901	30	3613
	79	2153	22	3889
	67	2531	77	4357
	59	2801	88	32803
	23	3851		
	17	4019		
	34	7151		
	86	16451		
	51	49121		
	43	50177		
99	70	1229	73	4639
	58	1433	71	4861
	86	4139	61	5503
	82	4229	53	6121
	64	5153	17	8059
	26	7649	68	10177
			59	22531
			32	57349
			91	65563
*101	64	1319	57	1483
	73	2399	39	1693
	74	4673	37	1753
	60	5639	22	3919

N	N'	Z'	N''	Z'
*101	89	8243	77	4591
	75	9221	69	5107
	59	11519	47	6163
	35	14327	88	8263
	40	26627	82	8641
			70	10111
			12	16333
			46	49663
			93	65557
			63	86017
103	66	1301	39	1723
	73	2447	42	3319
	65	2657	40	3361
	29	3719	32	3607
	46	6269	30	3697
	16	8093	18	4021
	91	8237	45	6337
	83	8699	20	15877
	81	8831	14	16273
	67	10271	12	16339
	49	49169	33	28687
	31	58367	25	30727
			11	32713
			82	34819
			72	39937
			10	65479
*105	76	1193	61	1447
	67	2621	29	1879

N	N'	Z	N''	Z'
*105	23	3911	62	2833
			32	3631
			59	5953
			88	8443
			68	10303
			86	34303
107	66	1373	47	1579
	60	1493	41	1699
	77	2417	88	2131
	29	3779	82	2281
	25	3863	76	2437
	19	4013	38	3559
	90	4211	30	3727
	93	8273	83	4483
	73	10223	20	15937
	96	16421	81	18427
	15	65027	37	28657
			33	28927
			13	32647
			50	49279
			32	58369
			10	65497
*109	64	1427	69	1321
	46	1613	63	1459
	90	4241	84	2269
	60	6047	76	2503
	39	14207	43	6661
	29	15233	17	8089

N	N'	Z	N''	Z'
*109	21	15887	94	8311
	28	30713	88	8689
	57	49139	80	9343
			70	10369
			62	11779
			42	13567
			34	14401
			26	15391
			16	16249
			81	18439
111	46	1637	41	1741
	71	2609	31	1867
	59	12263	62	3001
	35	14369	23	7927
	67	45053		
*113	83	2333	82	2371
	73	2579	70	2719
	65	2939	64	2953
	49	3191	42	3463
	21	3989	24	3943
	44	6719	69	5569
	93	8513	67	5647
	17	16223	96	8353
	66	23039	32	14851
	36	28703	20	16063
	26	30977	91	17401
	22	31751	47	26113
	12	32717	39	28663

N	N'	Z'	N''	Z''
*113	54	98321	98	33151
			72	41983
			79	79873
115	32	7487	81	1237
	24	7919	52	3109
	22	7949	42	3517
	18	8087	97	4201
	61	12269	93	4339
	48	26111	83	4801
	87	36857	88	9151
	53	49409	99	16633
	104	65633	79	20353
			67	23041
117	83	2441	49	1627
	28	7691	43	1747
	41	14303	89	4597
	98	16889	53	6211
	85	37889	76	10273
			25	31489
*119	50	1619	73	1381
	87	2351	69	1453
	45	3449	82	2539
	43	3527	76	2617
	86	4799	36	3643
	103	8291	32	3793
	67	11903	33	7489
	31	15329	100	8431
	25	15809	72	11257

N	N'	Z'	N''	Z''
*119	23	15881	38	14347
	41	57329	57	98317
	106	65789		
121	87	2423	71	1429
	45	3461	84	2521
	43	3557	76	2683
	37	3623	35	7417
	86	4871	96	8719
	38	7193	92	9199
	18	8117	54	12541
	79	10253	42	14323
	65	12227	90	36871
	53	12671		
	29	15377		
	21	16097		
	14	32687		
	93	36353		
	13	65423		
123	76	1367	52	3217
	34	1877	101	4273
	71	2927	95	4513
	38	7229	91	4621
	80	20543	85	5059
	20	32261	73	5641
	16	32609	109	16453
	110	65729	65	24547
	104	67073	23	31873

N	N'	Z'	N''	Z''
125	53	3209	76	2803
	33	3821	87	5023
	27	3929	29	7741
	96	4547	23	7993
	56	6257	19	8101
	46	6977	68	12163
	97	8963	24	15889
	67	12239	109	16519
	57	12413		
	112	16427		
	108	16607		
	66	24551		
	16	32633		
127	93	2339	100	2203
	79	2693	92	2383
	71	2999	80	2671
	49	3389	70	3019
	35	3761	103	4327
	29	3881	87	5101
	72	5903	77	5623
	58	6203	73	5881
	46	7043	37	7393
	40	7187	33	7669
	108	16703	68	12241
	20	32321	28	15619
	53	52223	107	16831
	112	65921	114	32839
	96	73721		

N	N'	Z'	N''	Z''
129	73	2957	56	3187
	53	3299	101	4447
	106	4271	59	6199
	94	4733	23	8017
	70	6089	110	8329
	28	7841	20	16189
	109	8387	107	16903
	95	9281	55	25603
	91	9857	14	65413
	104	17393		
	98	18401		
	74	23549		
	82	83969		
131	76	1451	55	1621
	50	1709	36	3769
	101	2267	30	3877
	108	4253	57	6367
	100	4583	114	8269
	77	11393	104	8713
	61	12323	72	12097
	59	12479	70	12253
	103	35327	58	12547
	62	98369	54	13183
			18	16267
			16	65287
*133	75	2969	82	2749
	29	3917	48	3529
	52	6689	23	8053

N	N'	Z'	N''	Z''
*133	30	7793	96	9601
	115	8297	54	13297
	109	8573	32	15373
	101	9203	26	63493
	79	11279	71	98047
	117	32993		
	25	63743		
	120	65657		
	92	80897		
	62	98561		
135	32	7703	56	3271
	112	16901	107	4363
			53	6673
			37	7549
			109	17377
			23	32251
			92	40897
137	29	3947	106	2251
	32	7727	84	2767
	30	7823	105	4561
	24	8039	79	5857
	118	16631	75	6073
	60	25343	56	13249
	48	28607	54	13327
	36	30593	22	16141
	20	32507	121	16477
	59	51197	72	49123
	90	81929	125	65587

N	N'	Z	N''	Z'
139	109	2213	98	2467
	41	3677	30	3931
	114	4283	97	4999
	86	5441	33	7699
	95	10211	110	8737
	79	11783	76	12157
	48	28661	54	13441
	36	30689	24	16111
	49	57089	124	32887
			66	49177
			127	65581
141	59	3257	86	2791
	41	3701	82	2887
	116	4259	115	4297
	104	4637	91	5167
	80	5897	122	8293
	50	7121	83	22783
	38	7583	29	31729
			17	32653
			92	41023
			44	57601
*143	83	2897	112	2221
	31	3923	84	2851
	98	5099	103	4831
	64	6263	27	7963
	40	7457	11	17923
	30	7907	109	18367
	85	11273	21	32497

N	N'	Z	N''	Z'
*143	23	16139	68	49171
	126	16487	20	65029
	76	24527		
	61	51203		
145	106	4703	52	3547
	94	5147	44	3637
	64	6287	122	8419
	54	6917	104	9721
	26	8009	82	11839
	123	8369	131	65647
	117	8693		
	33	15551		
	19	16301		
	68	24623		
147	83	2963	64	3181
	53	3533	62	3229
	82	6011	65	6277
	109	9227	38	15349
	128	16529	32	15679
			100	40927
			20	65089
			101	81409
*149	57	3407	108	2377
	41	3767	94	2659
	42	7433	84	2971
	69	12347	44	3673
	43	14843	123	4243
	118	17471	106	9733

N	N'	Z	N''	Z'
*149	70	24611	88	11329
	58	26879	68	12409
	20	32573	54	14083
	113	36833	46	14461
	101	40949	125	16879
	17	65393	91	22273
			83	24061
			132	32911
			114	36607
			36	61471
			135	65617
			133	65761
			117	70657
151	89	2843	92	2797
	59	3347	62	3301
	118	4463	56	3469
	104	5081	111	4657
	94	5381	57	6907
	127	8423	47	7207
	123	8609	128	8377
	107	9791	116	9091
	69	12401	70	12343
	41	15107	131	16573
	120	17417	125	16927
	20	32579	39	30703
	129	33287	90	45061
	99	40973	52	57331
	138	65579	16	65437

N	N'	Z	N''	Z'
153	97	2633	112	2341
	55	3539	64	3259
	41	3803	56	3511
	94	5507	95	5407
	88	5879	83	6091
	70	6197	59	6781
	127	33797	35	7759
	128	67577	91	22543
			130	33409
			100	40993
155	57	3491	68	3163
	122	4409	119	4549
	108	5009	113	4729
	42	7559	99	5233
	34	7817	33	7879
	101	10259	118	9187
	59	13697	32	15859
	132	16673	83	24481
	72	24671	27	32191
	28	32003	23	32479
	24	32381		
	136	66041		
	126	69119		
	74	98327		
*157	111	2459	71	6217
	99	2663	130	8461
	91	2909	30	15901
	48	7247	28	16033

N	N'	Z	N''	Z'
*157	129	8543	61	26881
	89	11807	23	32503
	73	12329	135	66553
	43	15101	103	81937
	134	10649	75	98323
	96	22271		
	72	24767		
	18	32693		
	137	33029		
	87	48131		
	140	65777		
159	115	2393	112	2473
	97	2789	100	2677
	59	3467	88	12037
	47	3671	65	26497
	116	4721	128	34807
	98	5501	133	67579
	86	6101		
	113	9743		
	109	10193		
	103	10301		
	101	10499		
	89	11969		
	85	12251		
	71	12539		
	140	16493		
	92	23297		
	41	61409		

N	N'	Z	N''	Z''
161	95	2837	66	3307
	102	5279	113	4987
	34	7901	57	7129
	103	10433	136	8389
	47	14783	60	13831
	29	16007	58	14143
	25	16187	50	14431
	88	24317	24	16231
	86	24509	122	36847
	85	49103	76	49201
	33	63473		
	146	65609		
163	119	2357	105	5179
	120	4643	91	6007
	96	5693	139	16657
	90	6029	103	21247
	58	7109	132	34687
	137	8429	36	62467
	39	15383		
	126	18047		
	116	19463		
	52	28697		
	42	30707		
	22	32561		
	127	35837		
	77	49199		
	31	63617		
	17	65447		

N	N'	Z	N''	Z''
165	101	2777	46	3739
	49	3659	74	12511
	107	10289		
	29	16067		
	34	31727		
	97	45569		
	23	65033		
167	121	2381	98	2857
	116	5039	60	3541
	135	8681	131	4423
	47	14879	97	5791
	140	16883	75	6247
	124	18443	120	9697
	68	26561	26	16183
	66	26633	145	16561
	58	28643	129	18049
	65	53759	109	20509
	94	95231	95	23557
			144	33247
			88	49117
			18	65419
			147	65983
*169	119	2477	139	4261
	105	2699	107	5281
	120	4877	61	7057
	108	5231	49	7411
	100	5657	138	8581
	36	7877	132	8929

N	N'	Z	N''	Z''
*169	109	10337	110	10267
	73	12791	44	15331
	63	13829	38	15601
	37	15647	32	15919
	93	48383	144	33343
	79	49277	76	49921
	27	64577	153	65629
	146	66431	111	81931
	102	90107	95	95233
171	124	4751	106	2713
	74	6389	50	3691
	62	28163	131	4567
	151	32957	53	7219
	77	49919	47	7537
	142	67589	91	24517
	112	81953	23	32569
173	134	4493	100	2917
	122	4931	71	6607
	120	5051	53	7237
	127	9341	31	8011
	68	26687	128	9241
	60	28649	81	24631
			47	30211
			27	32353
			70	53233
			36	63361
			18	65449

N	N'	Z	N''	Z''
175	47	3797	128	2347
	138	4391	41	7717
	62	7127	142	8647
	48	7547	106	11251
	53	14561	137	17791
	31	16061	81	24697
	124	19583	51	29569
	24	32537	32	63997
	157	32843	97	96259
	139	34847		
	107	44543		
	158	65651		
177	140	4373	112	2647
	110	5393	97	6067
	80	6221	55	7213
	74	6521	47	7621
	131	9239	40	15583
	127	9719	77	25471
	98	24071	23	32611
	151	33311	94	49057
	145	34301		
*179	129	2411	68	3433
	111	2711	50	3733
	105	2861	73	6637
	75	3251	41	7753
	140	4451	132	9277
	106	5651	42	15427
	78	6353	34	15907

N	N'	Z	N''	N''
*179	145	8669	160	32869
	99	12041	82	49537
	53	14657	66	55807
	47	15299		
	31	16103		
	27	16217		
	130	18947		
	32	32063		
	97	48767		
	144	69623		
181	105	2903	133	4663
	142	4421	79	6343
	126	5021	71	6679
	81	12527	49	7561
	77	12809	39	7867
	27	16229	138	9181
	157	33149	114	10687
	103	47111	100	12049
	35	63521	82	12421
			56	14449
			78	51193
			58	57373
			22	65293
			95	98257
*183	134	4679	148	8677
	118	5171	40	15649
	53	14831	125	20431
	104	23567	136	36877

N	N'	Z	N''	Z'
*183	155	33533	106	46591
	83	49667	74	53239
	77	51713		
185	76	6599	109	5689
	56	7283	107	5827
	127	10181	142	9103
	67	14087	34	15991
	49	15263	147	17419
	43	15473	73	26641
	112	22511	158	33289
	54	29567	141	73471
	137	36929	97	98269
187	79	3221	116	2707
	120	5189	103	6043
	82	6329	73	6703
	145	8969	42	15607
	76	26591	133	19471
	53	59399	129	20287
			81	25537
			29	32377
			60	57367
			161	66529
			135	76801
*189	134	4889	166	33013
	116	5519	146	36097
	139	9311	74	53503

N	N'	Z	N''	N'
*189	68	28289	169	65731
	26	32531		
	43	62207		
191	118	5471	80	3253
	151	8753	74	3373
	149	8951	113	5659
	121	10559	158	8467
	79	13121	110	11743
	166	16547	50	15313
	156	17159	40	15823
	55	59387	163	16651
	23	65309	137	19441
	104	97283	136	38917
	90	98429	88	49411
	86	99839	105	96769
			101	98179
*193	142	4649	149	4519
	136	4943	133	5077
	122	5309	113	5743
	108	5978	109	5923
	106	6053	85	6301
	74	6791	51	7639
	60	7211	121	21499
	162	16871	115	90127
	126	20507		
	72	27653		
	68	28547		
	56	29633		

N	N'	Z	N''	Z'
*193	30	32369		
	171	32909		
	123	41981		
	91	49211		
	23	65327		
	118	89087		
195	136	5003	113	5821
	148	18413	86	12577
	116	22541	74	13759
	112	23537	149	18307
	77	53279	43	31237
			92	49207
			38	63499
*197	154	4457	77	6691
	142	4817	71	7069
	76	6779	162	8527
	52	7643	171	16567
	143	9479	159	17383
	81	13187	47	30781
	61	14447	31	32323
	166	16829	60	58111
	150	18371	161	68611
	146	18461		
	124	21377		
	112	23561		
	88	25073		
	46	30911		
	38	31769		

N	N'	Z	N''	Z'
*197	163	33857		
	137	40193		
	117	45119		
	104	98207		
199	123	2729	144	2389
	84	6449	115	5839
	145	9467	45	7789
	137	10169	162	8623
	113	11789	156	8863
	109	12143	152	9157
	164	17021	122	11071
	140	19841	90	12433
	56	29759	88	12553
	175	32999	70	14281
	165	33809	62	14407
			91	24799
			89	25057
			63	28729
			59	29311
			158	34849
*201	118	5711	119	5653
	76	6899	83	6577
	56	7481	47	7723
	46	7757	148	9283
	59	14723	92	12391
	64	17183	149	18457
	32	32303	62	57853
	26	32621	127	84991

N	N'	Z	N''	N'
*201	107	49031		
	95	49193		
	55	60413		
203	160	4397	159	4441
	155	9161	157	4507
	141	10079	75	6961
	172	16763	36	16057
	54	30467	121	90121
	47	61949		
205	157	9137	129	5347
	131	10463	127	5437
	173	33599	113	6037
	83	53231	89	6373
	27	65183	61	7309
			162	8761
			48	15439
			36	16069
			147	19447
			53	30697
*207	116	5981	76	3499
	44	7883	151	4723
	95	12377	127	5521
	77	13841	164	8731
	65	14387	152	9337
	61	14717	146	9859
			86	13063
			169	17167

N	N'	Z'	N''	Z''
*207			167	17389
			49	30817
			28	65119
209	129	2741	91	6361
	81	3371	164	8839
	130	5387	144	10159
	118	5927	134	10399
	56	7607	124	11287
	75	14177	64	14479
	45	15737	48	15493
	172	17027	169	17359
	146	19973	155	18451
	46	31247	89	25609
	40	31793	63	29179
	112	97919	142	40933
			175	67567
			97	98689
*211	78	6959	147	5011
	171	8663	59	7459
	83	13337	154	9439
	57	15137	150	9739
	45	15749	134	10501
	39	15971	128	11239
	37	16073	114	12211
	182	16619	92	12703
	148	19961	58	15073
	144	20441	40	15913
	130	22013	173	17137

N	N'	Z'	N''	Z''
*211	112	24533	67	28711
	135	41729	63	29191
	51	61469	29	32533
	27	65267	184	33037
			178	33601
			120	47119
			189	65713
			187	65809
			183	66301
			143	81901
			121	94201
213	154	4793	124	11527
	36	5237	163	18301
	134	5351	119	24001
	130	5573	74	57283
	89	13049		
	92	25583		
	50	30851		
	185	33119		
	182	66569		
*215	166	4517	133	5443
	152	4919	97	6229
	136	5297	79	6991
	64	7307	63	7369
	58	7577	159	18493
	51	15401	139	20611
	116	24443	99	24709
	76	28541	29	32563

N	N'	Z'	N''	Z''
*215	117	48647	146	40939
	101	49223	114	49081
			66	57859
			62	59377
			193	65677
			141	81943
217	78	7079	157	4783
	127	11489	153	4933
	89	13217	139	5209
	41	15923	125	5869
	156	19391	178	8563
	150	20231	120	12043
	118	24329	82	13807
	68	28793	179	16993
	38	32159	171	17599
	37	64499	165	18397
	158	75773	159	18691
			149	20359
			121	24049
			67	28921
			61	29761
			33	32401
			136	43003
			30	65053
			117	97789
*219	154	4967	155	4903
	173	32969	95	6379
	151	40577	83	6883

N	N'	Z'	N''	Z''
*219	133	44927	67	7243
	53	61463	65	7321
	49	62459	121	24097
			119	24337
			160	37633
			130	45121
			122	48121
			86	53377
			68	57727
			62	59407
			32	65011
			28	65269
221	84	6863	96	12739
	62	7451	191	16603
	141	10487	183	16921
	97	12641	179	17341
	87	13331	157	19489
	47	15761	155	19963
	192	16553	173	71167
	160	19073	103	98563
	64	29663		
*223	98	6311	157	4957
	82	6983	143	5197
	66	7331	131	5701
	175	8837	144	10321
	49	15629	132	11311
	58	30671	70	14389
	50	31223	48	15739

N	N'	Z'	N''	Z''
*223	46	31721	189	16759
	171	36479	177	17431
	139	43013	173	17929
	138	87041	165	18481
			101	24847
			59	30529
			51	31039
			43	31771
			100	50047
			88	53281
			84	55291
			26	65353
225	98	6359	164	9463
	62	7523	158	9967
	191	8363	142	10627
	101	12497	86	13633
	182	17351	137	89599
	68	29153		
*227	160	4937	167	4651
	144	5261	93	6619
	134	5669	87	6793
	128	5939	83	7027
	100	6299	67	7351
	88	6737	61	7591
	84	6947	176	8971
	179	8783	132	11551
	147	41213	102	12487

N	N'	Z	N''	N''
*227	41	64007	177	17911
	200	65951	163	19423
	180	69761	145	20929
			39	32233
			186	34297
			98	51169
			30	65167
			185	68863
229	132	5861	161	4969
	50	7829	135	5683
	129	11897	97	6427
	67	14753	158	10141
	84	28031	62	15121
	42	31991	48	15817
	36	32327	40	16087
	30	32603	159	20161
	163	38921	145	21121
	99	51137	133	23167
	190	67601	101	25153
	176	72707	194	33529
	136	90239	156	40903
			106	49393
			201	66037
*231	134	5807	97	6481
	50	7853	190	8521
	169	9377	106	12379
	145	10739	62	15199
	131	11801	107	24691

N	N'	Z	N''	Z''
*231	125	12197	95	26371
	53	15497		
	89	54269		
	31	65147		
	128	96263		
233	89	3413	144	2731
	142	5591	190	8599
	86	6971	168	9631
	64	7541	138	11299
	105	12473	90	13537
	188	17387	179	18181
	178	18311	159	20443
	160	20357	151	20593
	88	27617	99	25633
	82	28559	63	30271
	54	30971	55	30841
	42	32009	164	39679
	40	32237	124	49033
	173	36887	60	61417
	167	38903	32	65071
	101	51071	185	69697
	51	62591		
*235	146	5399	63	7603
	163	10103	184	8893
	149	10529	62	15289
	139	11321	181	18169
	129	12113	69	29443
	51	15683	31	32587

N	N'	Z	N''	Z''
*235	41	16091	148	42751
	166	19709		
	126	24473		
	104	25097		
	74	28751		
	54	30983		
	197	33767		
	153	41057		
	27	65381		
237	104	6323	145	5563
	98	6563	62	15319
	175	9257	187	17539
	167	9887	206	33091
	196	16943	146	44029
	182	18191		
	125	49109		
	31	65213		
*239	168	4973	99	6553
	138	5849	94	13339
	66	7517	64	15217
	188	17657	129	24439
	170	19469	85	28447
	164	20369	69	29683
	50	31649	208	33073
	36	32441	182	36739
	195	34367	156	41017
	185	35969	72	58363
	83	57287	38	64609

N	N'	Z	N''	Z''
*239	37	64763	181	73699
	204	66593		
	184	72701		
	162	81899		
241	186	4523	147	5581
	92	6833	141	5749
	189	8849	89	6967
	93	13553	98	13291
	57	15413	88	14071
	51	15791	64	15241
	188	17903	52	15727
	104	25589	205	16699
	84	28631	199	16963
	66	30203	157	20521
	42	32189	137	23563
	171	39041	71	29437
	169	39929	53	31249
	165	40829	210	33049
	77	57383	208	33223
	216	65699	202	33769
	198	68351	168	40063
			130	48889
			110	49633
			70	59263
			151	86011
*243	154	5273	103	6421
	140	5867	188	9007
	157	10313	178	9349

N	N'	Z	N''	Z''
*243	133	12149	148	11197
	65	15227	136	11971
	55	15569	101	26119
	67	60161	77	28723
	218	65687	214	32983
			130	48991
			173	77839
245	151	11003	103	6469
	192	17729	106	12781
	172	19937	104	12829
	144	22787	86	14293
	193	35201	131	24499
	187	36671	111	24841
	59	61487	43	32143
	216	65927	52	63103
			44	64063
247	68	7529	179	4759
	203	8537	56	15559
	201	8627	159	20731
	145	11423	155	21487
	75	14543	87	28549
	215	33071	77	28807
	207	33773	67	30223
	181	37379	142	47041
	105	51263	132	49009
	140	94463	112	49669

N	N'	Z'	N''	Z''
249	76	7253	95	6841
	197	8741	158	10513
	151	11243	92	13921
	206	16931	46	15973
	110	25121	143	23539
	211	33521	146	45823
	179	38783	56	62401
	133	49019	38	64783
	59	61631	32	65257
	29	65357	223	65719
			163	81967
*251	104	6551	181	4813
	98	6701	147	5737
	207	8501	162	10333
	173	10151	142	11833
	145	11681	76	14563
	141	11909	74	14713
	109	12743	199	17443
	89	14243	183	18913
	55	15641	163	20551
	53	15803	103	26431
	214	16661	99	26647
	174	20219	95	27583
	172	20399	79	28753
	156	21569	77	28933
	148	22721	39	32371
	54	31481	37	32491
	48	31799	213	66943

N	N'	Z'	N''	Z''
*251	40	32297		
	221	32987		
	205	34319		
	191	36767		
	159	42239		
	65	61379		
	218	66239		
	190	73709		
253	160	5303	179	4909
	68	7589	182	9679
	193	9173	162	10429
	139	12101	156	10993
	71	14897	148	11503
	47	15959	90	14221
	140	24077	199	17659
	219	33161	224	32917
	201	34841	52	63463
	194	72959	173	81667
	188	73757	117	98809
255	112	6317	163	5227
	71	14969	89	28621
	217	33377	77	29167
			53	31687
			208	34369
			188	37117
			38	64927
			181	78079

N	N'	Z'	N''	Z''
257	188	4691	181	4951
	108	6473	162	10657
	177	10163	118	12373
	159	10883	116	12451
	151	11399	106	13177
	139	12203	98	13693
	113	12611	165	20743
	196	18353	145	23743
	176	20411	97	27631
	166	20639	91	28513
	160	21521	53	31723
	112	25409	39	32413
	94	28097	146	47137
	92	28409	142	48193
	217	33569	68	61057
	203	35069	44	64483
	119	49391	135	98251
	115	50111		
	109	51329		
	45	64319		
*259	183	9851	101	6709
	167	10343	204	8803
	163	10691	146	11887
	113	12689	116	12517
	107	13151	110	12823
	73	14867	191	18553
	55	15773	179	20233
	188	18959	93	28351

N	N'	Z'	N''	Z''
*259	229	32933	39	32443
	177	40847	202	35809
	228	65981	192	36913
			184	38977
			82	57457
			30	65371
			157	89983
261	59	15581	200	9127
	220	16823	188	9661
	211	34721	184	9871
	194	73751	182	10009
			164	10723
			109	26107
			91	28627
			230	32971
			214	34273
			142	48649
			223	66571
*263	154	5741	163	5431
	100	6857	111	6451
	207	8819	109	6547
	203	9041	71	7573
	185	9923	214	8629
	145	12071	78	14653
	122	24677	181	20347
	120	24821	97	27901
	223	33503	93	28537
	205	35831	63	30757

N	N'	Z'	N''	Z''
*263	151	47087	59	31219
	119	49727	41	32359
			112	51217
			76	59359
			58	62473
			42	64579
			189	77569
			125	98347
265	154	5783	153	5851
	117	12569	186	9973
	77	14813	148	12007
	208	17669	169	20983
	62	30881	93	28591
	141	49037	69	30661
	83	57593	144	48673
	224	67079	82	57793
			42	64633
			181	81727
267	98	7001	79	7333
	83	14423	172	10357
	155	46337	74	14983
	61	62081	70	15307
	142	98081	173	20599
			151	23677
			71	30469
			236	32941
			224	33757
			64	61507

N	N'	Z	N''	Z''
269	104	6761	165	5527
	113	12959	75	7477
	71	15287	210	8941
	218	17327	156	11617
	217	34781	78	14821
	175	41081	195	19009
	119	50207	94	57223
	37	65063	46	64489
	234	66173	183	81853
*271	196	4787	188	10099
	112	6569	118	12721
	80	7349	84	14437
	221	8597	223	17029
	209	9059	207	18313
	189	10007	175	20641
	187	10139	173	20959
	171	10631	157	23293
	111	13241	97	28411
	176	20549	95	28603
	172	21023	59	31357
	170	21491	228	33679
	152	23873	200	37057
	126	24659		
	110	26597		
	104	27143		
	64	30839		
	231	33329		
	215	34877		

N	N'	Z	N''	Z''
*271	201	36899		
	151	48119		
	121	50159		
	51	63737		
	238	66029		
273	100	7013	101	6949
	215	8807	80	14737
	199	9461	209	18289
	193	9839	187	20407
	107	13367	155	23581
	85	14411	83	29059
	223	34313	236	33199
	71	61343		
	47	64451		
	194	77951		
275	171	10781	226	8539
	234	16691	162	11383
	212	18143	102	13873
	114	26177	179	20533
	96	28619	151	24223
	82	29201	228	33811
	87	57467	222	34759
	83	58337	128	49297
			237	66499
			223	69247
*277	160	5843	171	5479
	105	13763	161	5779
	216	17909	218	8821

N	N'	Z	N''	Z''
*277	202	18911	174	10729
	170	22079	122	12601
	168	22481	84	14557
	156	23801	76	15091
	44	32309	233	16843
	241	33083	107	27073
	232	67559	87	28771
	228	68099	75	30241
	210	73679	65	30853
			204	37123
			239	66463
			147	98143
			131	98377
279	173	10847	176	10639
	107	13577	106	13729
	83	14621	221	17467
	65	15461	175	21493
	74	30497	169	22501
	163	46073	151	24391
	115	52733	247	65839
	202	76289	149	98041
*281	116	6581	109	6733
	217	9029	162	11719
	159	11831	181	20719
	101	14159	175	21517
	220	17789	167	22549
	100	28433	228	34591

N	N'	Z	N''	Z''
*281	86	28961	200	38923
	193	40709	192	40849
	87	57791	60	62983
	130	98801	58	63439
			213	73581
			197	79867
			157	96001
283	221	8933	175	5449
	219	8999	208	9319
	205	9533	156	12073
	201	9749	88	14419
	127	12503	86	14533
	107	13799	82	14827
	61	15731	62	15643
	172	22433	234	33889
	241	33347	229	69379
	231	34337	225	69661
	246	66179	203	77761
	238	67391		
285	179	10733	202	9787
	101	14249	181	21001
	154	24419	131	24733
	124	25469	176	43777
	104	28151	68	61561
	91	57389	34	65323
	53	63809		
*287	178	5417	181	5323

N	N'	Z	N''	Z''
*287	176	5531	109	6871
	227	8747	169	22777
	225	8861	167	23071
	121	12923	129	24967
	61	15767	117	26557
	212	18503	89	28867
	206	19427	83	29671
	124	25577	75	30649
	237	33923	248	33211
	187	41039	228	34843
	183	41969	50	64381
	107	55313	253	65929
	101	57119	247	66541
289	80	7499	209	4789
	205	9767	162	11953
	63	15671	179	21757
	244	16787	155	24469
	176	22397	43	32467
	134	24683	250	33181
	132	24809	214	36931
	122	25793	198	40801
	90	28817	186	41467
	229	34913	60	63391
	101	57221	52	64033
	91	57503	259	65701
	69	61553	219	73693
	39	65123	183	84481
	224	71807		

N	N'	Z	N''	Z'
291	107	13967	178	11131
	89	14489	82	14869
	230	17519	68	15451
	44	32423	247	16729
	221	36809	205	19777
	167	47093	190	41011
	115	53267	134	49417
	244	67523	80	60289
			64	62497
			169	92671
293	170	5801	81	7507
	89	14537	204	10039
	87	14639	241	17041
	79	15161	231	17569
	180	22031	223	18379
	132	24953	103	28573
	128	25349	200	40879
	70	30773	184	42943
	62	31583	106	56383
	259	32939	56	63601
	237	34703	239	68737
	225	36383	191	82051
	63	62969		
	43	64997		
	158	97787		
	156	98057		
*295	108	7019	183	5413
	171	11633	226	9133

N	N'	Z	N''	Z'
*295	69	15443	162	12109
	244	16937	78	15271
	242	17123	251	16693
	216	18719	89	29173
	206	19979	53	32029
	116	26681	47	32299
	56	31817	232	35323
	203	40697	174	45439
	63	62981	257	66109
	57	63527	233	70141
	138	98543	201	81799
297	215	9539	214	9649
	205	10133	134	12457
	163	12119	68	15511
	230	17981	64	15733
	164	24113	241	17293
	122	26399	161	24379
	56	31859	218	37369
	203	40841	263	65827
	61	63467	257	66337
	266	65717		
*299	215	9689	183	5557
	193	10331	186	10771
	127	12821	122	13267
	125	13043	84	14887
	111	13859	237	17449
	246	17033	131	25339
	220	18593	105	28579

N	N'	Z	N''	Z'
*299	212	19553	87	29599
	168	23813	79	30559
	80	30449	53	32119
	175	45953	206	40639
	159	49043	192	41479
	95	57413	140	49261
	232	71711	48	64567
			233	71671
			203	81883
			141	98419
301	187	10799	115	6823
	183	11213	88	14767
	127	12911	221	18679
	216	19433	256	33403
	253	33713	192	41953
	243	34757	190	42499
	195	41201	96	57397
	141	49253	48	64591
	107	56897	255	67057
	45	64901	171	94273
*303	116	6803	257	16741
	223	9293	247	17209
	137	12437	239	17551
	115	13757	191	21313
	232	18287	185	22279
	64	31601	139	24763
	46	32411	95	28789
	251	33827	170	47743

N	N'	Z	N''	Z'
*303	256	67103	263	66271
	250	67967	245	69439
			143	98407
305	128	6491	236	9001
	239	8867	234	9109
	221	9521	116	13711
	187	11069	181	22567
	137	12491	173	23599
	93	14519	73	30763
	71	15467	72	61681
	238	17891	163	98017
	224	18671		
	213	39953		
	119	53633		
	41	65141		
	266	66071		
*307	178	5813	196	10477
	177	11717	120	13381
	250	17231	110	14197
	166	24413	217	19681
	58	31847	135	25219
	199	41183	109	28477
	195	41999	81	30577
	139	49697	67	31327
	121	53309	262	33301
	45	65003	258	33721
	270	65993	182	45181
	224	75521	66	62971

N	N'	Z	N''	Z'
*307	212	81023	223	75781
	142	98807		
309	239	9011	242	8887
	181	11471	226	9391
	175	11813	134	12763
	113	14051	223	19207
	182	22769	250	34693
	245	34883	166	48907
	229	36923	164	49069
	227	37313	140	49681
	179	46589	80	61381
	169	48623	74	61519
	71	61967	64	63421
	59	63611	40	65239
	266	66533	263	66751
	194	85889	259	67537
*311	196	5333	240	9049
	192	5477	184	11317
	227	9437	182	11491
	127	13259	176	11827
	71	15527	84	15139
	246	17489	65	31663
	244	17681	214	40699
	172	24083	98	57487
	185	45083	96	57847
	91	59009	261	67489
	73	61703	241	71809
	59	63647	217	79999

N	N'	Z	N''	Z''
*311	258	67607	177	94219
	254	68639		
313	227	9497	121	6763
	181	11657	222	9769
	93	14627	220	9949
	254	17291	138	12583
	242	18041	132	12919
	218	20063	197	21379
	172	24197	191	22303
	122	26849	115	27967
	116	27773	97	28879
	56	32057	258	34033
	217	40433	238	36793
	127	53201	232	36919
	75	61511	228	37879
	69	62477	112	56827
	55	64271	277	65851
	214	81671	273	66067
	184	91139	263	67453
	180	94079	169	97729
			165	98227
315	173	12107	92	14779
	214	81869	88	14929
	184	92153	71	31183
			268	33391
*317	186	5717	131	6571
	203	10427	250	8779
	177	12011	220	10093

N	N'	Z	N''	Z''
*317	139	12659	194	11119
	123	13457	184	11587
	67	15797	130	13219
	242	18329	120	13789
	224	19697	114	14149
	172	24359	84	15259
	142	25031	223	19843
	96	29123	221	20029
	87	60353	175	24121
	51	64553	145	24793
	258	68993	266	33751
			246	35851
			230	37951
			192	45007
			241	73597
			171	97777
319	233	9413	118	13903
	179	11933	263	17011
	188	22751	225	19717
	134	25919	141	25117
	56	32141	125	26737
	271	33413	123	27127
	171	48953	260	34429
	61	63599	222	40189
	43	65129	206	41281
	250	70913	48	64891
			259	69127
			249	71551
			197	87553

N	N'	Z	N''	Z''
321	203	10607	140	12697
	133	13103	116	14107
	119	13883	98	14503
	254	17477	70	15667
	224	19997	101	28759
	220	20393	89	29959
	206	20753	59	31981
	196	22277	190	45247
	182	23609		
	86	30431		
	56	32183		
	50	32363		
	197	44159		
	191	45077		
	49	64781		
	238	73823		
	230	77813		
	194	90089		
*323	250	17987	142	12613
	206	20981	126	13411
	196	22469	116	14173
	188	23057	98	14551
	132	26501	94	14797
	90	29921	253	17761
	70	31391	233	19231
	275	33359	191	22651
	199	44027	127	26683
	286	65831	115	28429

N	N'	Z	N''	Z''
*323			67	31699
			61	31849
			124	54277
			112	57301
			74	62017
			62	63559
			56	64399
			281	66169
			201	86143
325	189	11549	254	8923
	119	14033	184	11821
	252	17939	124	13681
	146	24977	231	19483
	94	29669	137	25849
	281	33191	121	27673
	229	39551	236	37897
	183	47609	48	64969
	99	58109	227	79903
	178	97151		
327	209	10457	95	29629
	137	13007	91	29947
	101	57839	68	63367
	71	62723	62	63649
	59	64013	293	65707
	214	81971	205	85999
			181	96289
*329	211	10391	122	13879
	89	15131	279	16747

N	N'	Z	N''	Z''
*329	87	15269	229	20089
	270	17117	145	25183
	232	19727	127	27103
	102	28871	125	27457
	100	29063	57	32203
	78	30809	278	33547
	205	43019	244	36901
	187	47129	178	48799
	129	53441	130	53269
	85	61403	120	56311
			62	63727
			149	99391
331	203	11057	256	9013
	121	14057	242	9403
	119	14153	202	11149
	89	15173	231	19993
	230	20129	183	24091
	86	30677	143	25579
	50	32429	101	29023
	279	33647	97	29473
	243	37361	226	40867
	205	43517	214	41221
	187	47363	186	47623
	79	61559	126	54787
	288	66161	88	60943
	274	67709	213	82939
	258	71663		
	240	76031		
	228	81281		

N	N'	Z'	N''	Z''
333	241	9551	118	14251
	203	11171	88	15277
	127	13691	239	19429
	236	19577	209	21481
	230	20249	197	22639
	136	26513	202	44959
	94	29723	116	57271
	203	33053	275	67843
	89	60923		
335	243	9491	123	6997
	241	9677	196	11497
	147	12647	142	12841
	264	17597	259	18043
	262	17807	257	18223
	124	27779	181	24421
	291	33113	151	24943
	131	53507	258	36343
	77	61961	248	36943
	292	66083	204	44797
	254	73673	118	57097
	228	81839	64	63607
			277	67777
			263	70663
*337	208	5483	209	5419
	128	6869	246	9433
	243	9629	148	12637
	237	9929	94	14947
	189	11939	261	17977

N	N'	Z'	N''	Z''
*337	242	19421	231	20389
	212	21407	149	25111
	138	26489	105	28813
	62	31973	73	31393
	279	33851	286	33469
	273	34673	154	49603
	197	46049	58	64453
	185	48449	233	80911
	151	50051	195	93187
	89	61121		
	268	69653		
	256	73607		
	230	81761		
	220	82031		
339	260	18233	200	11353
	196	23327	190	11959
	293	33203	142	13009
	269	34871	74	15661
	247	37871	275	17299
	278	68543	241	19477
			211	21529
			140	52609
			80	61687
			46	65101
			263	71713
			215	84223
*341	237	10061	246	9613
	201	11369	208	11161

N	N'	Z'	N''	Z''
*341	141	13127	100	14731
	280	17093	247	19069
	278	17207	61	32059
	238	19991	260	36721
	218	20897	184	48883
	96	29753	126	55681
	72	31607		
	295	33179		
	193	47297		
	139	53117		
	81	61583		
	45	65171		
	290	66809		
	262	72719		
*343	278	17321	131	6829
	186	24371	221	20707
	142	26237	209	22369
	134	26783	157	24781
	94	30197	155	24889
	64	31883	95	29983
	269	35393	146	51229
	195	47123	72	63247
	99	59369		
	97	59417		
	93	60449		
	296	66449		
	270	70529		
	254	73859		

N	N'	Z'	N''	Z''
*343	236	81401		
	204	90173		
	190	96269		
345	193	11981	266	9067
	128	27743	214	10831
	124	28319	121	28597
	62	32027	122	57073
	223	41231	52	64879
	187	48761	269	71647
	107	57731		
	83	61493		
	286	67631		
	278	69593		
	244	78593		
	242	79841		
	182	98213		
*347	255	9323	246	9781
	196	23687	220	10531
	122	28571	283	17191
	98	29717	271	17863
	60	32213	239	20323
	251	38273	129	27697
	155	50147	105	29137
	121	57251	286	34039
	67	63533	256	37087
	47	65111	192	48157
	292	67343	156	49927

N	N'	Z'	N''	Z''
*347	164	98387	152	50683
			183	98221
349	243	10037	146	13033
	204	23027	144	13171
	158	24851	287	17053
	152	25439	151	25561
	148	25667	296	33487
	142	26573	282	34747
	124	28463	46	65179
	102	29537	269	72577
	62	32099	227	82171
	239	40823		
	79	62273		
	53	64817		
	298	66587		
	268	72767		
351	215	11087	80	15541
	197	11927	203	23311
	296	16811	149	25657
	224	20963	83	30829
	152	25541	77	31267
	148	25841	55	32341
	134	27329	278	34939
	161	49529	206	45697
	284	69383	46	65203
			241	81439
			223	83983

N	N'	Z'	N''	Z''
353	245	10091	222	10711
	149	12899	204	11677
	97	15077	271	18199
	286	17333	243	20341
	138	26759	195	24103
	80	31121	292	33871
	301	33317	272	36319
	291	34031	242	40771
	61	64433	164	49339
	274	71693	56	64627
	228	82559	231	81973
			217	88069
355	251	9833	274	9043
	219	10979	154	12757
	99	14951	136	13597
	272	18257	221	21523
	204	23531	159	25033
	192	24407	151	25621
	156	25247	298	33739
	96	30269	162	49639
	78	31259		
	66	31907		
	63	64223		
	294	67679		
	248	79889		
	216	89603		
*357	131	14009	226	10567
	202	23663	304	33349

N	N'	Z'	N''	Z''
*357	104	29573	220	44017
	76	31517	200	47869
	271	36821	128	56767
	191	48989	86	61483
	137	54287	74	63409
	316	65843	265	73783
	296	67619	233	82039
	262	74747	199	96223
	260	75767		
359	219	11159	254	9817
	137	13679	140	13417
	105	14759	76	15787
	208	23291	291	17317
	150	26099	233	20563
	136	27551	223	21601
	64	32069	213	22573
	297	33863	209	23053
	273	36791	207	23431
	245	40883	111	28909
	149	52289	107	29209
	67	63761	306	33331
	312	66191	292	34543
			250	40129
			198	48259
			96	60913
*361	261	9587	208	11731
	213	11351	277	18211
	151	13037	251	20101

N	N'	Z'	N''	Z''
*361	220	22367	211	23029
	212	22817	97	30367
	84	30941	284	35311
	64	32117	280	35869
	255	39419	260	38653
	221	44417	256	39103
	101	59651	156	51151
	99	60383	140	53887
	75	63377	126	57241
	55	64793	96	60937
	49	65099	293	69151
	308	66617	225	86029
	278	72689		
363	265	9431	232	10459
	203	11987	160	12589
	268	18521	233	20749
	250	20327	95	30631
	158	25457	166	49597
	130	28403	164	49789
	293	34763	70	63541
	139	54401	269	73849
	284	71171	247	81847
	266	74759		
*365	159	12713	206	11863
	222	22409	134	13999
	201	48353	98	15193
	163	50153	297	17257
	109	58379	262	38851

N	N'	Z'	N''	Z''
*365	107	58943		
	103	59453		
	318	66107		
	168	98849		
367	255	10067	268	9421
	227	10889	266	9511
	161	12653	206	11923
	155	12893	140	13687
	109	14633	283	18127
	280	18341	235	20857
	228	21599	223	22447
	142	27011	205	24007
	114	28859	199	24373
	233	42017	143	26863
	149	53189	135	27919
	133	56333	83	31153
	129	57149	79	31477
	115	57587	77	31627
			304	33829
			302	34057
			150	52999
			86	61729
			291	69763
			237	82561
*369	143	13487	269	18919
	236	20879	265	19417
	206	24029	209	23623
	110	29207	167	24859

N	N'	Z'	N''	Z''
*369	313	33479	107	29641
	305	33911	98	60961
	257	40127	299	69313
	161	50753	281	73477
	155	51839		
	131	56957		
	77	63353		
	260	79103		
	230	86027		
371	146	26669	267	19333
	132	28439	225	22483
	104	29819	97	30643
	88	30803	87	30859
	71	63587	79	31513
	258	80387	228	44041
			172	49369
			291	70783
			241	82183
*373	273	9371	158	12853
	269	9623	154	13159
	229	11027	295	17497
	109	14771	289	17959
	262	19919	211	23671
	110	29423	209	23929
	84	31193	135	28183
	82	31253	99	30493
	313	33749	79	31567
	198	98129	242	41149

N	N'	Z'	N''	Z''
*373	176	98411	234	42979
	170	99317	230	43969
			325	66103
			309	67651
			231	87037
			175	98479
375	103	15083	244	41077
	236	21383	242	41341
	232	21767	172	49531
	116	28901	98	61297
	287	36599	323	66523
	271	38393		
	229	44549		
	221	45503		
	133	56963		
	332	65837		
377	144	6827	112	14629
	219	11579	231	22147
	159	12917	85	31177
	147	13421	320	33457
	242	20747	276	37441
	148	26693	268	38959
	321	33353	222	45553
	291	36161	86	62143
	287	36749	70	63841
	223	45281	56	64951
	115	58049	277	74623
	170	99713	213	94723

N	N'	Z'	N''	Z''
379	231	11177	268	9829
	147	13469	148	13399
	115	14549	309	17203
	111	14747	275	18973
	266	19949	215	23593
	222	22943	209	24133
	208	24239	161	25639
	174	24749	159	25981
	307	34679	157	26209
	235	43391	294	35863
	107	59441	280	36997
	322	66821	262	40459
	246	82241	100	61153
	244	82913	50	65173
			335	65881
			213	95239
381	215	11867	146	13591
	107	14891	161	25759
	244	20849	145	27397
	331	33107	71	31891
	233	44537	302	34897
	232	89597	80	63241
			179	98443
*383	161	12941	238	10789
	157	13229	315	17047
	264	20297	299	17881
	216	23747	241	21391
	172	24989	89	30949

N	N'	Z	N''	Z''
*383	138	28283	322	33703
	114	29231	300	35521
	84	31271	116	58243
	80	31667	104	60427
	323	33617	295	72673
	215	47681	235	88321
	101	61169	181	98389
	79	63443		
	61	64601		
	330	66509		
	302	70271		
	224	92033		
385	314	17189	71	31963
	282	18701	272	39409
	248	20717	208	48847
	244	21089	92	61543
	218	23633	267	80833
	212	24179	247	83071
	106	30113		
	82	31511		
	293	36761		
	334	66293		
	332	66491		
	284	74177		
	274	77849		
*387	227	11447	142	14011
	212	24281	269	20113
	241	43037	169	25357

N	N'	Z'	N''	Z''
*387	173	50129	115	29251
	71	63977	316	34327
	244	85247	265	81649
389	163	13001	321	16987
	151	13451	305	17713
	105	15149	287	18541
	300	18119	271	20047
	298	18269	239	22027
	270	20177	217	24043
	164	25847	89	31033
	148	27407	276	39043
	88	31151	252	41203
	275	39359	230	45307
	181	49307	220	47353
	179	49433	210	48871
	169	50951	122	57571
	330	66947	110	59419
	326	67547	104	60919
	178	99137	58	64921
			309	69691
			229	91129
*391	145	13877	282	9619
	109	14957	108	15031
	232	22571	241	22003
	148	27581	225	23497
	116	29297	143	28099
	70	32051	91	30937
	113	59357	222	47161

N	N'	Z'	N''	Z''
*391	89	62201	212	48751
	81	63419	297	73609
	61	64709		
	316	69473		
393	287	9419	166	12889
	176	25037	152	13513
	311	34949	161	26479
	233	45179	256	41047
	215	48611	254	41233
	73	63839	244	43261
	322	68597	170	51133
	238	90017		
	220	95747		
*395	153	13499	233	22717
	326	16979	231	23011
	274	20201	69	32173
	272	20333	232	45631
	228	23417	273	80929
	224	23603	269	81817
	166	25889		
	164	26141		
	309	35591		
	281	38933		
	271	40751		
	227	47057		
	163	52673		
	87	62483		
	312	70139		

N	N'	Z	N''	Z'
*395	258	82013		
	252	83903		
	234	90371		
	184	98573		
397	281	9803	246	10867
	251	10613	242	11173
	245	10973	146	13963
	151	13709	287	19183
	292	18617	235	22621
	256	20681	173	25411
	252	21017	93	30871
	224	23741	83	31657
	249	42989	326	34183
	167	51719	324	34351
	346	66089	280	39439
	254	83459	274	40543
	244	88079	126	57427
			60	64849
			233	91393
*399	292	18749	143	28387
	236	22643	107	30403
	220	24137	71	32089
	337	33563	124	57697
	325	34439		
	185	49367		
	139	57269		
	340	66683		

N	N'	Z	N''	Z'
*399	338	67061		
	286	77801		
401	314	17783	282	9931
	220	24251	246	11047
	170	25679	317	17509
	152	27527	231	23473
	144	28349	225	23869
	84	31643	177	25147
	235	45827	153	27361
	215	48947	238	45127
	91	62213		
	330	68111		
	324	69497		
403	255	10589	284	9883
	249	10937	280	10069
	153	13751	254	10663
	149	13913	226	11941
	111	15053	315	17839
	178	25127	311	18097
	158	26723	281	20023
	122	29129	276	40819
	118	29501	238	45319
	327	34589	86	62989
	289	38891	64	64621
			189	98491
*405	182	24971	178	12619
	86	31547	299	18523
	287	39161	251	21727

N	N'	Z	N''	Z'
*405	239	45377	223	24181
	167	52721	308	36787
	91	62417	224	48163
	73	64019	293	76543
	328	69371	263	82207
407	239	11411	288	9811
	235	11699	315	17989
	171	12953	289	19507
	322	17483	336	33937
	151	55487	182	50119
	145	56843	166	53089
	73	64067	128	57529
			86	63199
			78	63577
			191	98467
*409	121	14669	288	9907
	264	20663	333	17239
	254	21617	289	19699
	178	25463	231	23689
	120	29453	171	26083
	110	30341	107	30637
	315	36341	228	48109
	161	53327	170	52237
	65	64613	166	53197
	61	64919	124	58237
	324	69857	321	70687
	298	75743	297	75793

N	N'	Z	N''	Z'
*409			241	91009
			219	97927
411	157	13649	227	24109
	152	27809	304	36979
	301	37409	220	48973
	241	45821	146	56929
	191	49331	283	81343
	71	64439		
	362	65957		
	260	84737		
413	255	10949	302	9397
	157	13721	264	10453
	121	14741	158	13627
	320	17957	339	17107
	232	23819	173	26017
	162	26717	151	28111
	337	34361	298	38431
	335	34607	152	55813
	269	41051	78	63697
	261	42491	305	74047
	125	58271		
	109	61151		
	186	99833		
*415	261	10709	254	11113
	243	11483	172	13093
	161	13463	152	14029
	232	23993	116	14923
	228	24203	286	40609

N	N'	Z	N''	Z'
*415	162	26813	112	60607
	114	30161	359	66361
	77	63857	307	73951
	358	66467	291	79861
	342	68087	251	90073
	328	70079		
417	175	12983	242	11593
	304	18917	154	13933
	254	22391	112	15187
	182	25373	323	17971
	94	31181	173	26161
	337	34739	328	35317
	329	35081	170	53113
	247	45191	164	53359
	245	45599	355	66721
	89	62987	343	68161
	352	67169	223	97987
	286	81533	191	99079
	194	98621		
*419	265	10601	242	11689
	155	13901	257	22111
	117	14939	245	23017
	344	17099	151	28279
	330	17609	113	30319
	268	20873	89	31543
	266	21011	320	36637
	172	26417	244	46093
	124	29327	238	47143

N	N'	Z'	N''	Z''
*419	341	34499	236	47599
	259	43649	224	49003
	185	50273	122	59167
	123	58889	309	74209
	99	61667		
	87	63389		
	79	63719		
	232	96281		
421	272	20627	333	17491
	244	23279	329	17851
	178	25733	323	18217
	355	33629	299	19501
	179	51257	231	24247
	173	52769	177	25873
	364	66383	75	32077
	326	71933	236	47809
	312	73847	166	53299
	292	80831	297	78853
	226	97841	275	82009
			197	98533
423	326	18149	233	24169
	292	20261	344	34549
	295	40031	236	48079
	289	40853	230	48661
	263	43133	166	53407
	251	45137	160	55171
	374	65867	365	66457
			361	66601
			299	78721

N	N'	Z'	N''	Z''
425	164	27107	268	10651
	156	28001	312	37363
	293	40583	264	43201
	251	45317	166	53569
	191	49937	76	64123
	173	53129	66	64747
	161	55103		
	149	57203		
	228	97859		
	192	99581		
427	274	20759	264	10909
	250	22973	335	17683
	158	27791	307	19387
	118	30047	153	28393
	92	31469	270	42433
	331	35897	268	42961
	293	40739	232	48679
	179	51971	198	49363
	159	55343	353	67807
	157	55871	345	69499
	276	82463	251	91141
			235	96763
*429	272	21059	251	22993
	353	34061	155	28219
	329	36473	97	31159
	181	51647	304	39163
	175	53087	232	48817
	125	59141	188	50671

N	N'	Z'	N''	Z''
*429	280	82037	128	58393
	266	86783	379	65899
431	303	9941	311	19213
	318	18539	271	21433
	312	19079	267	21751
	268	21563	243	23761
	252	23021	155	28297
	190	25169	340	35089
	188	25391	300	40177
	156	28181	100	61927
	341	34961	339	70639
	305	39233		
	251	46091		
	159	55793		
	65	64871		
	332	72671		
	298	80909		
	250	92927		
*433	265	11117	254	11443
	314	19001	250	11701
	252	23063	128	14683
	122	29741	335	18013
	98	31139	243	23857
	365	33641	350	34729
	357	34019	312	38593
	351	34631	298	40693
	297	40763	196	49711
	279	41411	194	50053

N	N'	Z'	N''	Z''
*433	237	48593	156	56569
	127	58913	154	56893
	318	74687	92	63073
	296	81677	68	64663
	262	90053	363	67531
	256	90617	253	92143
435	278	20921	359	16981
	154	28517	122	59617
	353	34583	94	62851
	91	63299	323	73771
437	181	13109	270	10939
	129	14699	268	11059
	320	18713	256	11467
	244	24023	327	18121
	162	27767	321	18661
	130	29243	317	18979
	116	30491	315	19267
	343	35339	314	38791
	305	39983	302	40471
	245	47807	258	45343
	185	51449	192	50497
	123	59513	132	58321
	83	63629	303	80863
	65	64937		
	274	85991		
*439	268	22283	339	18061
	134	29009	305	20143
	116	30557	303	20269

N	N'	Z'	N''	Z''
*439	100	31091	273	21559
	315	38873	167	27409
	285	41117	81	31957
	237	48869	312	38971
	181	52727	280	41959
	131	58391	204	49333
	127	59333	170	54013
	99	62351	114	61363
	372	67043	84	63589
			309	79357
			249	94399
			201	99103
441	167	13781	272	10987
	310	19889	173	26713
	260	22727	121	30181
	164	27689	304	40591
	130	29429	284	41443
	199	49823	242	48481
	137	57713		
	374	66977		
	370	67511		
	302	81647		
	286	82307		
*443	173	13397	312	9901
	342	18077	274	10891
	314	19571	186	12967
	256	23357	199	24979
	182	26393	193	25423

N	N'	Z	N''	Z'
*443	134	29147	129	29581
	351	34919	374	33577
	165	55331	364	34171
	163	55823	350	35059
	157	56993	324	37567
	137	57809	172	53791
	119	60737	130	58897
	352	69677	122	60223
	318	77699	243	97021
	258	92177	241	97303
	252	94229		
	208	98459		
	206	98627		
445	123	15017	341	18253
	132	29303	259	23059
	287	41351	169	27487
	249	47903	348	35617
	97	62687	246	48187
	83	63773	168	55249
	338	73613	84	63709
	316	78017	78	64303
	262	91121	351	70207
			319	77797
*447	322	19319	329	18583
	314	19913	251	23833
	260	23087	139	28837
	98	31277	125	29833
	277	43457	350	35569

N	N'	Z	N''	Z'
*447	271	44987	340	36781
	245	48527	160	56821
	364	68927	377	67231
	292	82007	307	81421
	290	82301		
	266	90149		
	250	95873		
449	324	19211	284	10597
	288	20771	369	17077
	282	21467	351	17827
	254	23669	325	19087
	248	24107	285	21019
	196	25367	203	24877
	176	26729	308	40759
	172	27197	70	64717
	379	33587	329	74761
	263	45887	241	97849
	191	51239		
	356	69767		
	312	80513		
	206	99041		
*451	324	19403	333	18517
	186	26357	277	22039
	367	34511	189	25999
	355	35267	177	26701
	349	35999	105	30931
	249	48239	288	41887
	163	56417	84	63793

N	N'	Z	N''	Z'
*451	370	68483	379	67447
	350	71699		
	278	88001		
	206	99233		
453	187	13163	326	38671
	268	22637	134	58687
	107	61673	104	61981
	71	64679	329	75787
	370	68633	277	89083
	334	74231		
	274	90071		
455	264	23201	282	10861
	373	34283	192	12907
	291	41759	188	13147
	283	43103	349	18229
	388	66629	279	22129
	346	73583	191	25951
	296	82163	81	32083
	292	83009	198	50929
			172	55201
			162	56857
			269	90619
			209	98947
*457	265	11621	323	19687
	169	13907	278	44809
	324	19559	252	48271
	268	22907	106	61933
	162	28493	395	66403

N	N'	Z	N''	Z'
*457	140	28949		
	321	39839		
	319	39971		
	293	41597		
	205	50033		
	129	59447		
	107	61757		
	386	67121		
	358	71039		
	258	94847		
	214	98519		
459	332	19139	331	19249
	140	29027	283	21991
	211	49463	271	22669
	175	54779	253	24151
	161	57191	179	26833
	356	71741	127	30013
			298	41113
			160	57259
			337	74719
*461	356	18059	363	17623
	286	21647	321	20071
	282	22259	283	22063
	180	26801	189	26449
	136	29411	179	26893
	108	30869	127	30097
	357	35963	352	36643
	253	48479	320	40351

N	N'	Z	N''	Z'
*461	249	48857	298	41227
	203	50417	260	47491
	181	53381	134	59233
	163	57077	124	60679
	145	57527	82	64189
	85	63929	301	82021
	406	65963		
	372	69539		
	322	79901		
	274	90191		
463	287	10853	194	13003
	179	13523	176	13723
	171	13931	128	15013
	260	23831	261	23773
	130	29789	203	25321
	359	35879	127	30187
	325	39887	366	35023
	319	40637	294	42013
	267	46853	212	49549
	163	57107	190	52861
	97	63281	144	57667
	378	68669	138	58417
	258	96233	106	62047
	256	96353	381	68113
			255	96703
*465	298	20807	128	15061
	262	23789	392	33637
	106	31079	344	36973

N	N'	Z	N''	Z'
*465	293	42689	214	49429
	269	46601	209	99871
	263	47351		
	121	61331		
	73	64667		
	394	67049		
	302	82193		
	256	96737		
467	271	11597	338	9547
	198	25673	274	11437
	211	49787	196	12979
	169	56369	177	27529
	143	57917	380	34513
	135	59351	362	35899
	404	66359	332	38953
	392	67481	328	39841
			324	40387
			190	53149
			130	59887
			82	64279
			393	67339
			369	70111
			345	73999
			341	75391
*469	184	26711	338	9643
	345	37217	290	10903
	333	39023	285	22441
	289	44021	263	23887

N	N'	Z	N''	Z'
*469	173	55799	107	31069
	111	61637	332	39199
	87	63863	324	40483
	396	67139	284	45013
			146	57649
			136	59281
			122	61339
			82	64327
			279	90163
			277	90631
			255	97327
471	178	27611	299	21013
	170	28229	263	24019
	325	40559	400	33427
	199	51521	344	37663
	89	63689	260	48247
	71	64877	110	61819
	410	66137	100	63097
	332	78977	221	98473
*473	181	13619	292	10957
	280	22619	196	13099
	174	27917	175	27793
	369	35801	171	28201
	257	48677	125	30553
	217	49523	370	35593
	145	57881	328	40423
	113	61547	324	40813
	107	62303	256	48781

N	N'	Z	N''	Z'
*473	342	76673	216	49627
	278	91151	180	54799
	274	93179	124	61231
			409	66373
			359	73651
			309	82003
			267	94849
475	374	17627	291	22159
	364	18251	269	23629
	206	25523	107	31189
	196	26339	392	33967
	184	26993	308	41161
	401	33581	288	44983
	337	39047	276	46273
	217	49613	411	66343
	167	57143	273	94111
	127	60917	261	96799
	103	62753		
	214	99809		
477	214	25013	335	19927
	196	26387	175	28027
	176	27893	131	30169
	104	31337	392	34159
	406	66749	388	34537
	326	81689	268	47629
	296	86531	182	54721
	224	98453	293	88129
			289	89989

N	N'	Z	N''	Z'
479	334	20021	333	20107
	294	22073	303	21187
	292	22343	291	22453
	276	23459	269	23827
	188	26699	203	25693
	186	26891	201	25969
	132	30089	145	29131
	112	30893	404	33613
	377	35279	344	38833
	371	35951	280	46051
	345	38651	262	48619
	307	41603	220	49477
	199	52253	202	51679
	181	55229	198	52543
	135	59471	172	56701
	83	64403	168	57193
	284	90353	148	57829
	282	91127	375	71161
			279	92173
*481	354	18587	339	19759
	134	29927	269	23971
	367	36677	217	24919
	177	55817	211	25309
	173	56591	109	31123
	408	66959	105	31321
	258	97871	406	33589
			352	37501
			304	42487

N	N'	Z	N''	Z'
*481			114	61627
			277	93949
			223	98737
483	313	41189	355	18637
	311	41453	283	22921
	271	47741	370	36541
	265	48497	262	48733
	179	55547	218	49807
	143	58631	110	62191
	101	63311		
485	284	22961	188	13477
	272	23879	299	21997
	206	25643	279	23509
	148	29021	204	51721
	409	33623	126	61357
	401	33893	86	64231
	359	36947	413	66697
	267	48371	223	98911
	398	68477		
	376	71777		
	274	94727		
*487	338	20183	309	21031
	202	26171	299	22051
	176	28211	145	29221
	136	29873	111	31081
	134	30137	316	41143
	283	46271	264	48757
	223	49547	148	58129

N	N'	Z	N''	Z'
*487	151	57737	317	82129
	135	59921	295	90001
	394	69389	289	90271
	344	78839	273	95617
489	112	31013	179	28081
	361	37049	274	47857
	355	37907	208	51241
	317	41177	134	60397
	277	47237	116	61603
	173	57059	413	67129
	284	92669	343	79843
491	208	25703	285	23173
	174	28499	145	29383
	385	35423	380	35983
	309	42767	376	36559
	177	56543	314	41761
	93	63671	204	52249
	318	82421	142	59341
	282	94151	132	60703
	230	98507	88	64081
			381	71707
			297	90067
			261	98101
*493	181	13997	302	11083
	278	23753	349	19597
	385	35729	311	21277
	375	36779	133	30307
	299	44963	388	35281

N	N'	Z	N''	Z'
*493	147	58403	382	35911
	143	59273	364	37039
	131	60953	346	39901
	344	79997	280	47149
			307	86077
			301	89119
*495	302	22307	203	26437
	184	27701	191	27109
	428	66377	272	48397
	422	66653	92	63823
	386	71633		
497	206	26183	345	20173
	204	26423	209	25867
	152	28979	390	35353
	134	30323	286	46993
	379	36713	194	53629
	353	38993	156	57559
	349	39869	309	86269
	317	41957	295	90247
	269	48779	267	97813
	215	51131		
	193	53777		
	139	59663		
	137	60167		
	292	91199		
*499	191	13613	391	17737
	206	26321	319	20899
	106	31541	185	27763

N	N'	Z	N''	Z'
*499	353	39293	135	30259
	279	47969	412	33931
	211	51461	382	36583
	155	57719	346	40429
	87	64373	146	59011
	352	78857	118	61657
	350	79847	355	77863
	342	81569		
	310	86399		
	276	96323		
	232	98639		
501	226	24923	275	24229
	295	45557	370	37021
	277	48179	346	40507
	131	61283	320	41863
	316	85121	206	52747
	266	98123	152	58207
			425	66949
*503	317	10667	192	13669
	208	26249	307	22291
	196	26861	227	24907
	371	37097	219	25447
	361	38861	213	25717
	321	41927	195	26947
	297	45329	368	37507
	231	49481	318	42463
	113	62423	272	48823
	105	63347	182	56377

N	N'	Z	N''	Z'
*503	79	64661	152	58309
	270	97847	142	59443
	228	99347	409	69109
			383	73483
			363	76831
			291	93199
505	313	10859	212	12973
	312	21881	197	26821
	298	22691	193	27271
	292	23321	157	28843
	286	23627	147	29587
	222	25229	141	29881
	182	28277	368	37861
	154	29033	188	55351
	387	36497	373	74017
	317	42953		
	279	48197		
	137	60443		
	322	83939		
507	214	25799	367	19081
	140	30071	400	35083
	155	57977	350	40519
	89	64283	106	63313
	398	70667	307	90031
	392	72161		
*509	366	19379	361	19543
	358	19853	355	20011
	296	23099	325	20947

N	N'	Z	N''	Z'
*509	415	34403	299	22807
	371	37853	213	26053
	295	46559	209	26407
	233	49559	111	31333
	225	50231	376	37003
			374	37309
			298	45949
			284	48073
			234	49459
			230	49783
			142	59779
			94	63901
			391	72733
			289	94321
511	394	18131	317	21649
	374	18743	310	44953
	355	40289	286	47881
	353	40487	276	48859
	313	44351	216	51487
	295	46817	212	52321
	225	50423	144	59473
	183	56807	106	63397
	404	70019	94	63949
	278	97301	80	64693
	234	99089		
*513	298	23159	143	29917
	136	30509	394	36373
	112	31319	374	37831

N	N'	Z'	N''	Z''
*513	157	57923	184	56737
	155	58313	311	89977
515	406	17573	197	27259
	332	20693	191	27751
	324	21401	302	45817
	318	21893	202	53437
	304	22679	134	61333
	144	29837	116	62383
	379	37181	433	67399
	313	44867	297	93703
	301	46061		
	111	62927		
	418	69149		
	402	71549		
	358	80447		
	292	94433		
*517	378	18803	373	19219
	298	23447	191	27847
	202	26777	137	30517
	200	27017	436	33619
	190	27953	424	34267
	425	34127	334	41263
	419	34649	300	46399
	399	36191	228	50311
	371	38867	216	52201
	301	46103	108	63331
	183	57041	439	66877
	113	62597	331	83449

N	N'	Z'	N''	Z''
*517	93	64037		
	314	89849		
519	383	37061	193	27691
	323	43067	376	38113
	217	52163	332	41737
	211	53171	302	46141
	398	72953	232	50131
	394	73637	220	51361
	328	84977	98	63703
	314	90059	92	64237
	298	94169		
521	380	18899	381	18787
	324	21557	159	29017
	320	22037	141	30253
	399	36551	424	34501
	383	37253	402	36217
	309	45161	230	50287
	291	48017	188	56479
	235	49853	162	57679
	185	56951	138	61051
	155	58481	427	68581
	97	63803	411	70177
	438	67409	375	77317
	318	89153	339	82153
	288	96377	285	97231
	282	97553		
	236	99377		

N	N'	Z'	N''	Z''
523	334	20939	371	19531
	320	22247	325	21577
	202	27077	219	26041
	429	34253	205	26731
	361	40529	410	35449
	115	62501	408	35803
	452	66413	384	37357
	426	68879	292	48049
	398	73529	120	61987
	364	80369	441	67261
			433	67699
			409	71233
			379	76159
			359	81457
			303	93169
			293	95737
525	401	36629	296	47521
	416	69827	188	56809
			341	82189
			311	90373
*527	382	19013	373	19609
	380	19259	337	20887
	326	21773	215	26539
	312	22613	145	30139
	331	42929	402	36697
	327	43271	328	43063
	141	60899	236	50077
	121	61979	166	57493

N	N'	Z'	N''	Z''
*527	430	68729	407	72223
	282	97967	363	81283
			343	82141
			245	98641
529	449	33461	417	17581
	413	35759	387	18757
	409	36083	339	20809
	321	44939	157	29287
	313	45263	418	35053
	205	53951	408	36229
	197	55337	332	42967
	450	66791	308	46099
	404	73277	304	47059
	292	96497	224	51439
			188	56911
			186	57139
			114	62929
			361	81769
			329	86209
			287	97441
			239	99577
*531	374	19793	340	41719
	206	26927	298	47713
	116	31307	98	63907
	329	43487	391	74257
	233	50591	377	78049
	217	53003		
	139	61253		

N	N'	Z'	N''	Z''
*531	376	78341		
	364	81551		
	346	82073		
	296	96221		
533	223	52127	452	33493
	191	56783	392	37243
	81	64811	342	41521
	448	67427	226	51343
	430	69557	245	98929
	374	79811		
	372	79967		
	326	89057		
	316	90359		
535	342	20903	408	36709
	222	26153	336	42937
	116	31379	328	44281
	339	42209	411	72727
	337	42737	333	86113
	424	69821	287	97861
	414	71999	241	99823
	384	77711		
	376	79613		
	286	98009		
*537	332	21821	329	22153
	142	30539	301	23911
	305	47147	227	25741
	295	48413	412	36433
	191	56891	346	41413

N	N'	Z	N''	Z'
*537	125	61871	304	47293
			242	49891
			232	51157
			200	55333
			194	56443
			164	57991
			100	63799
			245	99289
539	416	18089	197	28123
	390	19121	123	31063
	380	19739	346	41491
	200	27737	212	53353
	243	49871		
	241	50123		
	237	50441		
	193	56813		
	436	69401		
	422	71153		
	410	73553		
	368	81737		
	344	83843		
	306	94331		
	250	98717		
	248	98873		
*541	376	20123	389	19381
	210	26903	347	20773
	441	34421	343	21061
	235	50957	341	21319

N	N'	Z	N''	Z'
*541	205	55073	305	23767
	454	67493	149	30109
	312	93701	115	31531
			444	34231
			330	44641
			298	48337
			220	53161
			158	59119
			118	62659
			381	79231
			373	81157
543	146	30347	416	36529
	419	36209	352	41179
	385	39107	158	59197
	347	41849	461	66883
	458	67217	371	81703
	382	79367		
	338	86111		
	298	96959		
545	426	17837	338	10837
	398	18839	229	25903
	394	19181	147	30313
	447	34259	448	34129
	307	47591	346	42019
	301	48221	304	48091
	239	50627	246	49801
	143	61211	313	94153
	442	69233		
	348	83777		

N	N'	Z	N''	Z'
547	335	11093	345	21283
	380	20147	241	25189
	346	21191	201	27961
	320	23003	396	38149
	226	26297	384	39877
	200	28109	316	46723
	449	34211	296	48787
	427	35771	240	50593
	351	41519	198	56359
	307	47711	120	62533
	231	51581	417	73459
	203	55457	399	75583
	163	58427	305	96199
	444	69143		
	442	69491		
	416	73571		
	402	74561		
	382	79907		
	308	95219		
	302	96479		
*549	401	37649	307	23977
	337	44129	239	25453
	325	45233	203	27823
	227	52511	119	31387
	197	56711	424	36109
	406	73973	352	41593
			170	57787
			104	63667

N	N'	Z	N''	Z'
*549			395	77377
			347	84961
551	431	35597	311	23719
	343	43049	224	53173
	337	44531	214	53773
	327	45131	467	67033
	149	60539	453	68227
	125	62219	383	80449
	422	73091	299	97423
	376	81773		
	312	94529		
553	379	40787	229	26227
	349	42509	428	35977
	225	53147	202	56263
	209	55217	451	68767
	153	60029	447	69457
	145	61223	439	69709
	125	62327	435	70627
	404	75269	429	71719
	388	79823	359	82237
			325	91153
			305	96517
*555	344	21713	149	30391
	326	22811	428	36241
	319	47051	356	41539
	452	68897	304	48571
	422	73589	232	52177
	398	77783	257	98779

N	N'	Z	N''	Z'
*555	352	84221		
	298	97829		
557	388	20051	169	29101
	324	23081	400	38839
	234	25913	306	48409
	230	26309	250	49999
	437	35363	429	72679
	442	69737	425	73351
	256	98939	413	73819
			411	74143
			359	82813
			357	83203
			299	97843
559	402	19373	431	18133
	394	19751	345	21937
	128	31019	165	29401
	317	47207	306	48589
	211	55259	232	52291
	476	66701	204	56299
	462	67829	202	56431
	360	82883	164	58909
	340	89633	122	62653
*561	346	21977	355	21169
	206	27983	344	44257
	455	34613	248	50227
	389	40427	214	54751

N	N'	Z'	N''	Z''
*561	233	52259	166	58657
			106	63691
			307	97213
563	408	19037	343	22381
	254	24917	247	25303
	214	27449	171	29077
	253	49943	236	51973
	209	55439	230	53017
	324	93983	164	59149
			132	61723
			393	79939
565	358	21107	219	26959
	356	21347	129	31051
	346	22193	466	33997
	407	38639	134	61609
	458	69263	118	63337
	406	77573	477	67153
	364	82847	443	70849
	258	99257		
567	250	25163	466	34147
	437	36293	130	62011
	247	50849	395	80191
	221	53699	353	86083
	199	57179	263	98713
	101	64157	257	99349
	478	67271		
	310	97259		

N	N'	Z'	N''	Z''
569	218	27191	351	21961
	461	34667	448	35257
	401	39521	440	36067
	393	40499	348	44533
	337	45197	224	53323
	333	45959	216	55009
	247	50993	469	68071
	217	54767	467	68449
	153	60689	307	97771
	101	64217		
	484	66797		
	364	83471		
	338	90227		
	328	93761		
	262	98837		
571	158	30011	413	19141
	465	34457	241	25801
	441	36107	209	28087
	401	39857	153	30427
	369	41243	440	36313
	347	44879	438	36451
	131	61991	174	58099
	121	63113	485	66841
	480	67421	323	94687
	446	71429	313	97039
	394	81119		
	324	94343		
*573	206	28307	419	18793

N	N'	Z'	N''	Z''
*573	160	29879	413	19273
	439	36527	412	38767
	361	42719	340	45139
	155	60527	338	45433
	364	83987	314	48541
	316	96527	122	63031
			481	67477
			463	69493
			407	77983
			403	79423
			347	90019
575	332	23399	407	19603
	441	36467	466	34651
	439	36653	326	47221
	369	41507	324	47569
	323	47639	224	53731
	311	48809	136	61651
			134	61837
			126	62563
			469	68743
			443	72643
*577	408	19661	225	26839
	370	20789	223	27067
	338	22937	159	30091
	214	27749	318	48313
	455	35129	252	50707
	447	35933	212	55933
	443	36389	162	59581

N	N'	Z'	N''	Z''
*577	415	38723	132	62071
	401	40253	457	69877
	317	48407	451	71359
	313	48731	405	79777
	259	49991		
	211	56207		
	153	61007		
	490	66863		
	438	73643		
	376	82067		
	368	83921		
	336	92189		
	328	94253		
	312	97649		
579	254	25307	407	19891
	355	44273	131	31147
	209	56453	424	37423
	137	61643	370	41851
	103	64187	256	50221
	400	80963	242	52189
	310	97931	208	56671
			319	96643
			317	97159
			265	99133
*581	458	17579	359	21871
	360	21737	163	29803
	222	27281	123	31573
	473	34487	356	44293

N	N'	Z'	N''	Z''
*581	409	39671	338	46147
	377	41141	326	47737
	325	47933	204	57163
	225	54011	162	59809
	173	58439	417	77713
	270	98663	375	82657
583	344	22697	405	20149
	326	23981	257	25171
	226	26951	360	43783
	261	50087	320	48463
	223	54521	262	49939
	221	55049	425	75679
	183	57557	403	80923
	133	62141	345	90499
	490	67433	339	92413
	460	70157	331	94327
	420	77249		
	372	83873		
	316	97523		
	268	98927		
585	421	38669	173	29347
	269	49451	476	34519
	161	60257	424	38047
	137	61751	422	38461
	428	75011	346	45289
	404	81017	224	54403
			461	70393
			401	81553
			337	93889

N	N'	Z	N''	Z''
587	408	20117	329	23917
	370	21317	215	28057
	346	22739	460	35461
	248	25763	416	39157
	246	25997	230	53479
	229	53639	216	55819
			178	58231
			465	69859
			421	77773
			359	89071
589	435	37019	243	26347
	371	42743	466	34963
	249	51473	364	43711
	175	58511	340	46831
	89	64853	242	52783
	486	67961	487	67783
	404	81527	417	78367
	326	96293	407	80953
			339	93967
591	128	31397	482	34381
	467	35051	244	52639
	419	39119	242	52981
	488	67853	224	55057
	350	90401	134	62233
			499	67141
			485	68473
			379	83137
			373	85009
			371	85903

N	N'	Z	N''	Z'
593	364	22067	465	17707
	348	22853	417	19867
	463	35747	434	37489
	211	56873	430	38011
	163	60293	138	61879
	484	68687	483	68881
	470	69809	459	71941
	276	98597	321	97549
	268	99551	317	98011
595	422	19541	227	27367
	437	37337	173	29611
	411	40493	488	34261
	269	49757	456	36493
	249	52103	244	52879
	276	98711	228	54367
			164	60169
			106	64153
			104	64333
			457	72739
597	334	23957	227	27427
	457	36587	140	61717
	385	41357	509	66643
	379	42023	433	75967
	371	43151		
	245	52859		
	490	68447		
	436	75329		
	268	99971		

N	N'	Z	N''	Z'
599	438	18797	165	30103
	346	23369	440	37321
	469	35573	368	44059
	457	36683	260	51001
	441	37139	232	54001
	417	40163	130	62731
	351	45833		
	339	47303		
	335	47939		
	275	49499		
	105	64301		
	510	66713		
	504	67349		
	424	78401		
	382	83933		
*601	380	21221	433	19309
	465	36017	223	27739
	435	38177	496	33961
	337	47777	494	34141
	325	48821	474	35107
	265	50321	426	39139
	261	50969	264	50527
	233	53891	222	55711
	127	63197	166	60127
	520	66347	112	63781
	486	69431	445	73867
	442	74489	371	87679
	366	89591	367	89101

N	N'	Z	N''	Z'
*601	330	96893	341	94351
			275	99139
603	380	21341	425	19753
	338	23909	265	25243
	178	29399	460	36691
	166	30119	350	46351
	385	41903	218	56401
	143	61613	136	62347
	506	67499	433	77689
	446	73961	373	87103
	412	81701		
605	474	17747	169	29863
	436	19289	472	35797
	248	26459	464	36469
	222	28019	422	40009
	441	37847	386	41947
	369	44657	384	42043
	247	53051	234	54049
	229	55163	232	54319
	133	62507	164	60457
	476	70607	513	67003
	354	91967	367	89917
	348	94049	343	94447
			339	95713
			333	96757
*607	370	22349	377	21613
	356	22901	251	26251
	230	27539	476	35407

N	N'	Z	N''	Z'
*607	439	38303	444	37537
	359	45293	350	46861
	339	48029	342	47581
	265	50723	222	56197
	189	57641	112	63913
	169	59879	491	69403
	131	62897	373	88093
	332	97241	345	94261
	328	97673	277	99277
	278	99083	275	99367
609	425	39989	353	23269
	233	54497	494	34603
	109	64109	374	44089
	514	67187	352	46687
	470	72383	437	77743
	326	97943	433	77893
			421	80917
			389	83719
			379	86137
*611	446	18869	379	21661
	479	35447	355	23143
	447	37511	358	45841
	189	57803	252	52711
	394	82721	236	54151
	388	84017	172	59509
	378	87071	164	60793
	370	90023	497	69073
	352	93887	469	72817

N	N'	Z'	N''	Z''
*611			363	90217
			281	98887
			279	99259
613	432	19763	379	21817
	388	21149	237	27043
	380	21701	181	29389
	376	22109	474	36073
	451	37199	434	39181
	239	53693	336	48523
	179	59123	190	57751
	506	67901	164	60901
	450	74729	507	67759
	444	76283	481	70717
	422	81359	479	71419
	398	82223	391	83911
	396	82529	357	92179
	362	90641	339	96337
615	388	21269	389	21193
	179	59183	227	27883
	338	96779	268	50821
			218	56989
			497	69481
			373	89923
			277	99829
*617	378	22157	445	19237
	364	22709	446	38371
	362	22877	182	58831
	381	43781	523	67021

N	N'	Z'	N''	Z''
*617	217	57131	519	67369
	167	60497	471	73327
	133	62921	361	91969
	536	66221	279	99487
	524	66851		
	358	92801		
	334	97547		
619	446	19301	239	27091
	511	33941	229	27799
	449	37967	181	29527
	439	39089	173	29851
	399	41399	504	34471
	377	44789	452	37693
	261	51683	376	44917
	167	60611	362	46021
	522	67247	256	52489
	502	69239	170	60337
	474	73121	162	61261
	424	81629	525	66973
	400	82493	483	71569
			455	74527
			445	77563
			383	87049
621	340	97157	448	38449
	284	99191	224	56509
			136	62581
			361	92419

N	N'	Z'	N''	Z''
623	382	22133	229	27943
	451	38153	232	55339
	449	38561	194	57637
	433	40241	174	59743
	393	42557	365	91711
	367	45533	361	93151
	275	50291	281	99709
	111	64151		
	432	80849		
625	513	34217	442	39301
	493	35099	396	42223
	393	42863	384	44053
	381	44687	256	52963
	369	45341	244	53617
	361	46751	236	55243
	271	51059	232	55441
	241	54251	224	56773
	229	56081	176	59497
	173	59999	146	61813
	456	75527	116	63853
	404	82457	517	67741
			429	81463
627	238	27509	265	25747
	355	47279	256	53047
	169	60659	527	67429
	514	68567	479	73243
			457	75709
			433	81019
			365	92221

N	N'	Z'	N''	Z''
629	398	21179	443	19801
	495	35291	365	23197
	191	58169	384	44563
	516	68489	244	53857
			230	56209
			184	59023
			381	90007
631	390	21839	397	21397
	445	39443	488	36061
	389	43997	484	36457
	185	58937	446	39367
			440	40039
			278	50383
			176	59791
			499	70009
			495	70753
			375	90199
			367	92353
633	499	35153	448	39229
	385	44819	284	50023
	349	48281	437	81031
	412	82139		
	370	92111		
*635	469	37013	374	45541
	269	51407	236	55411
	456	77681	176	59929
	292	98897	166	61291

N	N'	Z'	N''	Z''
*635			483	73561
			343	97711
637	264	26189	373	22963
	267	51977	263	26317
	486	73361	229	28309
	388	89567	376	45361
	346	97379	370	46327
	296	98669	250	53401
			144	62323
			537	67273
			527	67723
			409	82963
			393	87811
			359	95107
			295	98773
639	404	21227	446	39979
	461	38447	286	50101
	391	44483	539	67213
	518	69257		
	464	75797		
	352	96671		
*641	471	37307	265	26263
	393	44279	468	37699
	225	57173	416	41131
	147	62003	362	47389
	520	69191	278	51043
	456	77867	230	56713
	364	94307	541	67189

N	N'	Z'	N''	Z''
*641			497	71761
			445	80671
			439	81637
			381	90187
			361	95203
643	466	19031	379	22741
	188	29531	373	23227
	471	37397	456	39097
	415	41333	525	68659
	235	56249	399	86533
	187	59207	359	96097
	542	67289	291	99439
	508	70121		
	506	70589		
	404	85793		
	352	97169		
645	449	40169	464	38713
	379	45587		
	418	82373		
	412	83717		
	296	99023		
*647	410	21101	455	19861
	402	21587	273	25819
	374	23333	237	28051
	246	27431	476	37201
	473	37619	418	41257
	415	41543	396	44449
	409	42467	382	45337

N	N'	Z'	N''	Z''
*647	373	46877	280	51109
	265	52967	274	51427
	229	57047	238	55837
	512	69899	509	70621
	300	98729	393	89839
			347	97879
649	192	29339	457	19813
	513	35027	251	27031
	477	37277	502	36037
	415	41777	404	43051
	397	44519	366	47497
	249	54293	248	54559
	189	59159	234	56527
	123	63659	172	61027
	500	72647	136	63277
	384	90527	515	69739
651	286	25253	365	23899
	535	34157	239	27997
	275	51551	530	34483
	191	58907	460	39397
	422	82361	284	50787
	298	99119	242	55399
			509	71293
			299	98953
*653	478	18731	403	21943
	515	35111	287	25237
	477	37643	536	34213
	459	39791	500	36571

N	N'	Z'	N''	Z''
*653	249	54773	472	38377
	203	57689	396	44971
	173	61043	240	55903
	149	62129	176	60661
	117	64091	537	68209
	474	75833	411	85513
	354	97511		
655	513	35537	398	44893
	479	37571	294	49993
	399	44771	284	51061
	361	48311	176	60733
	257	53411	519	69829
	249	54881	503	72763
	143	62639		
	552	67307		
	518	70001		
	502	72977		
	368	95261		
657	194	29387	472	38803
	475	38351	461	79813
	401	44579		
	500	73523		
*659	475	38543	484	37339
	361	48563	466	39313
	295	50093	298	49741
	193	58991	174	61129
	460	79943	140	63079
	422	83423	463	79621

N	N'	Z'	N''	Z''
*659	358	97373	427	82393
			391	90289
661	478	19163	183	29989
	290	25301	464	39883
	521	35171	422	41911
	517	35603	406	44071
	279	51599	288	50833
	245	55541	234	57037
	239	56393	154	61843
	177	60869	144	62701
	518	70919	561	66931
	516	71537	505	73237
			455	81373
			411	86257
			365	96451
			297	99901
663	196	29363	257	26953
	178	30389	488	37159
	383	46727	470	39133
	151	62189	466	39799
	394	90203	280	51577
			206	57709
			154	61909
			140	63211
			419	84979
			365	96739
*665	258	26921	521	17749
	246	27803	411	21841

N	N'	Z'	N''	Z''
*665	467	39863	183	30133
	421	42257	526	34981
	207	57653	202	58147
	306	98867	198	58441
			186	59659
			178	60889
			507	73453
			383	93937
667	515	36131	387	23203
	373	47951	293	25261
	259	53783	514	36307
	237	56921	366	48487
	197	58757	272	53101
	195	59069	188	59467
	526	70241	547	68539
	468	79817	409	88513
	404	90011	361	97561
669	256	27239	524	35527
	196	29483	466	40111
	275	52757	541	69427
	203	58193	407	89611
	542	69341		
	494	74051		
	484	76541		
	470	79631		
	406	89867		
	370	96329		
	362	97583		
	358	97961		

N	N'	Z'	N''	Z''
671	422	21419	415	21787
	390	23117	249	27733
	529	35141	524	35731
	291	51047	430	41617
	285	51287	408	44839
	241	56687	388	46639
	199	58613	386	47017
	181	60623	196	59107
	566	67211	435	82351
			397	90529
			377	95257
673	426	21143	417	21739
	418	21611	255	27541
	282	26003	484	38737
	285	51431	416	43651
	189	59567	390	46567
	145	62939	380	47407
	424	85439	246	56239
			146	62743
			519	72481
			473	79609
675	527	35753	476	39451
	377	48023	154	62137
	187	59951		
	179	61001		
	398	90887		
	362	97883		

N	N'	Z'	N''	Z''
677	399	45497	259	27253
	371	48539	294	50971
	189	59771	278	52807
	496	74771	240	56983
	472	80111	421	86239
	384	94397		
	374	96401		
	372	96797		
679	491	38333	492	38083
	477	39821	478	39667
	417	44087	284	52153
	251	55673	262	54217
	538	69833	248	56269
	384	94709	208	57901
			188	59971
681	527	35993	494	37957
	475	40013	482	39217
	437	41513	154	62311
	305	50069	563	67801
	145	63029	493	76303
	560	68219	479	79393
	500	74717		
	440	82499		
	380	96137		
*683	264	27059	433	21067
	523	36563	419	22093
	189	60017	403	22699
	181	61031	283	26203

N	N'	Z'	N''	Z''
*683	492	77279	261	27277
			502	37273
			500	37447
			494	38287
			286	52081
			441	82591
			421	88003
			385	95101
685	439	41609	504	37189
	433	42473	492	38821
	247	56519	472	40627
	201	58901	208	58171
	494	76991	423	87559
	468	81707		
	434	84449		
	418	89213		
	372	97397		
687	284	26267	302	50461
	254	27827	244	56941
	385	47843	493	77731
	488	77969	383	96211
			311	99409
*689	186	30293	503	18859
	561	34469	263	27337
	531	36299	480	40093
	423	44111	436	42337
	397	46919	288	52183
	389	47417	266	54193

N	N'	Z'	N''	Z''
*689	281	53093		
	253	55967		
	209	58211		
	478	80783		
	396	94109		
	388	95213		
	378	97007		
691	254	27941	437	21211
	421	44753	427	21859
	293	51341	253	28069
	285	52709	500	38239
	283	52973	486	39709
	265	54311	292	51517
	257	55373	270	53551
	187	60509	268	53881
	151	62603	214	57781
	386	96017	206	58411
			487	79039
693	256	27851	488	39619
	421	44909	424	44497
	403	46199	152	62539
			505	75721
*695	271	53681	257	27817
	247	56909	424	44623
	532	73181	408	45691
	504	76001	202	59239
			573	68041

N	N'	Z'	N''	Z''
*695			507	75553
			491	78823
697	403	46649	505	19051
	247	56999	431	21799
	516	73883	409	22861
	320	98993	207	29269
			540	35923
			573	68239
			567	69061
			535	72823
			313	99961
699	443	42179	446	41941
	431	43973	314	49957
	307	50543	268	54331
	287	52817	196	59629
	151	62861	595	66739
	590	67181	565	69463
	532	73517	535	73189
	448	83207	493	78877
	410	91583	391	95869
	406	92657	379	97501
	404	93377		
	374	97973		
*701	497	39113	512	37657
	449	41681	274	53527
	427	44777	595	66919
	317	49739		
	189	60647		

N	N'	Z'	N''	Z''
*701	568	69317		
	426	89759		
703	434	21911	495	19819
	208	29333	445	21139
			269	27241
			267	27481
			398	47287
			288	52957
			254	56437
			591	67411
705	514	75653	296	51871
	454	82889	194	60271
			154	62617
			557	70117
			383	97369
707	493	40037	502	39019
	219	57773	488	40531
	414	91841	410	46471
			276	53623
			268	55051
			519	74731
			459	82231
			323	99223
*709	416	22871	556	35401
	196	30029	458	41269
	215	58229	274	54139
	153	62903	268	55207
	490	80933	577	69001

N	N'	Z'	N''	Z''
*709	484	81749	501	78787
	450	84089	321	99397
	418	90911		
	326	98909		
711	523	37223	500	39727
	439	43793	412	46573
	319	50021	314	50263
	217	58031	302	51283
	526	73943	154	62791
			605	66763
			499	79801
			413	92641
713	520	75617	443	21589
	512	77687	442	43399
			302	51421
			262	55921
			218	57973
			166	61861
			559	70879
			455	83857
			415	92227
*715	274	27179	413	23371
	453	42227	552	36151
	257	56633	498	40123
	189	61091	314	50551
	588	68207	607	66889
	516	76829	591	67819
	422	90749	329	98869

N	N'	Z'	N''	Z''
*715	412	93827		
	328	99053		
717	197	60317	520	37987
	424	90599	529	74161
	388	97571	463	82567
			323	99817
719	509	39191	562	35677
	317	50333	298	52369
	313	50909	210	59113
	157	62627	499	80737
	570	69779	495	81349
	564	70769	459	83833
	520	76607	439	89113
	444	87557	325	99523
			323	99907
721	302	26021	419	23131
	453	42899	502	40153
	417	46619	326	49747
	409	47189	264	56131
	219	58151	214	58567
	193	60887	198	60343
	165	62057		
	390	97607		
	330	99131		
*723	409	47339	260	56599
	295	53069	557	72649
	275	54833	443	88591
	598	67751	325	99859

N	N'	Z'	N''	Z''
*723	590	68711		
	550	73547		
	466	82811		
	406	95327		
	398	96749		
	326	99719		
725	448	21863	596	34123
	559	36263	444	44383
	523	38459	426	45589
	511	39503	418	46867
	463	41879	274	55219
	419	46703	497	81547
	307	51437	429	90511
	157	62801	417	94063
	586	69467		
	572	70163		
727	446	22091	281	27061
	523	38711	514	39343
	399	48473	442	44851
	285	53453	328	49831
	157	62873	196	60649
	448	88037	154	63127
	332	99251	589	69337
			527	76039
729	533	37607	574	35251
	329	49811	512	39847
	454	86069	466	41809
			212	59209

N	N'	Z'	N''	Z''
731	303	52361	538	37171
	271	55529	428	45943
	267	56267	422	46819
	205	59621	414	47251
	558	73331	593	69193
			509	80287
			433	90379
733	462	21323	449	22171
	284	26981	425	23251
	280	27299	411	23893
	575	35381	307	26029
	465	42083	430	45763
	303	52541	559	73417
	197	60719	537	74779
	580	69911	527	77551
	506	81041	521	77929
			429	91909
			415	94561
735	544	73907	512	40099
	542	74219	529	77323
	536	75641	457	86263
	506	81353	431	91639
*737	426	23339	530	38749
	531	38609	508	40597
	471	41843	416	47431
	321	50873	280	54919
	225	58013	405	96787
	203	60209	333	99571

N	N'	Z	N''	Z'
*737	562	73433		
	518	79601		
	438	90197		
	414	95279		
739	539	37799	582	35227
	513	40343	324	50647
	415	47657	206	59833
	405	48533	198	60859
	281	54851	611	67789
	273	55697	547	73897
			333	99793
741	542	18773	226	58057
	457	43961	200	60601
	227	57899	625	67219
	524	78623		
	454	88607		
	428	93503		
743	436	22859	307	26293
	479	41381	542	37783
	431	46457	470	42373
	419	47501	264	56923
	273	55931	631	66853
	201	60521	587	70123
	610	68399	581	71263
	570	72893	547	74287
	548	74201	537	76771
	468	85487	459	87547
			341	99013

N	N'	Z	N''	Z'
745	462	21683	524	39703
	308	26261	274	55843
	471	42461	206	60037
	221	58601	571	72973
	576	72167	547	74713
	544	75389	529	78031
	452	89891	517	80761
	418	95483	483	82339
			477	83443
			463	86287
			441	90481
			433	92479
747	284	27437	578	36007
	461	43889	526	39631
	169	62297	470	42787
	536	77747	464	43207
			442	45259
			314	51769
			515	81163
			481	82903
			439	91159
			337	99679
749	431	46997	438	46027
	423	47387	330	50377
	309	52697	318	51307
	277	55619	202	60637
	520	80657	585	71437
	480	83231	531	78241
			405	97551

N	N'	Z	N''	Z'
751	529	39569	522	40231
	463	43991	464	43759
	425	47309	440	45853
	331	50363	424	47419
	317	51593	270	56611
	271	56477	210	59671
	229	58073	206	60373
	157	63317	595	69847
	580	72221	539	77719
	556	73877	419	96157
	408	97367	343	99241
	340	99401		
753	286	27479	467	21673
	208	30059	332	50329
	425	47441	641	66733
	163	62819	529	79633
			437	92737
			409	97381
755	546	19157	463	22123
	466	21929	317	25933
	543	38729	526	40087
	331	50651	424	47653
	229	58217	583	72253
	426	94961	579	72949
			461	89107
			423	95731
*757	597	35117	488	41389
	549	37991	460	44887

N	N'	Z	N''	Z'
*757	535	39383	320	51481
	467	43913	222	58921
	231	58043	625	67867
	209	60149	621	68491
	536	78347	553	75277
	468	87293	459	89959
			449	90313
			409	97687
			351	98731
759	212	29867	554	37747
	311	52937	472	43117
	586	72287	466	44101
	560	74159	320	51691
	428	95009	278	56113
			272	56779
			535	78979
			479	85021
			431	94309
			419	96487
761	555	37811	226	58543
	535	39761	206	60493
	429	47543	621	68713
			599	70537
			581	73309
			563	73939
*763	473	43397	472	43543
	465	44729	468	44221
	419	48437	290	54907

N	N'	Z	N''	Z'
*763	295	54083	629	68059
	484	84191	591	71887
	432	94559	523	81559
	430	95111	467	88897
765	598	71327	482	42703
	454	90263	466	44773
			428	47911
			563	74353
			541	78607
			467	89137
767	322	25943	445	23209
	283	55787	544	39079
	281	56093	450	45757
	498	82217	346	49843
	352	99017	605	70201
			593	72169
			551	77617
			497	82387
769	593	36251	292	54979
	491	41897	176	62053
	431	47837	595	72031
	325	51503	555	76819
	636	67763	545	78307
	484	85517	499	82279
	474	88007	497	82471
	472	88289	469	89329
	436	94439		
	432	95267		

N	N'	Z	N''	Z'
771	563	37691	536	40213
	283	56003	494	41647
	163	63179	625	69259
	548	77933		
	422	97187		
773	559	38321	560	38119
	547	39239	456	45427
	543	39827	326	51673
	471	44741	230	58477
	177	62039		
	568	74609		
	566	74873		
	486	85751		
	450	92219		
775	451	46133	478	43951
	437	47513	448	46663
	321	52433	302	53719
	227	58979	567	75013
	598	72431	551	77899
	492	84047	491	84463
			459	90397
			439	94477
777	541	40151	562	38281
	451	46349	452	46153
	596	72911	236	58153
	572	74297	214	60217
	352	99371	533	81517
			493	84127

N	N'	Z	N''	Z'
779	499	41669	493	21157
	491	42641	288	55663
	165	63131	563	76777
	500	83003	537	81181
	442	94349	481	87583
			453	92401
781	478	22229	299	27211
	603	36137	562	38677
	549	39779	552	39373
	331	51383	492	42727
	219	59627	166	63067
	460	91079	637	68749
	458	91631	599	72931
	428	97073	545	79987
			535	81619
783	331	51479	344	50503
	616	70619	220	59539
	506	82487	611	71563
	484	87299	505	82699
	454	92993		
785	443	47459	346	50359
	301	54323	326	52267
	572	75731	288	56053
	568	76481	613	71473
	506	82799	553	79111
	456	92639	361	98893
*787	557	39227	440	47977
	495	42821	284	56473

N	N'	Z	N''	Z''
*787	299	54917	230	59077
	566	77471	649	68023
	546	80777	499	84229
	496	85313	447	94291
	432	96911		
789	290	27947	622	35149
	173	62549	500	42193
	610	72173	172	62683
	608	72623	545	80989
	458	92681		
	428	97463		
791	557	39623	572	38329
	549	40361	466	45523
	327	52529	332	51907
	307	53819	242	57943
	291	55829	559	78781
	358	99431	433	97177
793	503	42101	335	25771
	656	67733	303	27283
	578	75707	580	37561
	562	78311	512	41299
	544	81509	344	51031
	492	86561	605	73369
	438	96431	561	78577
			487	88177
			443	96013
*795	308	26987	488	44131
	449	47381	448	47563

N	N'	Z	N''	Z'
*795	347	50741	346	50923
	169	63059	623	70921
	652	68531	571	77647
			469	90847
797	463	46307	578	37993
	439	48341	346	50989
	351	50411	222	59863
	215	60617	623	71329
	608	73379	555	80263
	576	76781	489	88327
	572	77723		
	564	78467		
	546	81611		
	462	93059		
	460	93683		
	458	94121		
799	351	50513	626	35491
	632	69959	616	36277
	624	71453	502	42901
	588	74363	494	43633
	550	81371	448	47791
	462	93281	302	55213
			659	67993
			625	71191
			505	84967
			467	92119
			453	94441

N	N'	Z'	N''	Z'
801	578	76847	628	35437
	566	78791	494	43963
	470	91457	338	51631
			661	67939
			581	75937
			469	91873
			443	96331
803	466	23189	587	75253
	633	35159	579	77041
	353	50459	467	92383
	183	62171		
	622	71879		
805	338	25931	493	22189
	509	42437	634	35221
	664	67979	514	41893
	618	72797	661	68371
			501	86131
			473	91183
807	569	39461	512	42073
	364	99707	623	72313
			589	75511
809	467	46829	590	37813
	343	51347	582	38707
	335	52457	512	42307
	309	54623	466	46957
	297	55997	144	64171
	492	89657	465	94099

N	N'	Z'	N''	Z''
811	503	43331	500	43987
	445	48491	308	54973
	339	52181	300	55609
	576	77999	298	55927
	496	89069	635	71143
	478	90977	559	81199
	458	94781	459	94597
813	595	37493	514	42457
	620	73421	502	43789
			496	44617
			218	60811
			623	73009
			521	83233
			455	95773
815	573	39749	596	37573
	521	41801	514	42577
	517	42089	474	46183
	341	52121	294	56503
			186	62119
			523	83023
			507	86161
*817	339	52313	343	25939
	335	52889	498	44701
	317	53831	663	69163
	239	59021	631	72211
	638	71471	517	84673
	592	76163	451	96493
	560	81563		

N	N'	Z'	N''	Z''
*817	518	84239		
	514	85601		
819	473	46769	590	38629
	187	62099	673	68329
	640	71411	667	68899
	500	89123	599	75133
	376	98999	523	83773
			505	87943
			443	97609
821	643	35543	526	41659
	633	36269	178	62761
	459	47981	641	71503
	227	60041	567	81013
	666	69197	503	88609
	596	75821	501	89209
	576	79829	463	94993
	458	96167	371	99559
*823	509	43577	502	44647
	371	49877	466	47269
	359	50777	464	47527
	321	53657	314	54727
	251	58061	230	59707
	245	58451	675	68521
	241	58997	637	71947
	638	71789	607	74203
	485	90647	605	74509
	372	99527	573	80317

N	N'	Z'	N''	Z''
*823			451	97081
			447	97387
825	632	73079	338	52951
	452	97103	607	74383
827	605	37517	574	40357
	595	38693	530	41611
	513	43313	232	59611
	339	52919	675	68683
	303	56087	575	80407
	253	57947		
	231	59729		
	684	67757		
	610	74189		
	486	91163		
829	583	39719	648	35671
	181	62633	526	42061
	682	68147	529	83869
	680	68507	523	85087
	612	74099	477	94009
831	533	41549	188	62299
	479	46889		
	367	50261		
	343	52667		
	674	69221		
833	537	41387	528	42169
	608	75503	484	46279
	516	87011	489	91387
			381	99181

N	N'	Z'	N''	Z''
835	351	51767	654	35533
	644	72461	512	44263
			689	67957
			647	71821
837	607	37997	484	46633
	491	45767	254	58189
	317	55109	653	71593
	301	56597	605	76753
	646	72353	581	80701
	602	77447	539	82891
			481	94117
			461	96697
839	593	39371	520	43441
	527	42923	312	55381
	325	53987	657	71119
	608	76157	619	74167
	468	96179	607	76537
	454	97577	605	77023
			595	78193
			529	85243
			491	91921
			473	95071
*841	521	43499	322	54409
	349	52301	226	60727
	311	55631	222	61141
	710	67157	645	72937
	694	67943	613	75703
	596	78317	385	99109

N	N'	Z'	N''	Z''
*841	592	79349		
	586	80141		
	462	96827		
	456	97499		
843	323	54371	520	43933
	245	59243	232	60259
	688	68699	665	70183
	380	99761	493	92041
			473	95479
			463	96847
845	582	81293	517	88993
	514	89627	381	99721
	476	95177		
847	613	38201	526	43237
	533	42773	324	54517
	523	43787	310	56179
	515	44843	234	60103
	257	58199	699	67933
	668	70223	689	69067
	662	71363	653	72559
	520	88223	585	81001
849	311	56099	545	82981
	610	77591		
	596	79757		
	586	81071		
	524	87743		
	500	91097		

N	N'	Z	N''	Z'
851	239	59561	652	36523
	199	61781	616	38167
	694	68771	673	70003
	650	73259	665	71413
	550	82469	623	74887
	546	83063	517	89809
	502	90863		
	500	91193		
	470	96443		
853	493	46691	660	36013
	481	47507	520	44683
	313	56039	360	51613
	724	66923	348	53077
	628	74279	326	54541
	624	75041	306	56731
			529	86719
			483	94531
			471	96457
855	541	42359	502	45667
	181	63149	496	46447
			523	89041
			497	92431
*857	543	42221	672	35419
	531	43481	602	39829
	363	51419	376	50599
	315	55889	675	70429
	253	58787	493	94033
	698	68891		

N	N'	Z	N''	Z'
*857	676	70199		
	664	71837		
	630	74507		
	392	99173		
859	545	42071	374	50893
	333	53897	360	51991
	676	70583	310	56467
	498	93053	196	62131
	484	95153	679	70051
	482	95471	659	72889
			599	80071
			551	83077
			395	98899
861			619	77557
			523	89833
			487	94693
			473	96823
863	505	45971	626	37963
	499	46643	622	38557
	379	50549	376	50839
	337	53597	256	58603
	327	55079	621	77359
	241	59747	613	77977
	710	68141	547	84349
	632	74831		
	612	78203		
*865	631	37781	544	42841
	668	72227	711	68281

N	N'	Z	N''	Z'
*865	624	76913	559	82483
	548	84467	483	96079
867	547	42533	356	52813
	511	45491	707	68791
	634	75167	503	92863
	632	75683	491	94513
	526	89897	487	95287
			485	95857
869	479	48299	604	40237
	379	50789	540	43159
	265	58067	488	47659
	243	59669	673	71917
	634	75533	663	73363
	614	78809	393	99469
	612	79229		
	610	79769		
	510	91397		
	480	96419		
871	505	46511	552	42181
	323	55511	548	42793
	319	56123	719	67891
	502	93809	665	73303
	400	98963	643	74101
			513	91081
			491	95089
*873	518	90281	494	47317
	506	93089	334	54499
	490	95393	641	74707

N	N'	Z	N''	Z'
*873	488	95987	559	83431
			517	90403
875	361	52691	514	45613
	506	93251	512	45979
	494	94841	366	52147
			334	54673
			236	60631
			619	78583
			603	81223
			479	97171
877	542	21851	555	21163
	553	42611	618	39541
	535	44633	544	43321
	515	45641	360	52837
	333	54983	723	68053
	315	56681	693	70099
	259	58763		
	255	59219		
	714	68963		
	634	76733		
	620	78713		
	510	92399		
*879	643	37529	622	39241
	563	41687	364	52453
	257	59063	326	55501
	508	93407	725	67987
			649	74077

N	N'	Z	N''	Z'
*879			647	74311
			623	78301
881	545	43541	554	42853
	539	44507	548	43093
	508	93719	494	47779
			326	55579
			324	55849
			675	73039
			633	77587
			517	91423
			493	95791
883	546	21803	494	47917
	637	38453	366	52363
	635	38747	362	52903
	625	39209	324	56041
	513	46301	248	59557
	389	50387	683	72073
	341	54167	645	75289
	646	75017	615	80251
	404	99149	537	89659
			509	93763
			479	97459
885	556	85817	374	51511
			497	95311
*887	339	54539	348	53419
	692	71597	328	55633
	684	72497	573	82531
			567	83617

N	N'	Z'	N''	Z''
*887			521	91249
			513	93241
889	263	58679	524	45481
	724	68903	192	62869
	512	93941	653	74653
			641	77047
			561	85027
891	614	81233	725	69031
			569	83761
			497	96181
893	629	39581	346	53959
	523	45893	685	72901
	704	70289	653	75169
	620	80651	543	89671
	518	92921	503	95191
895	701	35531	194	62773
	549	44207	699	71443
	367	52883	577	82759
	736	68213	519	92959
	726	69203		
	644	77369		
897	517	46901	550	44269
	694	72047	707	70351
	634	78737	691	72661
	626	79973	619	81097
	566	85049		

N	N'	Z'	N''	Z''
899	567	42569	632	39769
	351	53609	556	43579
	708	70457	711	69991
	702	71483		
	664	74021		
	650	76679		
	634	78887		
	626	80273		
	550	89021		
	404	99881		
901	559	43283	382	51349
	349	53993	342	55021
	249	60089	633	79627
	698	71867	625	80803
	576	83591	585	82219
	556	87803	581	82723
	532	90659	577	83407
903	661	37463	268	58573
	653	38327	583	82609
	529	45863		
905	709	35507	526	46237
	379	52067	374	52561
	343	55061	701	71881
	716	69929	691	73291
			529	92107
*907	509	47717	700	36187
	347	54503	572	42589
	327	56531	560	43801

N	N'	Z'	N''	Z''
*907	744	68501	398	50587
	666	74699	380	52027
	644	78041	332	56167
	630	80627	270	58453
	626	81083	717	70039
	588	82349	551	89821
	576	84011	537	90439
	564	86243	507	95989
	522	93971		
909	527	46523	577	84067
	704	71909	575	84751
			571	85831
911	533	45989	574	42697
	383	51749	556	44587
	355	53717	705	71983
	333	56237	647	78007
	666	75239	633	80527
	566	86369	573	85639
			555	89533
913	557	44621	270	58693
	531	46181	657	77347
	337	55763	573	85933
	716	70793	567	86467
	642	79481		
*915	647	39323	413	99607
	746	68813		
	718	70709		
	664	75869		

N	N'	Z'	N''	Z''
*915	518	94583		
	514	95273		
	512	95801		
	502	97001		
917	541	45413	580	42397
	351	54449	380	52387
	339	55667	717	71287
	556	89963	633	81049
	496	97613	569	86539
919	647	39659	672	37591
	712	71843	578	42829
	670	75659	721	70729
	638	80669	583	84163
	572	86117	519	94777
	568	87359	413	99877
	520	94649		
	506	96731		
921	565	44189	406	50341
	515	47963	719	71527
	401	50891	677	74521
	722	70901	649	79087
	560	89681		
923	669	38039	727	70423
	341	55691	599	82267
	333	56489	591	83437
	255	60101		
	674	75377		
	584	84731		

N	N'	Z'	N''	Z''
925	353	54713	572	43591
	271	58967	671	75913
	656	78191		
	582	85571		
927	653	39563	362	53593
	583	42839	358	54163
	565	44711	274	58741
	547	45389	256	60133
	391	51659	503	97429
	568	88589	419	99529
929	577	43223	540	46219
	573	43943	356	54361
	363	53549	595	83389
	756	69011		
	726	71399		
	670	76961		
	594	83579		
931	597	41579	727	71479
	577	43451	687	74131
	670	77339	685	74377
	648	80363	591	84061
	594	83891		
	568	89231		
	510	97127		
*933	587	42797	542	46309
	736	70181	526	47533
	722	71993	527	94747
	650	80177		

N	N'	Z'	N''	Z''
*933	578	86993		
	566	89909		
935	259	59957	574	44119
	722	72251	597	83791
	538	94007	577	87793
			553	90583
937	725	36011	524	47947
	651	40283	358	54577
	359	54377	675	77263
	277	58727	673	77641
	718	73019	601	83089
	604	82787	541	93601
939	409	50867	394	51949
			388	52579
			725	72271
			575	88801
			553	91099
941	677	38699	348	55621
	603	41627	667	78277
	593	42683	601	83737
	263	59699	595	84871
	604	82997	533	94483
	542	93923		
943	678	77543	398	51607
			655	80629
*945	397	51827	548	46477
	656	80687	769	69019

N	N'	Z'	N''	Z''
*945	652	81131	697	74197
	586	86753		
947	581	44171	556	45673
	391	52631	366	54133
	686	76259	657	80779
	666	79427	545	93979
	596	85523		
949	265	59753	600	42451
	698	74471	552	46171
	562	90407	695	74821
	530	96059	661	80239
	524	96461	613	82549
			597	85627
951			598	42859
			590	43291
			547	94057
			521	97117
953	676	78137	701	74449
	664	80153	609	83701
			579	89797
			551	93307
			517	97453
955	351	55901	604	42403
	752	70481	552	46681
	678	78059	416	50857
	594	86201	282	58771
	524	96989	687	77431

N	N'	Z'	N''	Z''
957	257	60761	674	39607
	586	88817	344	56629
			284	58579
			701	74797
			659	81331
			607	84211
			557	92233
			535	95971
959	607	42299	695	76129
	758	70067	691	77191
	708	74093	543	94543
	662	81047		
961	693	38501	588	44491
	373	53813	254	61099
	367	54647	208	62827
	365	54959	789	68389
	680	78497	701	75577
	676	79379	691	77521
			669	80329
963	697	38183	556	46807
	617	41651	286	58537
	587	44699	280	59221
	754	71147	679	78919
	694	77153	605	85819
	584	89939	559	92683
*965	696	76943	756	35509
	618	83399	282	59083

N	N'	Z'	N''	Z''
*965	588	89477		
	544	95087		
967	593	44249	680	39733
	706	75407	370	54493
	666	81299	707	75217
	596	88019	607	85909
	588	89669	599	87013
	570	90947	563	92203
	444	98981	559	93319
969	371	54413	598	43891
	790	68819	569	91297
	742	73127		
	668	81173		
971	563	46499	612	42649
	545	47699	623	83059
	626	82757		
973	571	45707	803	67927
	351	56501	767	70321
	704	76511	753	71971
	702	76871	751	72337
	688	78653		
	534	96953		
975	413	51413	599	88117
	544	96149	571	91807
*977	351	56663	626	41641
	764	71249	618	42379
	718	74567	404	52501

N	N'	Z'	N''	Z''
*977	630	82727	370	55117
	554	94427	270	60091
			689	78889
979	619	42443	690	39511
	601	44123	378	54181
	710	75983	771	70459
981	707	38567	718	37483
	263	60821	689	79687
	800	68777	605	87931
	610	86249		
983	695	39341	580	45403
	551	47819	570	46489
	403	52901	288	58963
	361	55949	270	60331
	808	68279	711	76561
	692	79337	677	81307
	686	79979		
	582	90437		
	576	91673		
985	611	43319	612	43177
	407	52583	272	60139
	373	55127	779	69997
	724	74531	721	74941
	718	75689	533	97579
	696	78797		
	608	87683		
	444	99767		

N	N'	Z'	N''	Z''
987	409	52391	773	71089
	265	60773	613	86461
	712	76919		
	620	85829		
	446	99563		
989	627	42131	434	50581
	613	43427	376	54877
	571	46811	687	80611
	415	51941		
	367	55469		
	363	56009		
	724	74897		
	686	80819		
	572	93239		
991	717	38261	714	38611
	387	53591	781	70381
	277	59693	713	77383
	784	69941	585	90703
	776	71129		
	696	79697		
	608	88337		
993	635	41771	410	52627
	583	45677	380	54469
	377	55001	358	56533
	808	69029	641	82633
	778	70979		

N	N'	Z'	N''	Z''
995	716	77351	418	51829
			563	94651
			449	99643
997	705	39317	616	43753
	295	58661	723	76003
	688	81101	547	96997
	612	88259		
	580	92297		
	450	99611		
999	581	46187	380	54829
	706	78779	821	68311
	644	82781	725	75853
	560	95621	641	83047
			559	95803
1001	359	56747	732	37579
	772	72467	388	53917
			705	79201
			691	81043
			591	90679
1003	615	44267	388	54037
	381	54941	791	70237
	828	67883	737	74611
	630	85853		
	580	93263		
	562	95717		
*1005	623	43403	422	51853
	613	44651	392	53653

N	N'	Z'	N''	Z''
*1005	583	46451		
	634	85103		
	554	96581		
1007	776	72617	787	71389
	724	77549	743	74149
	710	78929		
	708	79493		
	632	85931		
	624	86927		
1009	727	38603	592	45751
	417	52553	390	54121
	714	78479	382	55147
	638	84869	773	73063
			745	74071
			635	85531
			571	94621
1011	637	42701	374	55603
	419	52379		
	782	72077		
1013	733	38237	714	39499
	393	53849	781	72547
	836	67931	731	76837
	784	71963	637	85711
	654	82619	629	86509
	648	83477		
*1015	621	44501	642	42391
	389	54347	426	51913

N	N'	Z'	N''	Z''
*1015	281	59981	274	60589
	586	93629		
	568	95783		
1017	427	51869	302	58549
	650	83663	617	89899
1019	653	41621	646	42139
	589	46679	282	60013
	377	55589	797	71209
	720	78803		
	710	80147		
	658	82571		
	630	87281		
	624	88799		
	572	95369		
1021	626	88547	374	56101
			571	95881
1023	647	42407	376	55897
	800	71237	302	58789
	632	87539	461	99787
	562	96821		
1025	303	58733	803	71023
	714	80207	711	80809
	634	87107		
1027	629	44357	448	50773
	431	51929	749	75619
	662	82793	651	84319

N	N'	Z'	N''	Z''
1029	838	68909	797	71899
	760	74027		
	740	77489		
	652	84431		
1031	848	68171	594	46933
	812	70439	432	52009
	652	84857	394	54547
	628	89561	791	72871
			759	74293
1033	810	70841	434	51817
	728	79043		
	712	81203		
	654	84509		
	632	89009		
	464	99929		
1035			809	71353
1037	383	55721	750	38299
	303	59093	402	53899
	468	99623	759	74959
			729	79549
			723	80107
			673	82261
			657	84457
1039	397	54563	737	78139
	758	75539	633	89521
1041	437	51899	436	52057
			374	56659

N	N'	Z'	N''	Z''
1043	611	45869	648	43189
	822	70373	643	87991
	800	72923		
1045	826	70061	408	53611
	586	95549	851	68917
			807	72229
			611	92083
			607	92647
1047			292	59797
			647	87427
1049	822	70937	756	38569
	772	74357	608	46549
	588	95633	861	68443
			771	74551
1051	824	70877	643	89017
	760	76667	615	91951
	592	95189		
1053	812	72503	646	44179
	590	95723	308	59029
			733	80347
			679	82729
			655	86179
1055	733	40277	322	58027
	816	72089	813	72613
	744	78893	667	84913
	676	83267	613	92551

N	N'	Z'	N''	Z''
1057	437	52517	446	51637
	772	75323	811	72859
	652	87869	681	82837
			653	87541
1059			581	97003
1061	623	45659	466	50539
	822	71849	865	68821
	818	72551	835	70573
	740	80039	673	84199
			655	87649
			585	96553
1063	651	44381	670	42643
	393	55661	614	46747
	646	89753	596	47797
	622	91961	412	53923
			841	69931
1065	682	83417	446	52069
			286	60763
1067	755	39251	312	59053
	619	46439	817	73141
	586	96857	773	76231
			625	91771
1069	661	43613	600	47701
	287	60779	843	70249
	770	77291	621	92623
			605	94603

N	N'	Z'	N''	Z''
1071	788	74381	817	73387
	772	77069	631	91033
	634	90473		
1073	688	83177	680	42187
	652	89783	589	96907
	630	91331		
	624	92387		
1075	417	53861	678	42571
	397	55733	773	77509
	676	85703	687	83689
	666	86981		
1077	776	77201	622	46771
			751	80077
			659	88969
			655	89653
			625	92767
1079	789	37589	782	38053
	683	42281	833	72307
	297	60251	691	83401
	846	70853		
	690	83537		
	678	85781		
	670	86501		
	660	89051		
	628	92237		
*1081	691	41813	668	43717
	684	84719	847	70969

N	N'	Z'	N''	Z''
*1081			761	79333
			753	80209
			681	85447
1083	778	77621	400	55717
			793	74869
1085	786	76253	839	72139
			701	82507
			627	93427
			487	99991
1087	850	71261	833	72997
	630	93113	685	85369
	610	95441	613	94999
1089	686	85469	322	58711
			673	87421
1091	774	78101	798	37549
	752	81197	690	42409
	678	86297	837	72883
	638	92051	699	83311
			601	96667
1093	804	74441	676	43573
	798	75401	785	77659
	692	84503	667	89203
	664	89819		
	644	91019		
*1095	646	90833	418	54667
			679	86767

N	N'	Z'	N''	Z''
*1095			617	95143
			601	96931
1097	795	38069	680	43411
	840	73133	803	74929
	778	78179	667	89689
	762	80621	649	90547
	696	84143	619	94951
	638	92369		
	496	99497		
1099	307	59723	865	70549
	674	88463	843	72907
			797	75997
			775	78901
			773	79399
			695	84859
			681	86929
1101	403	56171		
	616	95813		
1103	647	45779	799	76261
	782	78233	695	85381
	672	89519	681	87613
	646	91781	637	93553
			609	96469
1105	683	43661	639	93253
1107	796	77513	655	90523
			637	93997
			619	95929

N	N'	Z'	N''	Z''
1109	874	70379	802	38317
	858	72053		
	704	84059		
	676	89393		
1111	640	93893	685	87961
	630	94421		
1113	872	70991	859	72367
			815	74857
			803	76873
			787	78649
			653	91513
1115	807	38189	814	37717
	689	43721	426	54583
			879	70297
1117	708	84347	648	46441
	686	88169	468	52021
			721	82651
			659	90823
1119	706	85061	863	72469
			811	76099
1121	878	71069	879	70843
	788	79559	867	72103
	648	93329	865	72421
			781	80167
			719	83101
			717	83497
			633	94789

N	N'	Z'	N''	Z''
1123	870	71861	711	84499
			647	93871
			619	96601
1125	886	70451	416	55639
			823	75037
1127	824	75209	661	91591
	786	80051		
1129	691	44453	889	70489
	796	78941	831	74317
	778	81239	817	76423
	652	93563	657	92269
			653	93229
1131	433	54419	827	75193
			785	80713
1133	695	44201	820	38197
	313	60107	663	91939
	868	73061	653	93811
	786	80789		
	782	81077		
	714	85361		
	702	86969		
1135	706	86183	641	94771
	664	92003		
	512	99689		
1137	698	88241	434	54679
			659	93103

N	N'	Z	N''	Z'
1139	628	96557	722	42157
			667	91837
			625	96973
1141	659	46757	722	42349
	720	85037	929	68947
	662	92831	827	76081
			795	80149
			695	89563
1143	443	53927	338	58699
			901	70327
			671	91381
1145	807	39509	708	43609
	796	80429	661	93637
1147	673	45737	482	51787
	317	60083	474	52567
	880	72869	813	78283
			735	83257
			697	89767
			679	90469
1151	669	46229	723	85837
	882	73013	675	91621
	716	86171	673	92077
			667	93133
			663	93913
1153	487	51563	737	83641
			727	85237
			651	94819

N	N'	Z	N''	Z'
1157			911	70501
			683	90697
			669	93283
1159	487	51803	841	75883
	888	73037		
	822	78173		
	816	79301		
	728	85847		
	710	88643		
1161	730	85733	847	75541
	682	91229		
1163	737	42197	825	78121
	956	68261		
	900	71987		
1165	843	38231	734	42709
	724	86291	911	71257
			819	79537
1167	493	51539	490	51859
	814	80021	841	77167
	662	94379	721	87523
1169	920	70571	725	86689
	856	74861	723	87151
	814	80279		
	676	93257		
*1171	854	75629	743	84121
	722	87959		
	654	96053		

N	N'	Z	N''	Z'
*1171	526	99923		
1173	343	59051	448	54631
	826	79241	661	95131
	740	85091		
	694	90533		
1175	726	87491	751	83653
1177	745	42293	684	46261
	744	84947	685	92251
	728	87119		
	718	89273		
1179	743	42677	722	44389
			847	77611
1181	856	76079	693	91453
	754	83813	687	92317
	666	95003	651	96589
1183	824	80231	971	68437
	746	85199	915	72091
	688	92381	913	72379
	668	94793	857	76249
	662	95789	831	79657
			821	80749
			733	86959
1185	722	89501	929	70891
	668	95093		
1187	824	80681	734	43597

N	N'	Z	N''	Z'
1189	762	83219	690	46381
	748	85619	498	52051
	702	90677	701	90907
	692	92243	689	93139
			655	96661
1191	842	78707		
	740	86351		
1193	493	52571	438	55987
	844	78569	831	80221
	756	84401		
	752	85259		
1195			462	54091
			693	92941
1199	877	37547	458	54601
	768	83357	322	60757
1201	864	77417	761	84421
	846	79133	735	88951
	762	84131	673	95707
	674	95429	659	96979
1203	884	74597	881	74827
	742	87887	865	77527
			731	89779
			709	90997
1205	467	53939	881	75223
	872	76421	879	75571
	778	82601		
	706	91703		

N	N'	Z	N''	Z'
1207	745	43853		
	870	77081		
	702	92357		
1209	952	70487		
	664	96851		
1211			853	79153
			843	80341
1213	948	71387	777	83341
	888	74891	739	89527
	782	82763		
1215	854	79589	859	78691
	686	94823	751	87313
1217	856	79397	745	88843
	778	83597	689	94573
	718	90821		
	712	91997		
1219	752	87833	955	71011
	716	91253		
1221	755	43607		
	706	93287		
1223	885	38219	867	78259
	473	54059	849	80677
	884	76757		
	850	80489		
	754	87977		
	718	91367		

N	N'	Z	N''	Z'
1225	708	93383	711	92707
1227	884	77243	889	76207
	772	85577	863	79411
	748	89363		
	718	91943		
1229	900	74843	963	70951
			777	84919
			775	85201
1231	900	75227	899	75337
	898	75557	763	86851
	890	76697	695	94837
			555	99733
1233	952	72269	857	80473
			755	88819
1235	784	84053	909	74323
	758	88301	791	83383
	716	93047	783	84247
			777	85597
			693	95461
1237	970	70823	871	79279
	780	85223	777	85843
	778	85661		
	718	92699		
	698	94949		
1239	718	93131	863	80233
			727	91459
			559	99661

N	N'	Z	N''	Z'
1241	343	60077	957	72493
	912	74573	721	92593
	894	77261		
	728	91529		
	726	92009		
	696	95507		
1243	782	85607	873	79693
	716	93911	763	88261
			723	92347
1245	772	86771	719	93559
1247			977	70981
			699	95629
1249	966	72101	701	95419
	904	76367		
1251	772	87797	458	56149
			985	70507
			787	85621
			763	89317
1253	960	73043	915	75367
	788	85691	803	83227
			775	87121
			767	88861
1255	884	79151	791	85297
	872	80537		
1257	886	78989	791	85549
	884	79433	781	86353

N	N'	Z	N''	Z'
1259	694	96587	482	54421
			885	79561
			771	88771
1261	714	94541	798	42331
	566	99989	705	95959
1263	910	77213	482	54709
1265	798	85109		
	772	89189		
	742	91577		
1267	485	54437	802	42283
	892	79319	782	43867
	818	82613	787	86413
			773	89227
			747	90901
1269	928	75149	482	54949
			745	91369
			733	93487
			731	93901
1271	920	76343	983	72109
1273	814	83561	901	78439
	786	87587	751	90841
			711	96043
1275	487	54617	791	86587
1277	818	83339	897	79669
			793	86491
1279	742	92867	905	78511

N	N'	Z	N''	Z'
1281	890	80567	937	75079
	718	95651	929	75991
			745	92377
1283	744	92957	791	87973
1285	798	86477		
1289	824	83609	935	75931
			927	77479
			801	86311
1291	817	42323	803	86197
	930	77267	787	89371
	812	85643	751	92311
1293	788	89459	725	95569
1295	948	74903	933	77239
	748	93497	817	85081
1297	545	51797	752	46507
	940	76103	901	80599
	804	86813	831	83299
	734	94613	821	84559
	732	94907		
1299	1024	70313	905	80173
	754	92693		
1301			1019	71059
1303	547	51893	798	44371
			756	46411
1305			959	74587
			941	77029
			811	86293

N	N'	Z	N''	Z'
1307	910	80309	927	78157
	822	85667	755	93463
1309	828	84761	963	74419
1311	838	83639	923	79309
			799	89443
1313			757	93739
			737	95383
1315	914	80471	1031	70867
	772	91373	817	86371
1317	503	54629	830	42667
	914	80747	833	84793
			817	86599
			739	95467
1319	962	75611	1031	71347
	956	76091	963	75403
	804	89399		
1321	966	75161	833	85213
1323	503	54869	818	43627
	746	95027		
1325	744	95339	959	76369
			849	83269
1327	513	54101	814	44203
	507	54581	783	90787
	932	79691	749	94873
	840	84551		
	744	95603		

N	N'	Z	N''	Z'
1329	838	85229		
1331	972	75353	963	76519
	944	78167	941	78697
			853	83221
			827	86341
1333	1044	71081	783	91237
	926	80603		
1335	842	85133	841	85453
			787	90931
1337	788	90989	967	76579
	772	93581	939	79699
1339	1056	70229	979	75211
			965	77137
			777	92791
1341	778	92861	967	77017
			605	99667
1343	946	79139	751	95911
1345			831	87517
1347			955	78229
			953	78553
			821	89413
1349	832	87911		
	790	91823		
1351	856	84443	1065	70309
	834	87671		
1353			973	77491

N	N'	Z	N''	Z'
1357	800	90917	837	87877
			761	95527
1359	992	75479	869	83557
	760	95891	839	87631
			767	94903
1361			1053	72043
			835	88339
			833	88903
1363	1068	70949	983	76963
1365	836	88721	997	75307
1367	774	94547	793	92899
1369			845	87697
1371	992	76487		
	988	77171		
1373			995	76147
			993	76603
			853	86389
1375	992	76883		
1377	796	93323	839	89491
1379			1067	72019
			999	76243
			771	95947
1381			977	78571

N	N'	Z	N''	Z''
1383	802	92951	1003	75979
			857	86923
			775	95701
1385	798	93851		
1387	880	84137	875	85093
	846	89303	849	88867
	776	95819		
1389	890	83273		
1391	864	86423		
	854	88211		
	804	93371		
1393	860	87623	985	78643
			967	80683
			853	88807
1395	884	84407		
1397	1092	71333	1005	77419
	1022	75029		
1399	986	79031	857	88657
			821	91411
1401	790	95021		
1403	1032	74453	811	93337
	890	84179		
1405	886	85193	869	87133
	856	89513	857	89293
			789	95317

N	N'	Z	N''	Z''
1407	892	84263	989	79579
			811	93787
1409	1022	75941	1015	77269
	892	84521		
1411	860	89417	1103	71317
			889	85411
			789	95923
1413	820	92753	821	92557
1415			1041	74413
			821	92809
1417	898	84377	1005	78163
	878	86951		
	874	87881		
1419	800	95063	1027	76387
1421			883	86323
			877	87751
1423			1115	70957
			989	80491
1425	1028	76907	799	95581
	914	83093		
1427	1010	78437	882	43669
			835	91957
1429	547	54443	1117	71341
	884	87083		
1431	808	94811		

N	N'	Z	N''	Z''
1435	1032	77477		
	908	84713		
	904	85451		
	842	91463		
1437	1040	76403		
1439			877	89449
1441	1052	75431	1015	79159
	894	86579		
	884	88379		
	808	95561		
1451			1049	76717
			841	93097
1457	860	90731	1031	78487
	842	93419		
1459	846	92987	857	91243
1463	1128	72533	1059	76333
	904	87473	1031	79063
	848	93083	857	91753
			821	95443
1467	910	86627	847	93607
			827	95083
1469	906	87917		
1471	900	88997	927	85363
			909	87433
1475	946	83117	857	92569
	852	93479		

N	N'	Z	N''	Z''
1477	1140	72341	1045	78541
	858	92627	865	91801
			829	95401
1481	918	86843	947	83563
	828	95957		
1483	904	89381	1145	72277
1487	1076	76463	1165	70999
1489	872	91811	835	95539
	866	92363		
1491			913	88813
1493	880	90971	941	85303
1495	946	84701		
1497			925	87481
1499	1084	76649	1061	78427
	930	86573		
	870	92723		
1503	1090	75989		
	872	92849		
	868	93557		
1505	954	84317		
	888	90803		
1507	936	86441	955	84391
1509	1102	75347		
1513	1064	79451		
	940	86381		

N	N′	Z	N″	Z′
1517	940	86939		
1519	892	91283		
	890	91691		
1521	940	87407		
1527			901	90793
1529			887	92893
			855	95917
1531	1078	79283	899	91303
1533	940	88523		
	898	91757		
1537			975	84181
			949	87589
1541	1128	74933	969	85717
	864	95597		
1545	872	94889		
1549	1116	77237	907	91867
	948	88937		
	900	92567		
1553	984	84437	1079	80557
			901	92857
1555	1144	74411		
	994	83621		
1559	986	84809	875	95413
1561	908	92333		
	906	92717		

N	N′	Z	N″	Z′
1563			983	85669
1565	1128	77093	987	85159
	1102	79259	919	91291
	986	85427		
	972	86453		
	958	88853		
1567	1130	77003	969	87181
	992	84533	961	88471
	956	89237	925	90709
1571	1228	71339		
1575			1109	79273
1577			975	87277
1583	1120	78539	971	88423
	920	92489		
1585			1159	75181
			919	93001
1591	984	87149	983	87511
			919	93481
1595			973	89269
1597	987	43691		
1601	928	93077	1171	75109
1603			1011	85147
			977	89431
1611			989	88237

N	N′	Z	N″	Z′
1613	984	89261	995	87853
	936	92789		
1615			1001	86857
1617	934	93491	1025	84313
1619	1004	86729	1173	76213
			991	88873
			941	92467
1621			1173	76441
1623	952	91571	1027	84697
1625	1172	76949	917	94933
1633	1000	88793	1177	77101
1637	1002	88883		
1641	1198	75437		
	1004	89003		
1643	1016	87179		
1647	1160	79193		
	1010	88499		
1649			1043	84787
1651	1058	83243	1019	87739
1653	970	91433		
1657			1199	76471
			1049	84523
			1015	88681
			957	93529
1665			1049	85429

N	N′	Z	N″	Z′
1669	1022	88811		
1679	1064	84389		
1687	1220	76631	979	92761
1691			1223	76597
1693	1032	89387	1045	87691
1695	1048	87257		
1703			1205	78517
			1043	88729
1705			991	92461
1709			1251	74923
1711	1238	76493	1083	84589
1717	1060	87641		
1719	964	95531		
1727	1222	78509	1013	91573
1729			1251	76507
1733			1075	86629
			1001	93493
1735	1222	79181		
	1076	86711		
1737	1072	87767		
1739	1272	75083		
1741	1364	70997	1259	76651
1745	1068	88919	1079	87223
1747			1015	92581

N	N'	Z'	N''	Z''
1749			1027	91309
1751			1269	76123
1757	1086	87323		
1763	1276	76379		
1765			1117	84631
1769			1097	86743
1781			1091 1043	88663 91813
1785	1102	87629		
1793	1052	91493		
1797	1102	88493		
1803	1106	88397		
1805			1049	92503
1807	1120 1060	86861 91541		
1811	1148	84299		

N	N'	Z'	N''	Z''
1823	1130 1118	86837 88469		
1825			1283	79531
1829			1131	87187
1831	1158	84827		
1841			1167	84307
1843			1129	88651
1847	1140 1082	87719 91733	1301	79147
1861	1140	88667	1177	84811
1865	1084	92459		
1867	1160 1154	86357 87317		
1871	1156	87509		
1877	1322	79187		
1879	1092	92507	1189	84691

N	N'	Z'	N''	Z''
1889			1091	93523
1909			1171	88411
1913			1181	87643
1927	1182	88427		
1929	1192	87443		
1931	1222	84659		
1939	1222	85331		
1943	1140	91499		
1949			1131	92779
1957	1210	87251		
1961			1241	84649
1969			1217	87337
1975			1219	87721
1987	1432	77141		
2051	1298 1272	84629 86693		

N	N'	Z'	N''	Z''
2059			1277 1261	86677 88741
2069			1267	88789
2077	1282	87701		
2083	1288 1276	87221 88661		
2089	1322	84653		
2101			1219	92821
2131			1343	85333
2141			1327	86869
2143			1325	87253
2207	1364	87383		
2309			1427	87403
2311			1429	87211
2317			1419	88747

Bei Beschränkung auf die unter 100.000 gelegenen Primzahlen bleiben also bis zur höchsten Coordinirten aller dyadisch sechzehnstelligen Primzahlen: 1597 folgende 104 ungerade Zahlen theils unbesetzt, theils ohne Z' (letzte Ziffer besternt) beziehungsweise Z'' (erste Ziffer unterstrichen):

861*, 951*, 1035*, 1047*, 1059*, $\underline{1}101$, 1149, 1155, 1157*, $\underline{1}191$, 1195*, 1197, $\underline{1}207$, $\underline{1}209$, 1211*, $\underline{1}221$, 1247*, $\underline{1}265$, $\underline{1}285$, 1287, 1301*, 1305*, 1313*, $\underline{1}329$, 1345*, 1347*, $\underline{1}349$, 1353*, 1355, 1361*, 1369*, $\underline{1}371$, 1373*, $\underline{1}375$, 1379*, 1381*, $\underline{1}385$, $\underline{1}389$, $\underline{1}391$, $\underline{1}395$, $\underline{1}401$, 1415*, 1421*, 1423*, $\underline{1}431$, 1433, $\underline{1}435$, $\underline{1}437$, 1439*, 1443, 1445, 1447, 1449, 1451*, 1453, 1455, 1461, 1465, $\underline{1}469$, 1473, 1479, 1485, 1491*, $\underline{1}495$, 1497*, 1501, $\underline{1}503$, $\underline{1}505$, $\underline{1}509$, 1511, $\underline{1}513$, 1515, $\underline{1}517$, $\underline{1}519$, $\underline{1}521$, 1523, 1525, 1527*, 1529*, $\underline{1}533$, 1535, 1537*, 1539, 1543, $\underline{1}545$, 1547, 1551, $\underline{1}555$, 1557, $\underline{1}561$, 1563*, 1569, $\underline{1}571$, 1573, 1575*, 1577*, 1579, 1581, 1585*, 1587, 1589, 1593, 1595*, $\underline{1}597$.

Bezeichnet man im Folgenden allgemein den Quotienten, welcher sich bei Division der Anzahl aller bis 10^n vorkommenden Primzahlen von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ durch die Anzahl der zu ihrer dyadischen Coordination erforderlichen ungeraden Zahlen ergibt, mit q_n, so resultiren auf Grundlage der hier berechneten Tabelle speciell für $n = 2, 3, 4, 5$ die Gleichungen:

$$q_2 = \frac{23}{9} = 2.5555556, \quad q_3 = \frac{166}{39} = 4.2564103,$$

$$q_4 = \frac{1227}{185} = 6.6324324, \quad q_5 = \frac{9590}{860} = 11.1511628,$$

welche das theoretisch geforderte Ansteigen von q_n mit zunehmendem n deutlich ersichtlich machen. Um übrigens für die nächste Specialisirung: q_6 vorläufig wenigstens einen unteren Grenzwerth zu gewinnen, erwäge man, dass die 78496 innerhalb der ersten Million vorkommenden Primzahlen von der Gestalt $6l \pm 1$ bei dyadischer Schreibweise nur je drei- bis zwanzig Ziffern beanspruchen, mithin die höchsten bei ihrer dyadischen Coordination in Betracht kommenden Zahlen — unter e_n den Nenner des n^{ten} Näherungsbruches der Entwicklung:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}$$

verstanden — nach einem bekannten Satze[1] der Nennergruppe:

$$e_{20} = 10946, \quad e_{20}-e_1 e_{15} = 9959, \quad e_{20}-e_3 e_{13} = 9815,$$
$$e_{20}-e_5 e_{11} = 9794, \quad e_{20}-e_7 e_9 = 9791, \quad e_{20}-e^2_8 = 9790,$$
$$e_{20}-e_{10} e_6 = 9789, \quad e_{20}-e_{12} e_4 = 9781, \quad e_{20}-e_{14} e_2 = 9726,$$
$$e_{20}-e_{16} = 9349$$

angehören. Hievon beziehen sich 10946, 9794, 9790 und 9726 ausnahmslos auf Zahlen der Form $3l$, während den sechs übrigen Nennern durch die beigesetzten Zähler folgende meist zusammengesetzte Zahlen coordinirt werden:

(1) Zu 9959 durch

$3804: 1^2 0101010101010101 0^2 1^2 = 873811 = (53)(16487)$.
$4181: 1^2 0^2 1010101010101010 1^2 = 830123 = (7)(118589)$,
$5778: 101^2 0101010101010101 = 742741 = (47)(15803)$,
$6155: 1010101010101010 1^2 01 = 699053$ als Primzahl Z',

[1] Vgl. Simony a. a. O. S. 241—245.

(2) Zu 9815 durch

3749 : $1^2010101010101010^2101^2$ = 873803 = (7) (43) (2903),
3804 : $1^2010^21010101010101^2$ = 862891 = (23) (37517),
6011 : $10101^2010101010101010$1 = 709973 = (11) (19) (43) (79),
6066 : 101010101010101^20101 = 699061 = (11) (103) (617).

(3) Zu 9791 durch

3740 : $1^2010101010^21010101^2$ = 873643 als Primzahl Z'',
3741 : $1^20101010^2101010101^2$ = 873131 = (7^2) (103) (173),
6050 : $101010101^20101010101$ = 699733 als Primzahl Z'',
6051 : $10101010101^201010101$ = 699221 „ „ Z'.

(4) Zu 9789 durch

3736 : $1^2010101^20101010101^2$ = 875179 = (43) (20353),
3739 : $1^20101010101^2010101^2$ = 873899 = (13^2) (5171),
6050 : $101010101010^21010101$ = 698965 = (5) (43) (3251),
6053 : $10101010^210101010101$ = 697685 = (5) (139537),

(5) Zu 9781 durch

3715 : $1^20101^2010101010101^2$ = 879275 = (5^2) (35171),
3736 : $1^201010101010101^20101^2$ = 873835 = (5) (174767),
6045 : 10101010101010^210101 = 699029 = (19) (36791),
6066 : $101010^21010101010101$ = 693589 = (13) (53353).

(6) Zu 9349 durch

2584 : $1^30101010101010101^2$ = 961195 = (5) (192239),
3571 : $1^20101010101010101^3$ = 873815 = (5) (174763),
5778 : 10101010101010101010^21 = 699049 = (13) (53773),
6765 : $10^21010101010101010101$ = 611669 = (113) (5413).

Der Quotient q_6 besitzt mithin den unteren Grenzwerth:

$$\frac{78496}{4675} = 16.7905882.$$

Vereinigt man schliesslich alle hier auf rein arithmetischem Wege festgestellten topologischen Primzahlen mit den früher bekannt gewordenen zu einer einzigen aufsteigenden Reihe, so ergibt sich bei gesonderter Zählung der Anzahlen: ζ', ζ'' ihrer Glieder von den Formen $6l-1$ und $6l+1$ die nachstehende Tabelle, in welcher jede auch in der vollständigen Primzahlenreihe unmittelbar auf die vorhergehende folgende Primzahl durch ein Sternchen gekennzeichnet ist.

ζ'	ζ''	p	ζ'	ζ''	p	ζ'	ζ''	p	ζ'	ζ''	p
1	—	5	24	—	587	48	—	1367	—	67	2707
—	1	7*	25	—	593*	49	—	1373*	—	68	2713
2	—	11*	26	—	599*	—	44	1381*	70	—	2729
—	2	13*	—	23	601*	50	—	1427	—	69	2731*
—	3	19	—	24	613	—	45	1429*	71	—	2741*
3	—	23*	27	—	617*	—	46	1447	—	70	2749*
—	4	37	—	25	619*	51	—	1451*	72	—	2777
4	—	41*	28	—	647	—	47	1483	—	71	2791
—	5	43*	29	—	659	52	—	1499	—	72	2797*
5	—	47*	—	26	661*	53	—	1571	—	73	2803
6	—	53*	—	27	673*	—	48	1579*	73	—	2837
—	6	61	30	—	677*	54	—	1583*	74	—	2843*
—	7	73	31	—	683*	55	—	1619	—	74	2857
7	—	83	—	28	691*	—	49	1621*	75	—	2897
8	—	89*	—	29	727	—	50	1627*	76	—	2903*
—	8	103	—	30	733*	56	—	1637*	—	75	2917
9	—	107*	—	31	739*	—	51	1723	77	—	2957
—	9	109*	—	32	757	—	52	1741	78	—	2963*
—	10	139	32	—	761*	—	53	1831	79	—	2969*
10	—	149*	33	—	809	—	54	1873	—	76	3049
—	11	151*	—	33	811*	57	—	1907	—	77	3163
11	—	167	34	—	821*	—	55	2137	—	78	3181
12	—	173*	—	34	823*	—	56	2203	—	79	3187*
—	12	181	35	—	839	58	—	2213	80	—	3209
13	—	197	—	35	853*	—	57	2221*	—	80	3217*
14	—	227	36	—	881	—	58	2251	81	—	3221*
—	13	229*	37	—	947	59	—	2333	—	81	3253
—	14	271	38	—	971	60	—	2339*	82	—	3257*
—	15	277*	—	36	991	—	59	2341*	—	82	3271
—	16	283	—	37	1063	—	60	2347*	—	83	3307
15	—	293*	—	38	1069*	61	—	2357	—	84	3313*
—	17	307*	39	—	1109	—	61	2371*	83	—	3407
16	—	311*	—	39	1117*	—	62	2377*	84	—	3413*
—	18	313*	40	—	1163	62	—	2381*	—	85	3433*
—	19	331	—	40	1171*	—	63	2389	85	—	3491
17	—	347	41	—	1181*	63	—	2393*	—	86	3499*
18	—	383	42	—	1187*	64	—	2411	—	87	3547
—	20	397	43	—	1193*	65	—	2423	—	88	3739
19	—	401*	44	—	1229	66	—	2441	86	—	3797
20	—	443	—	41	1237*	67	—	2459	87	—	3947
21	—	467	45	—	1259	—	64	2467*	88	—	4217
—	21	547	46	—	1301	—	65	2473*	—	89	4261
22	—	557*	47	—	1319	68	—	2477*	89	—	4373
23	—	563*	—	42	1321*	69	—	2633	90	—	4397
—	22	571	—	43	1327*	—	66	2647*	—	90	4441

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
91	—	4457	—	114	5479	135	—	6863	—	158	9619*
92	—	4493	113	—	5483*	—	137	6949	—	159	9643
93	—	4517	—	115	5527	136	—	6959*	—	160	9649*
—	91	4519*	—	116	5557	—	138	6997	159	—	9689
94	—	4523*	—	117	5563*	137	—	7001*	—	161	9781
—	92	4639	—	118	5581	138	—	7013*	—	162	9787*
95	—	4649	—	119	5653	139	—	7019*	160	—	9803
—	93	4651*	—	120	5689	140	—	7079	—	163	9811*
—	94	4663	114	—	5711	141	—	7253	—	164	9817*
96	—	4679	115	—	5717*	—	139	7297	—	165	9829*
97	—	4691*	116	—	5741	—	140	7333	161	—	9833*
98	—	4703*	117	—	5783	142	—	7487	162	—	9851
99	—	4751	118	—	5801	143	—	7499	—	166	9883
—	95	4759*	119	—	5807*	—	141	7507	—	167	9901
—	96	4783*	120	—	5813*	144	—	7529	—	168	9907*
100	—	4787*	—	121	5821*	—	142	7603	—	169	9931
—	97	4789*	121	—	5843	145	—	7703	163	—	9941*
101	—	4793	—	122	5851	—	143	8539	164	—	10037
—	98	4813	122	—	5861	—	144	8677	165	—	10061
102	—	4889	123	—	5981	—	145	8887	166	—	10067*
—	99	4903*	—	123	6217	—	146	8923	167	—	10091
—	100	4909*	124	—	6311	146	—	8933	—	170	10099
103	—	4937	125	—	6317*	—	147	9001	168	—	10391
—	101	4951	126	—	6323*	147	—	9011	169	—	10457
—	102	4957*	127	—	6359	—	148	9013*	—	171	10459*
104	—	4967*	—	124	6361*	—	149	9043	—	172	10477
—	103	4969*	—	125	6421	—	150	9049*	—	173	10567
105	—	4973*	—	126	6469	—	151	9067	170	—	10589*
106	—	5003	—	127	6481	—	152	9127	—	174	10597*
—	104	5011	128	—	6491*	148	—	9137	171	—	10601*
—	105	5179	129	—	6551	149	—	9323	172	—	10607*
—	106	5227	—	128	6553*	150	—	9371	—	175	10639
107	—	5273	—	129	6571	—	153	9397	—	176	10651*
108	—	5303	130	—	6581	151	—	9413	173	—	10667
—	107	5323	131	—	6599*	152	—	9419*	174	—	10709
109	—	5333*	—	130	6691	—	154	9421*	—	177	10711*
—	108	5347*	—	131	6709	153	—	9431*	175	—	10733
110	—	5399	—	132	6733	—	155	9463	176	—	10781
—	109	5413	132	—	6761	154	—	9491	—	178	10789*
111	—	5417*	—	133	6763*	155	—	9497*	177	—	10799*
—	110	5419*	133	—	6803	156	—	9539	—	179	10837
—	111	5431*	—	134	6823*	—	156	9547*	178	—	10847*
—	112	5443	134	—	6827*	157	—	9551*	179	—	10853*
—	113	5449*	—	135	6829*	158	—	9587*	180	—	10859*
112	—	5471*	—	136	6841	—	157	9613	—	180	10861*

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
—	181	10867*	202	—	13163	226	—	17987	251	—	19403
—	182	10909	203	—	13397	227	—	18059	—	246	19531
—	183	10939	—	205	13477	—	226	18061*	252	—	19541*
181	—	10949*	204	—	13487*	228	—	18089	—	247	19543*
—	184	10957*	205	—	13499*	229	—	18131	—	248	19603
—	185	10987	—	206	13591	—	227	18133*	—	249	19609*
182	—	11003	206	—	13613	230	—	18149	253	—	19661*
183	—	11057	207	—	13619*	231	—	18233	—	250	19687
—	186	11083	208	—	13649	—	228	18253	—	251	19753
184	—	11087*	—	207	13669*	—	229	18517	—	252	19759*
185	—	11093*	209	—	13781	—	230	18583	254	—	19763*
—	187	11113*	210	—	13877	232	—	18587*	255	—	19793
186	—	11117*	—	208	13879*	—	231	18637	—	253	19801*
—	188	11131	—	209	13903	233	—	18731	—	254	19813*
187	—	11159	211	—	13967	234	—	18749	—	255	19819*
188	—	11177	212	—	13997*	235	—	18773	—	256	19861
—	189	11353	213	—	14009	—	232	18787*	—	257	19891
189	—	11411	—	210	14011*	—	233	18793*	—	258	19927
—	190	11443	—	211	14251	236	—	18797*	256	—	20021
190	—	11447*	—	212	14629	237	—	18803*	257	—	20051
—	191	11527	214	—	14669	—	234	18859	—	259	20107
191	—	11549*	—	213	14779	238	—	18869*	258	—	20117
—	192	11593	215	—	15017	239	—	18899*	259	—	20123*
192	—	11597*	—	214	15061	—	235	18919	—	260	20149
193	—	11621	216	—	15083	240	—	19013	—	261	20173
—	193	11689	—	215	15541	241	—	19031*	260	—	20183
—	194	11731	217	—	15581	242	—	19037*	261	—	20627
—	195	11863	—	216	16447	—	236	19051*	262	—	20759
194	—	11867*	—	217	16741	—	237	19081	263	—	20807
195	—	11981	—	218	16981	243	—	19139	264	—	20903
196	—	12107	—	219	16987*	—	238	19141*	265	—	20921*
—	196	12613	218	—	17189	244	—	19157*	266	—	20939
—	197	12619*	219	—	17321	245	—	19163*	—	262	21013
—	198	12697	—	220	17491	246	—	19211	—	263	21031
197	—	12713	220	—	17573	—	239	19213*	267	—	21059*
—	199	12739	221	—	17579*	—	240	19219*	—	264	21067
—	200	12853	—	221	17581*	—	241	19237	268	—	21101
—	201	12889*	—	222	17623	—	242	19249*	269	—	21107*
198	—	12941	222	—	17627*	247	—	19301	270	—	21143
—	202	12973	—	223	17707	—	243	19309*	—	265	21157
199	—	12983	—	224	17737	248	—	19319*	—	266	21163*
200	—	13001*	223	—	17747*	—	244	19333*	—	267	21169*
—	203	13003*	—	225	17749*	249	—	19373*	271	—	21179*
—	204	13033	224	—	17783	250	—	19379*	—	268	21193
201	—	13109	225	—	17837	—	245	19381*	—	269	21211*

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
272	—	21221*	296	—	22859	—	313	26437	—	336	30103
273	—	21227*	297	—	22871	319	—	26669	341	—	30293
274	—	21269	298	—	22961	320	—	26711	342	—	30347
—	270	21283	—	291	22963*	—	314	26839	—	337	30391
275	—	21323	—	292	22993	321	—	26921	343	—	31013
276	—	21341*	—	293	23131	—	315	26953	344	—	31397
—	271	21397	299	—	23159	—	316	26959*	—	338	31963
277	—	21419	—	294	23173	322	—	26987	—	339	33013
—	272	21589	300	—	23189*	323	—	27059	345	—	33461
—	273	21613	301	—	23201	—	317	27061*	—	340	33493
—	274	21649	—	295	23203*	—	318	27091	—	341	34123
—	275	21661*	—	296	23209*	324	—	27107	—	342	34147
—	276	21673*	—	297	23269	325	—	27179	346	—	34217
278	—	21683*	302	—	23339	326	—	27191*	—	343	34381
279	—	21713	—	298	23371	—	319	27211	347	—	35117
—	277	21739	303	—	23399*	327	—	27239*	—	344	35149
—	278	21787	—	299	23719	—	320	27253	348	—	35153*
280	—	21803	—	300	23899	—	321	27259*	—	345	35227
—	279	21817*	—	301	23917	—	322	27367	—	346	35251*
281	—	21821*	304	—	23957	—	323	27427	—	347	35401
282	—	21839*	—	302	23977	328	—	27437	—	348	35419
283	—	21851	—	303	24109	329	—	27479	—	349	35437
284	—	21863	—	304	24169	330	—	27509	—	350	35491
—	280	21871*	—	305	24229	331	—	27611	349	—	35507*
285	—	21911	305	—	24923	—	324	27691	—	351	35509*
—	281	21943	306	—	24971	—	325	27817	—	352	35527
—	282	21961*	307	—	25013	332	—	27851	350	—	35531*
286	—	21977*	308	—	25163	333	—	27941	—	353	35533*
287	—	22067	309	—	25253	—	326	27943*	351	—	35537*
288	—	22091	310	—	25307	334	—	27947*	352	—	35543*
—	283	22123	311	—	25703	—	327	28081	353	—	35597
289	—	22133	—	306	25747	—	328	28123	—	354	35671
—	284	22153	—	307	25771	335	—	28307	—	355	35677*
290	—	22157*	312	—	25799	—	329	28387	354	—	35753
—	285	22159*	313	—	25931	—	330	29101	355	—	35993
—	286	22171*	—	308	25939	336	—	29339	—	356	36007
—	287	22189*	314	—	25943*	—	331	29347*	356	—	36011*
291	—	22229	315	—	26021	337	—	29363*	—	357	36013*
292	—	22283	316	—	26183	338	—	29387	357	—	36131
293	—	22307	317	—	26189*	—	332	29629	—	358	36187
294	—	22349	—	309	26227	—	333	29863	358	—	36251
—	288	22381	—	310	26263	339	—	29867*	—	359	36523
295	—	22697	318	—	26267*	—	334	29917	—	360	36529
—	289	22717	—	311	26293*	—	335	29989	359	—	36629
—	290	22741	—	312	26347	340	—	30011*	—	361	36709

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
360	—	37013	385	—	38237*	409	—	39659	432	—	42221
361	—	37019*	386	—	38261	—	403	39703	—	425	42283
362	—	37061	—	382	38281	410	—	39719	433	—	42293*
—	362	37171	—	383	38299	—	404	39727*	434	—	42299*
—	363	37189	—	384	38317	—	405	39733*	435	—	42323
363	—	37223	387	—	38321*	411	—	39749*	—	426	42331*
364	—	37307	—	385	38329	—	406	39769	—	427	42349
—	364	37339	388	—	38333*	—	407	39979	436	—	42359*
365	—	37463	—	386	38449	412	—	39989	—	428	42391
—	365	37483*	389	—	38501	413	—	40037	—	429	42397*
366	—	37493	390	—	38543*	—	408	40099	—	430	42403*
367	—	37517	391	—	38567	414	—	40151	437	—	42407*
368	—	37529*	—	387	38569*	415	—	40169	438	—	42443
369	—	37547	392	—	38603	—	409	40213	—	431	42451*
—	366	37549*	—	388	38611	—	410	40231*	—	432	42457*
—	367	37573	—	389	38629*	—	411	40237*	439	—	42533
—	368	37579*	393	—	38669	416	—	40277	440	—	42569
370	—	37589*	—	390	38671*	—	412	40357	—	433	42571*
—	369	37591*	394	—	38699	417	—	40787	—	434	42643
371	—	37607*	—	391	38713	—	413	41077	—	435	42649*
372	—	37649	—	392	38749	418	—	41189	—	436	42667*
—	370	37657*	—	393	38803	419	—	41387	441	—	42677*
373	—	37691	—	394	39019	—	414	41389*	—	437	42697
—	371	37717	395	—	39113	420	—	41549	442	—	42701*
—	372	37747*	396	—	39191	421	—	41579*	—	438	42703*
374	—	37781*	397	—	39227	422	—	41609	—	439	42709*
375	—	37799	—	395	39229*	423	—	41621	443	—	42797
376	—	37811*	—	396	39241	—	415	41641	—	440	42841
—	373	37813*	398	—	39251*	—	416	41659	—	441	42853*
—	374	37957	—	397	39301	424	—	41669*	—	442	42859*
—	375	37963*	399	—	39317	—	417	41719	—	443	43177
—	376	37987	400	—	39323*	425	—	41771	—	444	43189*
—	377	37993	401	—	39341*	426	—	41813	444	—	43223
377	—	37997*	402	—	39371	—	418	41941	—	445	43237*
378	—	38039	—	398	39451	427	—	42071	445	—	43283
—	378	38053	403	—	39461*	—	419	42073*	446	—	43319
379	—	38069*	—	399	39499*	428	—	42101	447	—	43331
—	379	38083*	404	—	39509	429	—	42131*	448	—	43397
—	380	38119	—	400	39511*	—	420	42139*	449	—	43403
380	—	38183	405	—	39563	—	421	42157*	—	446	43411*
381	—	38189*	406	—	39569*	—	422	42169*	—	447	43441
—	381	38197*	407	—	39581*	430	—	42179*	450	—	43499
382	—	38201*	—	401	39607*	—	423	42181*	451	—	43541
383	—	38219*	—	402	39619*	—	424	42187*	—	448	43543*
384	—	38231*	408	—	39623*	431	—	42197	—	449	43573*

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
452	—	43577*	—	476	45673*	—	497	50341	—	522	53593
—	450	43591	471	—	45707	—	498	50359*	—	523	53611
—	451	43597*	472	—	45737*	—	499	50461	515	—	53681
453	—	43607*	—	477	45751*	—	500	50503	516	—	53861
—	452	43609*	473	—	45779	495	—	50513*	517	—	53927
454	—	43613*	474	—	45869	—	501	50539	518	—	53939*
—	453	43627*	475	—	45971	—	502	50581	—	524	53959
455	—	43661	476	—	45989	—	503	50773	—	525	54037
—	454	43669*	—	478	46027	496	—	50867	—	526	54091
456	—	43691*	477	—	46133	—	504	50893	519	—	54101*
—	455	43717	478	—	46187	—	505	51349	520	—	54371
—	456	43753	—	479	46219	497	—	51413	—	527	54409
457	—	43853	479	—	46229*	498	—	51479	521	—	54413*
—	457	43891	—	480	46237*	—	506	51511	522	—	54419*
—	458	43933	—	481	46261*	499	—	51539	—	528	54421*
—	459	43951	480	—	46307	500	—	51563	523	—	54437*
—	460	43987	—	482	46309*	—	507	51607	524	—	54443*
—	461	44119	—	483	46381	—	508	51637	525	—	54539
—	462	44131	—	484	46441	501	—	51767	526	—	54563
458	—	44171	—	485	46477	—	509	51787	—	529	54601
—	463	44179*	481	—	46499	502	—	51797*	527	—	54617*
459	—	44189*	—	486	46507*	503	—	51803*	528	—	54629
460	—	44201*	482	—	46511*	—	510	51817*	—	530	54631*
—	464	44203*	483	—	46523*	504	—	51827*	—	531	54667
461	—	44249	—	487	46633	—	511	51829*	—	532	54679
462	—	44267	484	—	46649	—	512	51853	—	533	54709
—	465	44269*	485	—	46691	—	513	51859*	529	—	54713*
463	—	44357	486	—	46757	505	—	51869*	—	534	54829
—	466	44371*	487	—	46769*	—	514	51871*	530	—	54869
464	—	44381*	—	488	46771*	506	—	51893*	—	535	54949
—	467	44389	—	489	46807*	507	—	51899*	—	536	54979
465	—	44453	488	—	46829	—	515	51949	—	537	55603
—	468	44491	489	—	46901	—	516	52057	—	538	55621
466	—	44501	—	490	46933	—	517	52069	—	539	55639
467	—	44621	490	—	46997	508	—	52127	—	540	55717
—	469	44647	—	491	47317	509	—	52313	531	—	55721*
—	470	44893	491	—	47339*	510	—	52361	—	541	55897
—	471	45403	492	—	47459	511	—	52391	532	—	55901*
468	—	45413*	—	492	47521	512	—	52517	—	542	55987
—	472	45481	—	493	47701	513	—	52571	533	—	56099
469	—	45497	493	—	47717	—	518	52627	—	543	56101*
—	473	45541	—	494	47917	514	—	52691	—	544	56149
—	474	45613	—	495	47947	—	519	52813	534	—	56171
470	—	45659	—	496	47977	—	520	52951	—	545	56599
—	475	45667*	494	—	48299	—	521	53419	535	—	56663

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
536	—	56747	—	568	70891	—	593	73387	—	614	75979
—	546	58027	559	—	70937	579	—	73907	603	—	75989
—	547	58057	560	—	70949*	—	594	74323	604	—	76079
—	548	58543	—	569	70951*	580	—	74381	—	615	76123
—	549	58549*	—	570	70957*	581	—	74411	—	616	76129*
—	550	58573	—	571	70981	—	595	74413*	—	617	76147*
537	—	58679	561	—	70991*	—	596	74419*	—	618	76207
—	551	58693	562	—	70997*	582	—	74441*	—	619	76213*
—	552	58699*	—	572	70999*	—	597	74449*	605	—	76253
—	553	58711*	—	573	71011*	583	—	74453*	—	620	76261
538	—	58733	—	574	71023*	—	598	74587	—	621	76333
539	—	59051	—	575	71059	584	—	74597*	606	—	76343*
—	554	59053*	563	—	71069*	—	599	74827	—	622	76369
540	—	59561	564	—	71081*	585	—	74843	607	—	76379*
541	—	59723	—	576	71089*	586	—	74903	—	623	76387*
542	—	59753	565	—	71261	—	600	74923*	608	—	76403*
—	555	59797	—	577	71317	587	—	74933	—	624	76441
543	—	59957	566	—	71327*	—	601	75079	609	—	76463*
544	—	60077	567	—	71333	588	—	75083*	—	625	76471*
545	—	60317	568	—	71339*	—	602	75109*	610	—	76487
546	—	60761	—	578	71341*	589	—	75149	611	—	76493*
—	556	62299	—	579	71347*	590	—	75161*	—	626	76507*
—	557	62773	—	580	71353*	—	603	75181	—	627	76519
—	558	67927	569	—	71387	—	604	75193*	—	628	76579
547	—	68171	—	581	71389*	591	—	75209*	—	629	76597*
—	559	68437	—	582	71479	—	605	75211*	612	—	76631
548	—	68909	570	—	71861	—	606	75223	613	—	76649*
—	560	69031	—	583	71899	592	—	75227*	—	630	76651*
549	—	70061	—	584	72019	—	607	75253	—	631	76717
550	—	70229	—	585	72043	—	608	75307	614	—	76847
—	561	70309	571	—	72101	—	609	75337	615	—	76883
551	—	70313*	—	586	72109	593	—	75347*	616	—	76907*
552	—	70379	—	587	72139*	594	—	75353*	617	—	76943
—	562	70423	572	—	72269	—	610	75367*	618	—	76949*
553	—	70451	—	588	72277	595	—	75431	—	632	76963
554	—	70487	573	—	72341	596	—	75437*	619	—	77003
—	563	70489*	—	589	72367	597	—	75479*	—	633	77017*
—	564	70501*	—	590	72469	—	611	75541	620	—	77093
—	565	70549	—	591	72493	598	—	75611	—	634	77101*
555	—	70571*	574	—	72503	599	—	75617*	621	—	77141
556	—	70823	575	—	72533*	600	—	75629	622	—	77201
557	—	70841*	576	—	72617	601	—	75653	623	—	77213*
—	566	70843*	—	592	72997	—	612	75883	624	—	77237*
—	567	70867	577	—	73043	—	613	75931	—	635	77239*
558	—	70877*	578	—	73079	602	—	75941	625	—	77243*

ζ′	ζ″	P	ζ′	ζ″	P	ζ′	ζ″	P	ζ′	ζ″	P
—	636	77269	646	—	79397	672	—	84377	—	703	85837
626	—	77351	647	—	79451	673	—	84389*	694	—	86183
627	—	77417	—	661	79531	—	680	84391*	—	704	86197*
—	637	77419*	—	662	79579	674	—	84407	—	705	86323
628	—	77477	648	—	79589*	—	681	84421*	695	—	86357
—	638	77491	—	663	79669	675	—	84437	696	—	86423
629	—	77513	—	664	79693	676	—	84443*	697	—	86441*
630	—	77543	—	665	80173	—	682	84499	698	—	86477
—	639	77557	649	—	80231	—	683	84589	—	706	86587
631	—	77621	—	666	80233*	677	—	84629*	699	—	86627
632	—	78101	650	—	80309	—	684	84631*	—	707	86629*
—	640	78121*	651	—	80471	—	685	84649*	—	708	86677*
633	—	78137*	—	667	80473*	678	—	84653*	—	709	86689*
—	641	78139*	—	668	80557	679	—	84659*	700	—	86729
—	642	78157*	652	—	80567*	—	686	84691	—	710	86743*
—	643	78163*	653	—	80681	—	687	84697*	701	—	86771
—	644	78229	654	—	81233	680	—	84701*	702	—	86837
—	645	78259	655	—	81293	681	—	84761	703	—	86843*
—	646	78427	—	669	82981	—	688	84787*	—	711	86857
634	—	78437*	656	—	83117	682	—	84809	704	—	86861*
—	647	78439*	657	—	83177	—	689	84811*	—	712	86869*
—	648	78487	658	—	83219	683	—	84827*	705	—	86939
635	—	78509	659	—	83243	684	—	85061	—	713	87133
—	649	78511*	660	—	83273	—	690	85093	706	—	87149*
—	650	78517*	661	—	83339	685	—	85109	707	—	87179
636	—	78539*	—	670	83341*	686	—	85133	—	714	87181*
—	651	78541*	662	—	83417	—	691	85147*	—	715	87187*
—	652	78571	—	671	83557	—	692	85159*	—	716	87211*
—	653	78643	663	—	83561*	687	—	85193*	708	—	87221*
—	654	78691	—	672	83563*	—	693	85213	—	717	87223*
637	—	78707	664	—	83609	688	—	85229	709	—	87251*
638	—	78989	665	—	83639	—	694	85297	—	718	87253*
639	—	79031	—	673	83641*	—	695	85303*	710	—	87257*
640	—	79139	—	674	83653*	689	—	85331	—	719	87277*
—	655	79147*	666	—	84053	—	696	85333*	711	—	87323
641	—	79151*	—	675	84067	—	697	85363	—	720	87337*
—	656	79153*	—	676	84121	—	698	85429	712	—	87383
—	657	79159*	667	—	84137	—	699	85453	—	721	87403*
642	—	79181*	—	677	84181	690	—	85469*	713	—	87407*
643	—	79187*	668	—	84263	—	700	85549	714	—	87443
644	—	79193*	669	—	84299*	691	—	85607	—	722	87481
—	658	79273	—	678	84307*	—	701	85669	715	—	87491*
—	659	79279*	—	679	84313*	—	702	85717	716	—	87509*
645	—	79283*	670	—	84317*	692	—	85733*	—	723	87511*
—	660	79309	671	—	84347	693	—	85817	—	724	87517*

ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P	ζ'	ζ''	P
717	—	87623	—	742	88789	755	—	91499*	—	772	93337
718	—	87629*	735	—	88793*	756	—	91571	770	—	93383
719	—	87641	736	—	88811	—	757	91573*	771	—	93491
—	725	87643*	—	743	88813*	—	758	91591	—	773	93523
—	726	87691	—	744	88843	757	—	91811	—	774	93559
—	727	87697*	737	—	88883	—	759	91867	—	775	93607
720	—	87701*	738	—	88919	758	—	92333	—	776	93739
721	—	87719*	—	745	88993	759	—	92459	772	—	93851
—	728	87721*	739	—	88997*	—	760	92461*	773	—	93893
—	729	87739*	—	746	89017	—	761	92503	774	—	94541
722	—	87767	740	—	89261	760	—	92507*	775	—	94547
723	—	87797	—	747	89269*	—	762	92557	—	777	94771
724	—	87833	741	—	89381	—	763	92569	776	—	94811
—	730	87853*	742	—	89387*	—	764	92581*	777	—	94889
—	731	87877	743	—	89417	—	765	92707	—	778	94933
725	—	87911	—	748	89449	761	—	92753	778	—	95021
726	—	87917*	744	—	89459*	—	766	92761*	779	—	95063
—	732	87961	—	749	89491	—	767	92779	780	—	95339
—	733	87973*	745	—	89501*	—	768	92821	—	779	95413
—	734	88117	746	—	90281	762	—	92861	—	780	95419*
—	735	88237	—	750	90523	763	—	92867	781	—	95531
727	—	88241*	747	—	90731	—	769	92893*	—	781	95539*
728	—	88397	—	751	90793	—	770	92899*	—	782	95569
—	736	88411*	748	—	90833	764	—	92951	—	783	95581*
—	737	88423*	749	—	90917	765	—	92957*	—	784	95911
729	—	88427*	750	—	90971	766	—	92987	782	—	96557
730	—	88493	751	—	90989	767	—	93077	783	—	96587
731	—	88523	—	752	91237	768	—	93131	—	785	97003
732	—	88547*	—	753	91243*	—	771	93253	784	—	97157
—	738	88651	752	—	91283	769	—	93323	—	786	99607
—	739	88657*	—	754	91303						
—	740	88663	—	755	91309*						
733	—	88667*	753	—	91433						
734	—	88721	—	756	91453*						
—	741	88747	754	—	91493						

Hienach befinden sich unter den bis 100.000 vorkommenden Primzahlen nur 1570 topologische, von welchen 635 isolirt, dagegen 935 Primzahlen als Glieder von Zahlengruppen auftreten. Es enthält nämlich die in Rede stehende Zahlenreihe 192 zweigliedrige, ferner 67, 37, 18, 12 drei-, vier-, fünf- und sechsgliedrige Zahlengruppen, sowie ausserdem in

19301, 19309, 19319, 19333, 19373, 19379, 19381;
38183, 38189, 38197, 38201, 38219, 38231, 38237

zwei siebengliedrige, in

42101, 42131, 42139, 42157, 42169, 42179, 42181, 42187;
79139, 79147, 79151, 79153, 79159, 79181, 79187, 79193

zwei achtgliedrige, endlich in

87179, 87181, 87187, 87211, 87221,
87223, 87251, 87253, 87257, 87277

eine zehngliedrige Zahlengruppe, während bekanntlich in beiden arithmetischen Primzahlenreihen von den Formen $6l - 1$ und $6l + 1$ schon sechsgliedrige lückenlose Zahlengruppen relativ selten vorkommen.

Anderseits umgrenzen je zwei aufeinanderfolgende topologische Primzahlen, zwischen welchen irgend eine Potenz von 2—etwa 2^p—gelegen ist, schon für mässige Werthe von p individuenreiche Gruppen rein arithmetischer Primzahlen, wie aus nachstehendem, deren jeweilige Anzahl: k_p nebst beiden topologischen Grenzzahlen: P'_p, P''_p für $p = 5, 6, \ldots 16$ liefernden Schema hervorgeht:

p	P'_p	k_p	P''_p	p	P'_p	k_p	P''_p	p	P'_p	k_p	P''_p
5	23	2	37	9	467	9	547	13	7703	86	8539
6	61	2	73	10	991	11	1063	14	15581	88	16447
7	109	4	139	11	1907	29	2137	15	31963	109	33013
8	229	7	271	12	3947	28	4217	16	62773	463	67927

Hienach besitzt die Reihe der topologischen Primzahlen auch hinsichtlich ihrer Vertheilung über die vollständige Primzahlenreihe einen eigenthümlichen Charakter, ohne dass sich jedoch vorläufig die Frage entscheiden lässt, ob das einzige allen topologischen Primzahlen gemeinsame arithmetische Merkmal eine selbstständige zahlentheoretische Untersuchung derselben ermöglicht? — In diesem Sinne musste sich die vorliegende Arbeit darauf beschränken möglichst viele für weitere Forschungen verwerthbare specielle Resultate festzustellen und hat ihren Zweck erfüllt, wenn sie wenigstens zur Aufsuchung mathematischer Beweise für jene topologisch-arithmetischen Inductionsschlüsse angeregt hat, deren empirische Grundlage erst durch die hier mitgetheilten numerischen Ergebnisse in allen Details verificirt worden ist.

XVI. SITZUNG VOM 14. JUNI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1894) des 103. Bandes, Abtheilung I, der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner übergibt eine Abhandlung: »Über eine optische Reaction der Bindesubstanzen auf Phenole«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung vom Adjuncten der Prager Sternwarte Dr. R. Spitaler unter dem Titel: »Bahnbestimmung des Kometen 1851 III«.

Der Secretär Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung: »Die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel und auf den Berggipfeln überhaupt«.

XVII. SITZUNG VOM 21. JUNI 1894.

Herr Prof. H. Höfer an der k. k. Berg-Akademie in Leoben übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die geologischen Verhältnisse der St. Pauler Berge im östlichen Kärnten«.

Herr Prof. Dr. Karl Bobek an der k. k. deutschen Universität in Prag übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit unter dem Titel: »Bemerkungen über die Constitution der fetten Säuren und die Löslichkeit ihrer Salze«.

Ferner legt Herr Hofrath Lieben eine Arbeit aus seinem Laboratorium von G. Johanny vor: »Über die Einwirkungsproducte der Blausäure auf Methyläthylacrolein«.

Herr Dr. Ed. Mahler in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Die Apisperiode der alten Ägypter«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Arnoux, G., Essais de Psychologie et de Métaphysique positives. Arithmétique graphiques. Les espaces arithmétiques hypermagiques. Paris, 1894; 8^0.

Caruelii, Th., Epitome florae Europae terrarumque affinium sistens plantas Europae, Barbariae, Asiae occidentalis et

centralis et Sibiriae quoad divisiones, classes, cohortes, ordines, familias, genera ad characteres essentiales exposita. Fasc. I. Monocotyledones. Fasc. II. Dicotyledones. Florentiae, 1892 et 1894; 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg, Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. I. Thermometrische Arbeiten. Berlin, 1894; 4⁰.

SITZUNGSBERICHTE

DER

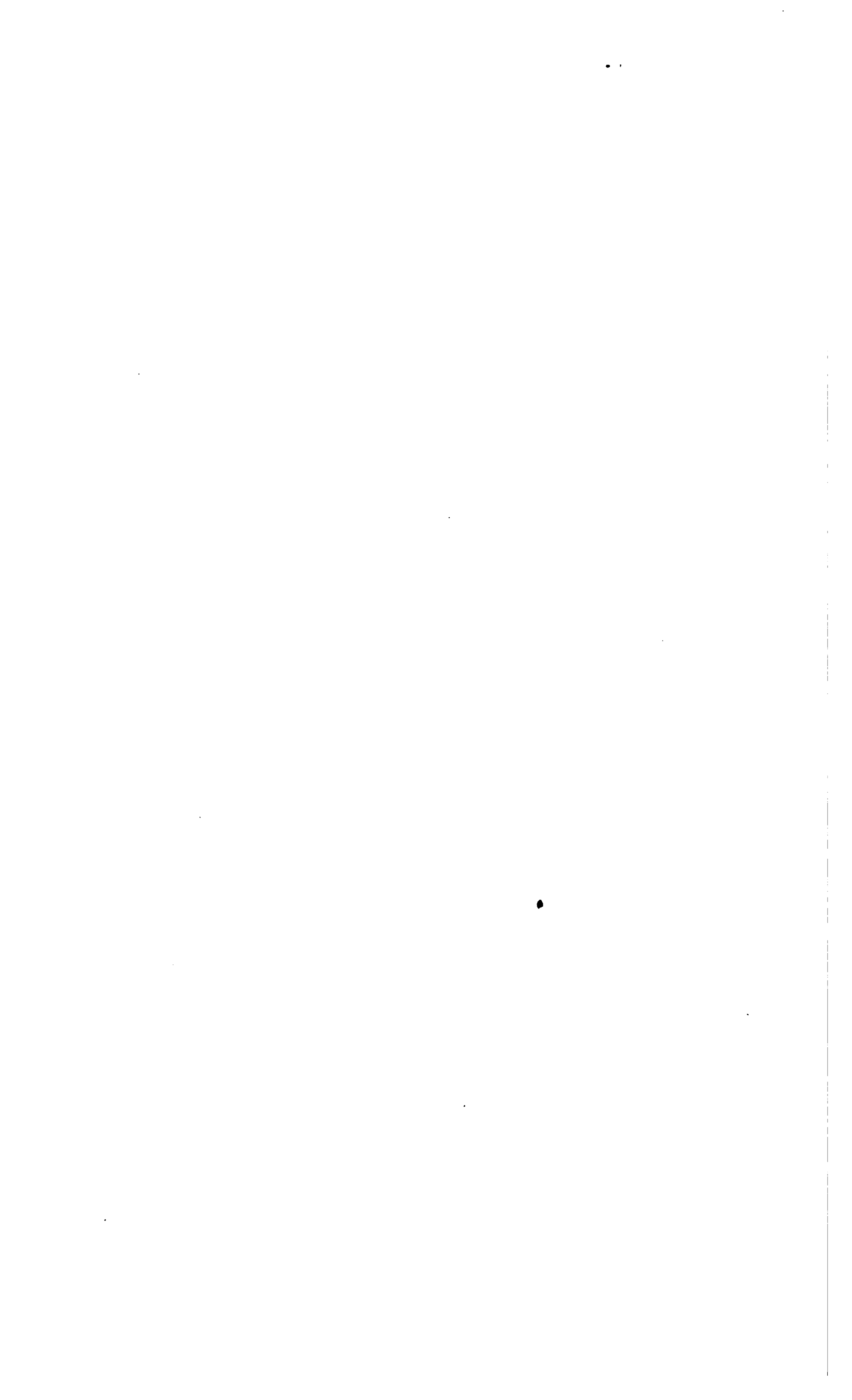
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XVIII. SITZUNG VOM 5. JULI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Doppelheft IV—V (April—Mai 1894) des 15. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Die königl. italienische Botschaft in Wien übermittelt ein Druckwerk von Prof. Roberto Campana an der k. Universität in Rom unter dem Titel: »Lepra«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. Ign. Klemenčič: »Über die circulare Magnetisirung von Eisendrähten«.

Herr P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten, übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von F. Wenzel, betitelt: »Synthese des Kynurins«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. E. Freiherr v. Haerdtl unter dem Titel: »Zur Frage der Perihelbewegung des Planeten Mercur«.

Das c. M. Herr Oberst A. v. Obermayer überreicht eine Abhandlung: »Über die Wirkung des Windes auf schwach gekrümmte Flächen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Campana, R., Lepra. (Mit Illustrationen.) Genova, 1894.

Martel, E. A., Les abîmes, les eaux souterraines, les cavernes, les sources, la spélaeologie. Explorations souterraines effectuées de 1888 à 1893 en France, Belgique, Autriche et Grèce. (Mit Illustrationen.) Paris, 1894; 4⁰.

Die tägliche Periode der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel und auf Berggipfeln überhaupt

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1894.)

Die anemometrischen Aufzeichnungen auf dem Sonnblickgipfel erstrecken sich nunmehr schon auf mehr als sechs Jahre (beginnend mit September 1887). Leider war es bisher wegen Mangel an Arbeitskräften nicht möglich, dieselben vollständig zu reduciren. Bloss die zweijährigen Aufzeichnungen September 1887 bis August 1889 inclusive sind vollständig reducirt, discutirt und auch in extenso veröffentlicht worden. Es geschah dies in der Abhandlung von Herrn Dr. J. M. Pernter: »Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick und einigen anderen Gipfelstationen« (Denkschriften, LVIII. Bd., Wien, 1891. Vorgelegt im December 1890).

Um die jetzt schon vorliegenden anemometrischen Registrirungen wenigstens nach einer Richtung hin verwerthen zu können, liess ich die Windgeschwindigkeit ohne Rücksicht auf die Richtung nach Stundenintervallen für den ganzen restirenden Zeitraum September 1889 bis December 1893 inclusive reduciren und Mittelwerthe der stündlichen Windgeschwindigkeit für die Periode September 1887 bis December 1893 ableiten (October 1888 und Juni 1890 fehlen). Diese Mittelwerthe gedachte ich zunächst einer eingehenderen Discussion zu unterziehen, da die jährliche Periode im täglichen Gange der Windstärke einige Anhaltspunkte für die Aufdeckung der wahren Ursache der letzteren zu liefern

versprach. Die eigentliche Ursache der Umkehrung im täglichen Gange der Windstärke auf hohen Berggipfeln ist ja noch immer nicht vollständig aufgedeckt, denn wenn auch die Espy-Köppen'sche Erklärung derselben für die Höhe des Eiffelthurmes (300 *m*), woselbst die Umkehrung sich bereits eingestellt hat, als vollkommen zureichend erscheint, wofür auch im Folgenden Nachweise gegeben werden, so kann dies doch nicht für die folgenden 4000 *m* mächtigen Luftschichten behauptet werden, in welchen durchwegs, nach den Aufzeichnungen auf Berggipfeln, die Umkehrung des täglichen Ganges gleichfalls eintritt.

Es ist also, wie sich derart herausstellt, die Haupterscheinung im täglichen Gange der Windstärke, dass das Minimum der letzteren um Mittag und das Maximum in der Nacht eintritt, denn so verhält es sich vom Eiffelthurm (300 *m*) aufwärts bis zum Gipfel von Pikes Peak (4308 *m*). Der früher als allgemeine Regel geltende tägliche Gang der Windstärke in der Nähe der Erdoberfläche mit einem Maximum bald nach Mittag und einem Minimum in den frühen Morgenstunden, tritt nach unseren jetzigen Erfahrungen als eine ganz untergeordnete, auf die untersten bloss etwa 200 *m* mächtigen Luftschichten beschränkte Erscheinung dagegen zurück.

So viel ich weiss, war es Herr Dr. G. Hellmann, welcher zuerst die Aufmerksamkeit der Meteorologen auf die unerwartete Thatsache hinlenkte, dass auf Berggipfeln der tägliche Gang der Windstärke der entgegengesetzte sei von jenem an der Erdoberfläche. Es geschah dies in einer Discussion der stündlichen Aufzeichnungen auf dem Mount Washington im Mai 1872 (»Ein Beitrag zur Physik der höheren Luftschichten.« Zeitschrift für Met., B. X, 1875, S. 311). Die späteren Registrirungen der Windgeschwindigkeit auf dem Säntis- und Obirgipfel, die frühesten ihrer Art (beginnend mit August, respective September 1883; jene auf Pikes Peak reichen allerdings weiter zurück, die Ergebnisse derselben sind aber erst spät bekannt geworden) haben diese ersten Andeutungen der Umkehrung des täglichen Ganges der Windstärke in der Höhe vollkommen bestätigt. [1]

[1] Zeitschrift für Met., B. XVIII, 1883, S. 416.

Der Constatirung dieser Thatsache ist aber keineswegs alsbald auch eine zureichende Erklärung derselben gefolgt, denn die ersten darüber ausgesprochenen Ansichten sind wohl bald wieder fallen gelassen worden. Man muss vielmehr gestehen, dass bis zum heutigen Tage die wahre Ursache der Abnahme der Windstärke um Mittag und deren Zunahme in der Nacht auf den Berggipfeln noch keineswegs ganz aufgeklärt ist.

Darum schien mir eine eingehende Discussion des täglichen Ganges der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel, gegründet auf sechsjährige Registrirungen, nicht ohne wissenschaftliches Interesse zu sein.

Herr Dr. Pernter konnte den täglichen Gang der Windstärke auf dem Sonnblick nur im allgemeinen Mittel darstellen, da er bloss über zweijährige Beobachtungen verfügte. Aus den jetzt mehr als sechs Jahrgänge umfassenden Aufzeichnungen lässt sich aber der tägliche Gang auch schon für die einzelnen Monate ableiten, was zu einigen auffälligen Resultaten führte, die mir dann Veranlassung gegeben haben, die jahreszeitlichen Veränderungen im täglichen Gange der Windstärke auch in den Registrirungen auf anderen Berggipfeln aufzusuchen, um zu erfahren, ob die für den Sonnblick gefundenen Resultate eine allgemeinere Geltung beanspruchen dürfen oder nicht. So erweiterte sich mir während der Arbeit die Discussion des täglichen Ganges der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel zu einer Discussion dieser Erscheinung auf den Berggipfeln überhaupt. Die Ergebnisse haben aber nicht ganz meinen Erwartungen entsprochen und entscheidende Resultate haben sich dabei nicht herausgestellt. Eine einheitliche Bearbeitung der jetzt von den Berggipfeln verschiedener Höhe vorliegenden mehrjährigen Registrirungen der Windstärke, wie sie im Nachfolgenden geboten wird, dürfte trotzdem ein grösseres und bleibendes Interesse haben, wie dies der wissenschaftlichen Beschreibung einer Naturerscheinung überhaupt nicht abgesprochen werden kann.

Herr Billwiller in Zürich hat mich bei dieser Arbeit in höchst dankenswerther Weise unterstützt, indem er mir handschriftlich die stündlichen Windgeschwindigkeiten nach den

anemometrischen Aufzeichnungen auf dem Säntisgipfel für die einzelnen Monate der achtjährigen Periode 1886—1893 mitgetheilt hat. Herrn Angot in Paris verdanke ich die freundliche Übermittlung eines Separatabdruckes aus dem noch nicht ausgegebenen Jahrgange 1892 der »Annales du Bureau Central Mét. de France«, die Beobachtungsergebnisse 1892 auf dem Eiffelthurme enthaltend.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel. Die folgende Tabelle enthält die Abweichungen der Stundenmittel der Windgeschwindigkeit (Meter pro Secunde) vom Monatsmittel nach einer ersten Ausgleichung der auch in sechsjährigen rohen Mitteln noch recht störend hervortretenden Unregelmässigkeiten. Die Ausgleichung erfolgte nach dem gewöhnlichen Schema $\frac{1}{4}(a+2b+c)$. Die unmittelbaren Werthe der absoluten Windgeschwindigkeit, sowie der Abweichungen der Stundenmittel von den Monatsmitteln theile ich im Anhange mit. Dort findet man auch einige weitere Erläuterungen und kritische Bemerkungen zu diesen Tabellen.

Die bemerkenswertheste Thatsache, die uns in der Tabelle *A* entgegentritt, ist der frühe Eintritt des Minimums der Windgeschwindigkeit. Im Jahresmittel selbst tritt das Minimum der Windgeschwindigkeit schon um 9^h Vormittag ein. Nach den vorherrschenden Ansichten über die Ursache der täglichen Variation der Windstärke auf den Berggipfeln sollte der Eintritt des Minimums am Nachmittage stattfinden.

Das Maximum der Windgeschwindigkeit stellt sich in den Abend- und Nachtstunden ein, wie wir dies schon von den Berggipfeln wissen.

Selbst die ausgeglichenen Zahlenwerthe der Tabelle *A* zeigen noch so grosse Divergenzen des täglichen Ganges von Monat zu Monat und Unregelmässigkeiten innerhalb desselben Monates, dass man deutlich sieht, dass eine sechsjährige Periode noch zu kurz ist zu einer genaueren Darstellung des jährlichen Ganges der täglichen Variation der Windstärke. Besonders abweichend verhalten sich die Monate October und Jänner.

Um die jährliche Periode im täglichen Gange der Windstärke übersichtlicher darzustellen, so wie sie wahrscheinlich

A. Sonnblickgipfel. Windgeschwindigkeit.

Abweichungen der Stundenmittel vom Monatsmittel. Meter pro Secunde. Ausgeglichene Werthe.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mittn.—1h a.	—·01	·43	—·02	·00	·28	·42	·10	·19	·06	—·45	—·10	·23	·09
1—2	·15	·71*	·16	—·05	·04	·28	—·09	·24	·16	—·42	·05	·28	·13
2—3	·15	·36	—·09	—·29	—·21	—·04	—·23	·19	—·16	—·47*	·07	—·01	—·06
3—4	·22	·41	·06	—·39	—·56	·04	—·26	·39	—·04	—·40	·15	—·03	—·03
4—5	·33	·10	—·13	—·46	—·75	—·22	—·25	·24	—·23	—·31	·14	—·18	—·14
5—6	·43*	—·09	—·28	—·58	—·88*	—·39	—·42	·22	—·28	—·16	·10	—·30	—·22
6—7	·34	—·28	—·46	—·60*	—·79	—·72	—·51	—·15	—·27*	—·17	·02	—·28	—·32
7—8	·29	—·51	—·65	—·51	—·66	—·88	—·64	—·28	—·27	00	—·15	—·34*	—·38
8—9	·01	—·57	—·74*	—·43	—·54	—1·03	—·66*	—·35	—·20	—·09	—·13	—·23	—·41
9—10	—·24	—·75*	—·72	—·25	—·31	—1·03*	—·62	—·47*	—·22	—·04	—·29*	—·25	—·43*
10—11	—·12	—·71	—·60	—·11	—·21	—·94	—·50	—·26	—·15	·05	—·24	—·10	—·33
11—Mittag	—·03	—·61	—·29	·07	·03	—·77	—·34	—·34	—·29	·10	—·08	·01	—·21
12—1h p.	—·14	—·54	—·16	·19	·01	—·58	—·11	—·30	—·15	·20	—·02	·04	—·13
1—2	·24	—·18	·23	·28	·27	—·16	—·07	—·08	—·17	·31	·17	·17	·09
2—3	·07	·13	·11	·35	·15	·00	·27	—·19	—·11	·27	·27*	·16	·10
3—4	·01	·13	·28	·16	·20	·25	·20	—·15	—·06	·31	·14	·04	·12
4—5	·17	·15	·40	·21	·23	·42	·54	—·16	—·01	·46*	·24	·11	·23
5—6	—·12	·15	·35	·08	·13	·53	·55	—·14	—·01	·31	·05	—·13	·14
6—7	—·02	·32	·67	·30	·51	·66	·78*	—·07	·32	·62	·14	·06	·36
7—8	—·24	·06	·48*	·31	·51	·74	·62	·19	·30	·27	—·06	·04	·26
8—9	—·32	·32	·56	·54*	·76	·84	·60	·28	·54*	·25	—·03	·13	·37*
9—10	—·45*	·27	·37	·50	·80*	·89*	·48	·36	·52	—·08	—·17	·13	·30
10—11	—·44	·32	·28	·40	·55	·91	·41	·40*	·39	—·23	—·17	·27	·26
11—Mittn.	—·24	·62	·23	·35	·54	·73	·26	·33	·37	—·31	—·07	·30*	·26
Mittel	·20	·36	·35	·31	·41	·56	·40	·25	·22	·26	·13	·16	·22

aus langjährigen Mitteln sich ergeben dürfte, habe ich auf die noch nicht ausgeglichenen Stundenmittel der Windgeschwindigkeit die Bessel'sche Formel angewendet, mich aber mit der Berechnung von zwei Gliedern begnügt. Es handelt sich ja nur um eine Herausschälung der einfachsten und wichtigsten Charakterzüge des täglichen Ganges der Windstärke, und diesen Zweck erreicht man am sichersten durch Berechnung der ersten Glieder einer periodischen Reihe.

Die zur Ableitung des jährlichen Ganges der Constanten der Bessel'schen Formel verwendeten Reihen, sowie die Zwischenrechnungen enthält die Tabelle III des Anhanges. Da die Berechnung der Constanten auf Grund der unmittelbar aus der Reduction der Anemogramme erhaltenen Zahlen vorgenommen worden war, mussten die numerischen Coëfficienten hinterher auf absolutes Mass (Centimeter pro Secunde) reducirt werden, wozu ich den Factor 34·7 verwendete.

Die Constanten des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel (Centimeter pro Secunde. $x = 0$ für Mitternacht).

	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	21	19	92°6	1°5
Februar	33	27	114·8	325·3
März	45	13	142·8	348·4
April	63	26	158·0	105·0
Mai	74	26	157·2	114·3
Juni	75	5	147.6	351·8
Juli	67	13	138·7	325·6
August	50	6	140·5	145·6
September	31	15	165·6	177·8
October	25	12	209·5	263·5
November	18	16	230·1	340·3
December	3	21	142·5	25·4
Jahr	38	6	149·9	15·9

Mittelst dieser Constanten wurde der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit in den einzelnen Monaten berechnet und die Tabelle B erhalten.

B. Berechneter täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

Centimeter pro Secunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mitternacht	21	9	25	49	52	39	37	35	8	— 24	— 19	11	21
1ʰ a.	30	16	21	30	25	24	29	21	— 7	— 29	— 14	18	15
2	34*	24	16	4	— 7	7	19	5	— 21	— 29*	— 7	22*	6
3	33	29*	7	— 24	— 40	— 11	6	— 10	— 31	— 26	— 2	19	— 4
4	26	28	— 5	— 52	— 66	— 30	— 9	— 24	— 35	— 20	— 1*	11	— 15
5	14	21	— 19	— 72	— 84	— 47	— 26	— 35	— 35*	— 14	— 2	0	— 25
6	— 1	7	— 34	— 84	— 92*	— 63	— 43	— 42	— 30	— 10	— 6	— 12	— 34
7	— 16	— 12	— 46	— 84*	— 88	— 73	— 59	— 46	— 24	— 7	— 10	— 20	— 41
8	— 28	— 31	— 55	— 75	— 75	— 79*	— 72	— 46*	— 17	— 5	— 14*	— 24*	— 43*
9	— 35	— 48	— 58*	— 58	— 58	— 78	— 78*	— 44	— 11	— 5	— 14	— 22	— 42
10	— 35*	— 58	— 54	— 37	— 38	— 71	— 77	— 40	— 8	— 5	— 10	— 15	— 37
11	— 29	— 59*	— 45	— 15	— 19	— 58	— 68	— 35	— 7	— 4	— 2	— 4	— 29
Mittag	— 20	— 50	— 30	2	— 5	— 41	— 51	— 28	— 7	0	8	7	— 18
1ʰ p.	— 10	— 34	— 13	15	5	— 20	— 31	— 20	— 7	7	19	16	— 6
2	0	— 14	4	22	12	1	— 8	— 11	— 5	14	28	21*	5
3	5	6	19	24	18	22	15	— 1	0	23	34*	20	15
4	7*	22	30	26	25	39	34	11	8	30	33	13	22
5	5	32	37	28	33	54	49	23	19	34	27	3	28
6	0	34	39*	32	45	64	58	35	29	34*	17	— 7	31
7	— 4	30*	38	40	58	69	61*	45	38	29	5	— 15	32
8	— 6*	22	35	49	70	71*	61	52	43*	20	— 8	— 18*	33*
9	— 4	13	32	58	79	68	57	55*	42	8	— 17	— 16	31
10	2	7	29	62*	79*	61	51	53	35	— 5	— 22	— 9	29
11	11	6*	27	60	71	52	45	47	23	— 16	— 23*	1	26
Mittel	16	25	30	42	48	48	43	32	20	17	14	13	24

Die berechneten Werthe des täglichen Ganges lassen die jährliche Periode desselben schon etwas klarer zu Tage treten. Im Jahresmittel tritt das Minimum der Windstärke schon um 8^h Morgens ein, das Maximum um 8^h Abends. In den Wintermonaten liegt das Minimum näher dem Mittag, im Frühjahre tritt es zeitlich am Morgen ein, im Sommer wieder näher dem Mittag und im Herbste tritt es sogar noch in der Nacht (während der ersten Morgenstunden) ein. Im October und November nähert sich der tägliche Gang jenem in der Niederung, nur mit dem Unterschiede, dass das Maximum der Windstärke erst gegen Abend statt früh am Nachmittage eintritt. Freilich ist dann überhaupt der tägliche Gang sehr schwach entwickelt, was auch für den Winter gilt, wo doppelte Maxima und Minima auftreten.

Am grössten ist die Amplitude der täglichen Variation der Windstärke von März bis August inclusive, das Maximum der täglichen Variation tritt im Mai und Juni ein.

Bei den Unregelmässigkeiten, welche selbst der berechnete tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel noch in den Monatsmitteln zeigt, erscheint es zweckmässig, Mittel für die Jahreszeiten zu bilden und einer ähnlichen Berechnung zu unterwerfen. Ich habe desshalb die unmittelbar aus den Beobachtungen folgenden stündlichen Mittel der Windgeschwindigkeiten für die vier Jahreszeiten gebildet und nach der Bessel'schen Formel berechnet.

Die Gleichungen des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit für die Jahreszeiten sind ($x = 0$ für Mitternacht, Centimeter pro Secunde):

Winter .... $20 \cdot 1 \sin(106^\circ 4 + x) + 18 \cdot 9 \sin(2^\circ 8 + 2x)$

Frühling .... $56 \cdot 5 \sin(159 \cdot 0 + x) + 14 \cdot 4 \sin(98 \cdot 1 + 2x)$

Sommer .... $61 \cdot 6 \sin(135 \cdot 8 + x) + 7 \cdot 0 \sin(331 \cdot 0 + 2x)$

Herbst .... $21 \cdot 7 \sin(182 \cdot 4 + x) + 13 \cdot 9 \sin(268 \cdot 3 + 2x)$

Mittelst dieser Formeln erhält man folgende stündliche Windgeschwindigkeiten:

Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht......	20	35	39	—15
1ʰ a...........	27	17	30	—19
2	31*	— 3	19	—19*
3	29	—25	5	—16
4	21	—44	—10	—13
5	8	—59	—26	— 9
6	— 7	—67	—41	— 8
7	—21	—68*	—54	— 8
8	—31	—61	—63	—11
9	—37*	—50	—68*	—14
10	—35	—35	—66	—17
11	—29	—20	—59	—16
Mittag..........	—18	— 6	—46	—13
1ʰ p...........	— 7	5	—30	— 6
2	3	14	—11	4
3	9	21	7	16
4	11*	27	24	26
5	9	32	38	33
6	5	38	48	35*
7	0	45	54	33
8	— 2	50	56*	26
9	— 1	54*	55	15
10	4	53	52	3
11	11	47	47	— 7

Im Winter erinnert der tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel an jenen, wie ich ihn für Sturmtage in Wien gefunden habe, im Herbst ist er jenem in der Niederung ähnlich. In diesen beiden Jahreszeiten ist aber der tägliche Gang überhaupt unregelmässig und schwach entwickelt (mittlere Ordinate 16 *cm*).

Im Frühling und Sommer ist die tägliche Variation mehr als doppelt so gross (mittlere Ordinate 36 und 39 *cm*) und das Minimum fällt dann auf 8ʰ Vormittag im Mittel, das Maximum auf 9ʰ Abend.

Wir stehen also jedenfalls der bemerkenswerthen Thatsache gegenüber, dass das Minimum der täglichen Windstärke auf dem Sonnblickgipfel nicht am Nachmittage und auch nicht um Mittag, sondern früh am Vormittage um 8^h oder 9^h eintritt. Würde die Ursache der Abschwächung der Windgeschwindigkeit bei Tage auf den Berggipfeln in Übereinstimmung mit der Espy-Köppen'schen Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke an der Erdoberfläche in der Mischung der unteren und oberen Luftschichten infolge der täglichen Erwärmung und den dadurch hervorgerufenen aufsteigenden und niedersinkenden Bewegungen der Lufttheilchen zu suchen sein, so müsste das Minimum der Windstärke im täglichen Gange sich nach oben hin verspäten und könnte auf dem Sonnblickgipfel in 3100 *m* Seehöhe jedenfalls erst ziemlich spät am Nachmittage eintreten. Ich stimme der Espy-Köppen'schen Erklärung der täglichen Periode der Windstärke an der Erdoberfläche vollkommen bei, weil alle Thatsachen für dieselbe sprechen. Ihre unmittelbare Anwendung aber auf die Erklärung des umgekehrten täglichen Ganges der Windstärke auf den hohen Berggipfeln schien mir stets unzulässig, da die Wirkung der Mischung der unteren trägen Luftmassen mit den höheren rascher bewegten sich wohl nicht zu so grossen Höhen erstrecken kann. Seitdem wir aber nun wissen, dass selbst schon in 300 *m* Höhe das Minimum der Windstärke bei Tage eintritt, und dass die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit, wie wir sie an der Erdoberfläche überall mit grösster Gleichmässigkeit beobachten, sich nicht einmal bis zu 200 *m* über die Erdoberfläche erstreckt, kann wohl nicht mehr die Rede davon sein, dass die Abnahme der Windstärke bei Tage auf den hohen Berggipfeln ein directer Ausfluss der Espy-Köppen'schen Theorie sei.

Die kaum 200 *m* mächtigen trägeren Luftmassen in der Nähe der Erdoberfläche können doch unmöglich die mindestens 2000—3000 *m* mächtigen Schichten über sich derart beeinflussen, wobei noch zu bedenken ist, dass die Amplitude der täglichen Variation der Windstärke auf den hohen Berggipfeln mindestens eben so gross oder selbst noch grösser ist als jene der täglichen Variation an der Erdoberfläche. Ginge die Ab-

schwächung der Windstärke bei Tage von unten aus, so müsste sie nach oben hin immer kleiner werden und würde wohl in relativ geringen Höhen kaum noch merklich sein, wobei der Eintritt des Minimums nach oben sich verspäten müsste. Die Thatsachen stehen mit diesen kaum abzuweisenden Consequenzen der erwähnten Ansicht vollkommen in Widerspruch.

Man hat für die Abschwächung der Windstärke bei Tage auf den Berggipfeln auch eine andere Ursache angeführt, die manches für sich zu haben scheint und die auch mir stets recht wahrscheinlich erschienen ist. Es ist dies die Wirkung der an den Bergseiten aufsteigenden Luftbewegung bei Tage als eine Folge der Erwärmung der Thäler und Bergabhänge.

Die an den Berghängen tagsüber aufsteigenden Thalwinde könnten wohl auf den Berggipfeln eine Abschwächung der von einem horizontal gestellten Robinson'schen Schalenkreuz gemessenen Luftbewegungen hervorbringen. Wenn aber die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit in erster Linie durch diese aufsteigenden Luftströmungen hervorgerufen würde, dann müsste wohl das Minimum der Windgeschwindigkeit im täglichen Gange auf den Nachmittag fallen, gerade so, wie die anderen aus diesem Vorgange stammenden meteorologischen Phänomene, so z. B. die Bewölkung, die Regen- und Gewitterbildung an den Gebirgen. Das frühe Eintreten des Minimums der Windstärke schon vor dem Mittag auf dem Sonnblickgipfel steht damit nicht in Übereinstimmung. Da wir keine stündlichen Schätzungen der Bewölkung haben, so will ich an Stelle derselben die Registrirungen des Sonnenscheins anführen, wobei natürlich zu beachten ist, dass der Gang der Bewölkung der umgekehrte von jenem der Häufigkeit des Sonnenscheins ist.

Zeit											
6/7	7/8	8/9	9/10	10/11	11/Mg.	0/1	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6
Dauer des Sonnenscheins (Frühling und Sommer)											
8·2	12·6	13·8	**13·8**	13·1	11·6	10·5	9·8	9·1	8·4	7·6	5·6
Abweichungen der Windgeschwindigkeit (Centimeter pro Secunde)											
−56	**−70**	−66	−57	−50	−33	−7	0	22	23	10	31

Wenn die aufsteigende Luftbewegung die Hauptursache der Abschwächung der Windstärke bei Tage auf dem Sonnblickgipfel wäre, dann müsste diese aufsteigende Luftbewegung schon ziemlich früh am Morgen zwischen 7^h und 9^h ihr Maximum erreichen. Das ist nun an sich schon sehr unwahrscheinlich, wird aber auch direct widerlegt durch den täglichen Gang der Bewölkung. Gerade die Stunden, welche dem von dem Gange der Windstärke geforderten Maximum der aufsteigenden Luftbewegung folgen, d. i. 8^h bis 10^h Vormittag, haben die grösste Frequenz des Sonnenscheins, also die geringste Bewölkung aufzuweisen. Die aufsteigende Luftbewegung kann also nicht so früh am Vormittage ihr Maximum erreichen, wie dies ja auch dem Gange der täglichen Erwärmung widerspricht. Die Bewölkung nimmt Nachmittags sehr rasch zu, die Differenz in der Dauer des Sonnenscheins in den gleich weit von Mittag (eigentlich $11^1/_2{}^h$ a. m.) abstehenden Stunden ist

$10^1/_2{}^h$ a.—$0^1/_2{}^h$ p. = 2·6 Stunden,
$9^1/_2$ a.—$1^1/_2$ p. = 4·0 »
$8^1/_2$ a.—$2^1/_2$ p. = 4·7 »
$7^1/_2$ a.—$3^1/_2$ p. = 4·2 »

Die Bewölkung erreicht demnach erst um 2^h bis 3^h Nachmittag ihr Maximum, wie dies auch dem Gange der Erwärmung der Berghänge und der Stärke der Thalwinde vollkommen entspricht.

Wenn also die aufsteigenden Bergwinde die Hauptursache des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln wären, dann müsste das Minimum der Windstärke erst am Nachmittage nach 3^h etwa eintreten, nicht aber schon am Vormittage.

Der tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel unterstützt demnach keineswegs die Annahme, dass es der aufsteigende Thalwind sei, welcher die Abschwächung der Windstärke daselbst hervorbringt.

Es muss wohl hervorgehoben werden, dass diese Annahme auch die Voraussetzung enthalten würde, dass der auf den Berggipfeln registrirte tägliche Gang der Windstärke nur eine locale Erscheinung sei, die in der freien Atmosphäre nicht zur

Beobachtung gelangen könnte, weil die aufsteigenden Winde ja nur den Gebirgen eigenthümlich sind.

Alle Erfahrungen und desgleichen alle rationellen Vorstellungen über den täglichen verticalen Luftaustausch in der Atmosphäre infolge des täglichen Ganges der Erwärmung widersprechen der Annahme, dass in der freien Atmosphäre bis zu Höhen von mehreren tausend Metern hinauf eine Mischung der unteren und oberen Luftschichten stattfinden könne.

Nachdem wir derart gefunden haben, dass die Registrirungen der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel keiner der bisherigen Ansichten über die Ursache des täglichen Ganges der Windstärke auf den hohen Berggipfeln entsprechen, müssen wir nun aber auch der Tragweite dieser Beobachtungen uns versichern. Wir müssen zunächst untersuchen, ob nicht vielleicht der tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel durch Zufälligkeiten und ganz locale Verhältnisse derart modificirt wird, dass er weder für noch gegen die bisher aufgestellten Ansichten über die Ursache der täglichen Variation der Windgeschwindigkeit auf Berggipfeln geltend gemacht werden kann. Diese Untersuchung ist aber auf keinem anderen Wege zu führen, als dadurch, dass wir den täglichen Gang der Windstärke auf anderen hohen Berggipfeln wenigstens für die vier Jahreszeiten ableiten und nachsehen, in wie weit derselbe mit den für den Sonnblick gefundenen Resultaten übereinstimmt. Eine übersichtliche Darstellung des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln ist meines Wissens bisher überhaupt noch nicht versucht worden und darum dürften die nachfolgenden Zusammenstellungen, bei denen auf möglichst vollständige Vergleichbarkeit das grösste Gewicht gelegt worden ist, für alle ferneren Untersuchungen über die tägliche Variation der Windgeschwingkeit auf Berggipfeln von einigem Nutzen sein.

Natürlich suchte ich zunächst den täglichen Gang der Windstärke auf dem Säntisgipfel mit jenem auf dem Sonnblick zu vergleichen, da letzterer nach Höhe und Lage, sowie infolge der günstigen Aufstellung des Anemometers das beste Vergleichsmaterial zu liefern versprach.

Herr Director R. Billwiller in Zürich hat mir mit grösster Zuvorkommenheit die monatlichen Stundenmittel der Wind-

stärke auf dem Säntis für die ganze Periode 1886—1893 handschriftlich zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm grossen Dank schulde. Die mittleren stündlichen Windgeschwindigkeiten aus acht Jahrgängen abgeleitet, findet man, in Meter pro Secunde ausgedrückt, in der Tabelle IV des Anhanges zu dieser Abhandlung.

Es wurden auf Grund derselben die Abweichungen der Stundenmittel von den entsprechenden Monatsmitteln gebildet und diese hierauf, um einen regelmässigeren, die Haupterscheinungen klarer zum Ausdrucke bringenden Gang zu erhalten, nach dem Schema $^1/_4$ $(a+2b+c)$ ausgeglichen. Ich theile nun die derart ausgeglichenen Werthe hier mit, welche man in der folgenden Tabelle *C* zusammengestellt findet.

Man sieht, dass auch auf dem Säntis das Minimum der Windgeschwindigkeit am Vormittage eintritt, nicht Nachmittags, wie zu erwarten wäre, wenn dasselbe ein Resultat des verticalen Luftaustausches infolge der Erwärmung der untersten Schichten sein würde.

Von einer Verspätung gegenüber dem Maximum der Windgeschwindigkeit an der Erdoberfläche, das in Zürich im Sommer um $2^1/_2{}^h$ Nachmittag eintritt, kann schon gar nicht die Rede sein. Nehmen wir für die Tagesstunden die mittleren Abweichungen der Monate Mai—August, so erhalten wir folgenden Gang der Windgeschwindigkeit:

Säntis (Mai—August) Centimeter pro Secunde

6/7	7/8	8/9	9/10	10/11	11/Mg.	0/1	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6
—6	—26	—49	—70	—83*	—80	—67	—59	—50	—33	—14	+6

Das Minimum der Windstärke tritt also schon um $10^1/_2{}^h$ oder um 11^h Vormittag ein, und die Nachmittagsstunden haben schon wieder eine grössere Windgeschwindigkeit als die entsprechenden vom Mittag gleich weit abstehenden Vormittagsstunden.

Die Stärke des aufsteigenden Luftstromes, des aufsteigenden Thalwindes, hat auch auf dem Säntis sicherlich sein Maximum am Nachmittage, wie dies auch der tägliche Gang der Frequenz des Sonnenscheins, der jenem auf dem Sonnblickgipfel parallel verläuft, bezeugt. Nehmen wir diesmal die mittlere Häufigkeit

C. Säntis. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit

in Abweichungen von den Monatsmitteln (ausgeglichen). Achtjährige Mittel. Centimeter pro Secunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.
12—1h a.	—27	7	—19	49	26	51*	76	69*	75	—5	10	0
1—2	—29*	9	—28	36	4	45	83*	67	76*	—7	6	—15
2—3	—24	4	—32	20	—10	45	78	59	69	—8	—1	—27
3—4	—18	8	—36	15	—10	48	81	54	63	—7	—12	—36
4—5	—14	0	—40	16	—10	32	63	41	48	—10	—22*	—44
5—6	—7	—17	—44*	12	—8	9	21	28	34	—10	—17	—48*
6—7	8	—23	—27	2	—5	—9	—26	16	21	1	—2	—43
7—8	23	—16	—6	—12	—8	—28	—61	—6	—4	5	12	—30
8—9	25	—8	5	—30	—24	—48	—85	—39	—34	1	12	—23
9—10	23	—8	6	—45	—43	—66	—107	—65	—52	—8	2	—18
10—11	25*	—15	9	—52	—46*	—77*	—129	—81*	—60	—27	0	—1
11—Mittag	20	—24*	13	—52*	—39	—70	—134*	—80	—66	—40	1	19
0—1	1	—20	13	—48	—33	—50	—118	—67	—71	—41*	—7	25
1—2	—7	—10	6	—42	—38	—36	—97	—63	—78*	—36	—23	10
2—3	3	—3	7	—35	—38	—32	—71	—61	—79	—25	—24*	9
3—4	16	9	20	—29	—25	—25	—32	—51	—67	—8	—9	45
4—5	16	21	30	—16	—13	—15	5	—34	—56	22	5	66*
5—6	6	25*	34*	12	1	0	31	—9	—46	44	11	53
6—7	0	23	27	30	28	20	55	8	—21	50*	11	39
7—8	—4	18	17	27	50	33	70	13	10	45	7	23
8—9	—4	10	17	24	66	37	75	26	38	32	9	4
9—10	—3	7	16	35	71*	40	79	52	60	24	16*	—7
10—11	—8	3	9	45	58	40	76	61	65	16	14	—4
11—12	—17	0	—5	49*	41	46	69	61	66	2	10	4
Mittel	·14	·12	·19	·30	·29	·38	·72	·46	·52	·20	·10	·25

einer Wolkenhaube auf dem Säntisgipfel, die ja auch zumeist durch die aufsteigende Luftbewegung hervorgerufen wird, als Index für denselben, so finden wir folgende Zahlen:

Mittlere Häufigkeit der Nebeltage auf dem Säntis.

Stunde	7^h a.	10^h a.	1^h p.	4^h p.	9^h p.
Tage	10·8	10·8	11·8	13·5	11·9

Nach diesen Mitteln (für Mai—September) tritt die grösste Nebelfrequenz um 4^h Nachmittag ein, wie dies dem Gange der aufsteigenden Luftbewegung entspricht. Um 10^h Vormittag, wo das Minimum der Windstärke eintritt, ist die Nebelfrequenz dem Minimum nahe.

Es scheint also auch nach den Registrirungen der Windstärke auf dem Säntisgipfel die tägliche Variation der Windgeschwindigkeit mit dem täglichen Gange der aufsteigenden Luftbewegung an den Berghängen in keinem engeren Connex zu stehen.

Da der tägliche Gang der Windstärke in den einzelnen Monatsmitteln selbst aus achtjährigen Registrirungen abgeleitet, noch vielfach unregelmässig verläuft, so habe ich (aus den noch nicht ausgeglichenen Zahlen) Jahreszeitenmittel gerechnet und auf diese die Bessel'sche Formel angewendet. Die auf diesem Wege mittelst zwei periodischen Gliedern erhaltenen Zahlenwerthe finden sich in der folgenden kleinen Tabelle zusammengestellt.

Im Winter ist die Amplitude der täglichen Variation der Windstärke klein (mittlere Ordinate 12 *cm*) und der tägliche Gang kommt jenem in der Niederung an der Erdoberfläche fast gleich. Im Frühling fällt das Minimum auf den Mittag, das Maximum auf 9^h Abends (mittlere Ordinate 20 *cm*), im Sommer, wo der tägliche Gang mehr als viermal stärker auftritt, als im Winter (mittlere Ordinate 52 *cm*), tritt das Minimum schon um 11^h ein und das Maximum um 1—2^h Nachts. Im Herbst verspätet sich das Minimum bis 1^h p. und der Gang verläuft dann jenem in der Niederung fast entgegengesetzt, aber er ist nur schwach entwickelt, wie im Winter (mittlere Ordinate 14 *cm*).

Die absoluten Werthe der Windgeschwindigkeit im Mittel der Jahreszeiten findet man im Anhange (Tabelle X).

Berechneter täglicher Gang der Windstärke auf dem Säntisgipfel (Centimeter pro Secunde).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	—10	21	66	14
1ʰ a.	—14	10	69*	7
2	—17	1	69	2
3	—18*	— 6	63	0
4	—17	—11	51	— 1
5	—15	—13	33	— 1
6	—14	—14	9	0
7	—11	—14	—19	— 2
8	—10	—15	—46	— 5
9	— 7	—18	—70	—10
10	— 5	—22	—87	—16
11	— 2	—26	—95*	—23
Mittag	2	—29*	—93	—28
1ʰ p.	6	—29	—83	—29*
2	11	—25	—64	—26
3	16	—17	—43	—19
4	19	— 6	—20	— 9
5	22*	8	1	3
6	22*	21	19	14
7	19	33	32	23
8	15	39	42	29
9	9	42*	49	29*
10	3	39	56	27
11	— 4	31	61	21

Bei diesen Resultaten angelangt, schien es mir nun von Interesse, den täglichen Gang der Windstärke in den einzelnen Jahreszeiten in allen Höhenstufen zu verfolgen, so weit dies die publicirten Stundenmittel der Windstärke auf Berggipfeln gestatten, wobei natürlich nur mehrjährige Mittelwerthe Verwendung finden konnten. Um den Vergleich durch alle Höhenstufen hindurch führen zu können, berechnete ich auch den täglichen Gang der Windstärke zu Paris und auf dem Eiffel-

thurme aus der Periode Juli 1889 bis inclusive December 1892 (Sommer somit bei beiden Stationen 11 Monate, Herbst 12, Winter 10, Frühling 9). Den Jahrgang 1892 verdanke ich Herrn Alfred Angot.

Zwischen Paris und Eiffelthurm schaltet sich noch die Gipfelstation Blue Hill ein, welche um 100 *m* niedriger ist, als jene auf dem Eiffelthurm, und nur 142 *m* über die umliegende Gegend sich erhebt. Wir haben also

Paris, Bureau Central. Anemometer 54 *m* über dem Meeresniveau, 21 *m* über dem Boden (Juli 1889 bis December 1892 inclusive);

Blue Hill. Anemometer Draper 203 *m* über dem Meere und circa 142 *m* über dem umgebenden Lande (9·5 *m* über dem Berggipfel). Fünfjährige Mittel 1886 bis 1890 inclusive;[1]

Eiffelthurm. Anemometer 338·5 *m* über dem Meere, 305 *m* über dem Boden.

Die Registrirungen zu Paris und auf dem Eiffelthurm sind derart reducirt worden, dass die zu der betreffenden Stunde gehörige momentane Windgeschwindigkeit den Anemogrammen entnommen wurde, und nicht ein mittlerer Werth für ein ganzes Stundenintervall, wie dies bei allen anderen Stationen der Fall ist. Nur auf dem Ben Nevis, wo die Windstärke stündlich geschätzt wird, gilt gleichfalls die Windstärke für die Stunde selbst und nicht für ein Stundenintervall.

Ben Nevis. Mittel der vier Jahre 1884—1887 inclusive. Windstärke geschätzt nach Beaufort's Scala. Durch sehr häufige Vergleichungen der Schätzungen mit den Registrirungen konnte aber eine Reductionsscale aufgestellt werden, die für die mittleren Stärken ziemlich genau gelten dürfte. Ich habe, um eine leichtere Vergleichung der Amplituden zu ermöglichen, nach dieser Scale die geschätzten Stärken auf Meter pro Secunden reducirt. Eine strenge Vergleichbarkeit der Amplituden ist der Natur der Sache nach auch auf diesem Wege nicht zu erreichen. (Transactions Royal Soc. of Edinburgh, vol. XXXIV, Meteorology of Ben Nevis by Alex. Buchan.)

---

[1] Annals of the Astron. Observ. of Harvard College, vol. XXX. P. II, Cambridge 1891.

Obir. Mittel aus den fünf Jahren 1886—1890. Seither wurde das Anemometer günstiger und höher aufgestellt[1] und die mittlere Windgeschwindigkeit kommt nun grösser heraus. Das Mittel der fünf Jahre 1886—1890 ist 14·59 *km* pro Stunde, das Mittel des Jahres 1893 ist aber 19·92. Um auch die absoluten Windgeschwindigkeiten des Obir und die Amplituden der täglichen Variation mit den übrigen Stationen besser vergleichbar zu machen, habe ich die Mittel 1886—1890 auf die neue Aufstellung reducirt und dabei auf den Charakter des Jahres 1893 gegenüber dem Mittel 1886—1890 in Bezug auf Windstärke Rücksicht genommen, soweit die vorliegenden Messungen dies gestatteten.

Die Phasenzeiten des täglichen Ganges stimmen in der fünfjährigen Reihe mit jenen der einjährigen sehr nahe überein, aber die Amplituden der täglichen Variation ergeben sich nun viel grösser, wie folgender Vergleich zeigt.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Obirgipfel im Jahresmittel (Centimeter pro Secunde).

1886—1890 .... $57 \sin(83 \cdot 6 + x) + 20 \sin(205°8 + 2x)$

1893 .... $91 \sin(88 \cdot 4 + x) + 18 \sin(279 \cdot 0 + 2x)$.

Das Minimum der Windgeschwindigkeit fällt in der neuen Reihe näher auf den Mittag, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Obir. Mittlere Windgeschwindigkeit.
(Centimeter pro Secunde. Abweichungen vom Jahresmittel.)

	7/8	8/9	9/10	10/11	11/Mg.	0/1	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	6/7
1893	8	—35	—58	—95	—105*	—99	—95	—83	—71	—60	—37	0
1886/90..	—1	—13	—28	—42	— 54	—68	—73*	—65	—58	—43	—13	16

Wie viel von diesem Unterschied auf Rechnung des einen Jahres 1893 kommt, muss dahingestellt bleiben. Sicher ist nur, dass die tägliche Amplitude in der neuen freieren Aufstellung viel grösser ausfällt.

---

[1] Siehe diese Sitzungsber., B. CII, Abth. II. a. Juliheft 1893.

Säntis und Sonnblick wurden schon oben behandelt, auch Pikes Peak bedarf keines Commentars. Die Mittel sind jene der Jahre 1874—1887.[1]

Ich lasse nun den berechneten täglichen Gang der Windstärke für die vier Jahreszeiten folgen, damit man die Änderung im Eintritt des Minimums vom Winter zum Sommer oder anderseits etwa die Unabhängigkeit der Eintrittszeiten des Minimums von der Jahreszeit leichter zu überblicken vermag.

Berechneter täglicher Gang der Windstärke.

(Centimeter pro Secunde.)

a) Paris, Bureau Central, 21 *m*.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	—18	—56	—58	—27
1h a.	—20	—63	—64	—32
2	—23	—69	—69	—38
3	—27	—71*	—71*	—45
4	—30	—70	—69	—50*
5	—31*	—62	—61	—50
6	—29	—49	—48	—43
7	—23	—32	—30	—30
8	—13	— 9	— 7	—11
9	0	16	19	11
10	15	40	44	34
11	28	61	65	54
Mittag	38	77	81	66
1h p.	44	86	88*	70*
2	45*	86*	87	66
3	40	79	79	54
4	31	67	64	38
5	20	48	46	20
6	9	28	25	4
7	— 1	9	6	— 8
8	— 9	— 8	—12	—16
9	—13	—24	—27	—21
10	—16	—37	—39	—22
11	—17	—47	—49	—24

[1] Man vergl. Meteorolog. Zeitschrift, Bd. XXVI, 1891, S. 219.

Das Minimum der Windgeschwindigkeit tritt im Frühling und Sommer um 2 Stunden früher ein (schon um 3^h Morgens) als im Winter; das Maximum fällt im Winter und Frühling auf die Zeit zwischen 1^h und 2^h, im Sommer etwas näher auf 1^h und im Herbst auf 1^h. Es sind dies die bekannten Eigenthümlichkeiten des täglichen Ganges der Windstärke an der Erdoberfläche.

b) Eiffelthurm, 305 *m*.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	46	130*	138	98
1^h a.	36	127	143*	88
2	34*	116	132	78
3	40	96	106	71
4	52	69	67	64
5	65	36	21	55
6	72*	— 1	— 28	40
7	68	— 39	— 71	17
8	48	— 75	—104	— 14
9	15	—106	—124	— 52
10	— 28	—128	—130*	— 92
11	— 73	—139	—123	—127
Mittag	—112	—141*	—108	—151
1^h p.	—137	—131	— 89	—161*
2	—142*	—112	— 68	—151
3	—127	— 85	— 50	—125
4	— 94	— 55	— 34	— 84
5	— 51	— 21	— 19	— 36
6	— 6	12	— 2	13
7	33	43	17	56
8	60	71	41	87
9	72*	95	68	106
10	60	113	96	112*
11	59	125	121	108

Auf dem Eiffelthurme tritt das Maximum der Windstärke im Winter schon um 9^h ein, im Frühling um Mitternacht, im

Sommer um 1^h Morgens und im Herbst um 10^h p. Das Minimum der Windstärke fällt im Winter auf 2^h p.; zur selben Zeit erreicht an der Erdoberfläche die Windstärke ihr Maximum. Gegen den Sommer hin weicht aber die Eintrittszeit der kleinsten Windgeschwindigkeit immer mehr gegen den Vormittag zurück und fällt im Sommer auf 10^h Vormittag, d. i. fast 4 Stunden früher als die Eintrittszeit des Maximums der Windstärke unten. Im Herbste fallen die entgegengesetzten Extreme oben und unten wieder auf die gleiche Stunde, d. i. auf 1^h p. Der frühe Eintritt des Minimums der Windstärke auf dem Eiffelthurm im Sommer ist eine sehr bemerkenswerthe Thatsache.

Nach der Köppen-Espy'schen Theorie der Ursache des täglichen Ganges der Windstärke an der Erdoberfläche möchte man zunächst annehmen, dass das Minimum oben mit dem Maximum unten zugleich eintreten müsste.[1]

---

[1] Es dürfte auch von Interesse sein, die Unterschiede im täglichen Gange der Windgeschwindigkeiten zu Paris und auf dem Eiffelthurme kennen zu lernen. Die folgende Tabelle enthält die berechneten Werthe dieser Geschwindigkeitsdifferenzen; aber nicht die absoluten Differenzen, die ja stets positiv sein würden, wenn man Eiffelthurm—Paris nimmt, sondern die Differenzen der Abweichungen vom Tagesmittel, in denen also der mittlere Unterschied der Windstärke oben und unten schon eliminirt ist und nur die Unterschiede im täglichen Gange zu Tage treten.

Die Gleichungen, welche den Unterschied im täglichen Gange der Windstärke auf dem Eiffelthurme und zu Paris darstellen, sind:

Unterschied im täglichen Gange der Windstärke Eiffelthurm—Paris.
($x = 0$ für Mitternacht, Centimeter pro Secunde).

Winter	$131 \sin(61^\circ 7 + x) + 66 \sin(220^\circ 9 + 2x)$
Frühling	$205 \sin(80 \cdot 9 + x) + 16 \sin(275 \cdot 4 + 2x)$
Sommer	$194 \sin(82 \cdot 9 + x) + 24 \sin(8 \cdot 4 + 2x)$
Herbst	$175 \sin(77 \cdot 8 + x) + 56 \sin(235 \cdot 9 + 2x)$
Jahr	$172 \sin(77^\circ 3 + x) + 29 \sin(241^\circ 1 + 2x)$

Es ist nicht uninteressant, aus der nachstehenden Tabelle zu ersehen, dass die Extreme der Differenzen im täglichen Gange sehr nahe auf Mitternacht und Mittag, und zwar etwas nach diesen Stunden eintreten.

Es ist gerade dieser Erscheinung gegenüber von grossem Interesse, den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit auf einer etwas niedrigeren Gipfelstation mit jenem auf dem Eiffelthurme zu vergleichen. Diesen Vergleich ermöglichen die Registrirungen an der Station des Herrn L. Rotch auf dem Blue Hill bei Boston.

Im Sommer, wo das Minimum der absoluten Windstärke auf dem Eiffelthurm schon um 10^h Vormittag eintritt, tritt das Maximum des Gangunterschiedes oben und unten erst um $11^1/_2{}^h$ a., also nahe dem Mittage ein.

Unterschiede im täglichen Gange der Windgeschwindigkeit.
Eiffelthurm—Paris (Centimeter pro Secunde).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht	64	186	196	125	143
1^h a.	56	**190**	**207**	120	**148**
2	57	185	201	116	140
3	67	167	177	116	132
4	82	139	136	114	118
5	96	98	82	105	95
6	101	48	20	83	63
7	91	— 7	— 41	47	22
8	61	— 66	— 97	— 3	— 26
9	15	—122	—143	— 63	— 78
10	— 43	—168	—174	—126	—128
11	—101	—200	—188*	—181	—167
Mittag	—150	—218*	—189*	—217	—193
1^h p.	—181	—217*	—177	—231*	—201*
2	—187*	—198	—155	—217	—189
3	—167	—164	—129	—179	—160
4	—125	—122	— 98	—122	—117
5	— 71	— 69	— 65	— 56	— 65
6	— 15	— 16	— 27	9	— 12
7	34	34	11	64	36
8	69	79	53	103	76
9	85	119	95	127	106
10	**86**	150	135	**134**	126
11	76	172	170	132	237
Mittel	87	131	124	116	111

Blue Hill, circa 142 *m* relativ (203 *m* absolut).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	— 1	—22	41*	— 3
1^h a.	— 1*	—19	40	— 2*
2	— 3	—17	32	— 5
3	— 7	—20	17	— 9
4	—11	—27	— 2	—16
5	—14*	—36	—23	—20*
6	—14*	—44	—41	—21
7	—11	—48*	—52	—17
8	— 5	—46	—56*	— 8
9	3	—36	—52	5
10	12	—18	—41	18
11	19	6	—25	31
Mittag	23*	31	— 9	38
1^h p.	23*	53	4	40*
2	20	68	13	35
3	13	73*	16*	24
4	5	68	15	11
5	— 2	55	11	— 2
6	— 8	35	9	—14
7	—11	14	8*	—21
8	—12*	— 4	11	—22*
9	— 9	—17	19	—20
10	— 6	—24	28	—14
11	— 3	—25*	37	— 8

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Blue Hill in einer mittleren Höhe zwischen der Erdoberfläche und dem Eiffelthurm (Paris 21 *m*, Blue Hill circa 142 *m*, Eiffelthurm 305 *m*) hat in der That ganz den Charakter des Überganges von den Verhältnissen unten zu jenen oben, wo die Umkehrung des täglichen Ganges schon complet ist.

Im Winter ist der tägliche Gang jenem an der Erdoberfläche ganz gleich. Vom Winter zum Sommer verspätet sich das Minimum von $5^1/_2{}^h$ a. bis 8^h a. auf dem Eiffelthurm bis 10^h a.

Es findet also eine Art Fortschreiten des Minimums der Windgeschwindigkeit von unten nach oben statt. Das Anemometer[1] auf dem Thurm des Post Office in Boston, 58 *m* über dem Boden, zeigt den Eintritt des Minimums im Sommer um 5^h a. an, drei Stunden später tritt das Minimum in 140 *m* über dem Boden oder 84 *m* höher ein, und fünf Stunden später in 300 *m* (wenn man Eiffelthurm damit vergleichen darf). Wir hätten somit beiläufig:

Eintritt des Morgenminimums in verschiedenen Höhen über dem Boden im Sommer

Höhe	21 *m*	58 *m*	140 *m*	300 *m*
Minimum	3^h a.	5^h a.	8^h a.	10^h a.

Dies scheint trefflich mit der Ansicht von Espy-Köppen übereinzustimmen. Der Einfluss der Erwärmung des Erdbodens und der dadurch bedingten aufsteigenden Luftbewegung und Luftmischung schreitet von unten nach oben fort und, natürlich im gleichen Sinne, die Hemmung der Windgeschwindigkeit in den etwas höheren Schichten über dem Erdboden, die eine Consequenz davon ist.

Auch der tägliche Gang des Dampfdruckes auf dem Eiffelthurm im Vergleich mit jenem an der Erdoberfläche scheint damit in guter Übereinstimmung zu stehen. Der Dampfdruck erreicht oben in 300 *m* wie unten um 9^h das Hauptmaximum, nimmt aber von 10^h an oben viel rascher ab als unten, was für das nun lebhafter eintretende Herabsinken der Luftschichten oberhalb 300 *m* gedeutet werden kann. Bis 9^h bringt die von unten aufsteigende Luft einen Zuwachs von Wasserdampf, sobald die Reaction aber in höhere Schichten hinaufgreift und die Luftschichte in 300 *m* nun auch mit herabsinkender trockenerer Luft von oben gemischt wird, nimmt dann der Dampfdruck auf dem Eiffelthurm rasch ab.[2]

---

[1] Im Mittel derselben Jahre 1886—1890 wie für Blue Hill.

[2] Angot hat in den Comptes rendus der Pariser Akademie, t. CXVII (1893, II) p. 1076, die Stundenmittel des Dampfdruckes in den Sommern 1890 bis 1892 für die Station beim Bureau Central und oben auf dem Eiffelthurm mitgetheilt.

Würde die Reaction der unteren Schichten auf die oberen nur bis 300 *m* hinaufreichen, dann müsste das Maximum der Windgeschwindigkeit unten an der Erdoberfläche auch schon um 10^h a. eintreten, während es in der That erst nach 1^h p. eintritt. Wir müssen also im Sinne dieser Theorie annehmen, dass die Mischung noch höher hinaufreicht, wogegen auch keinerlei Thatsachen oder aus anderen Erscheinungen abgeleitete Deductionen sprechen, während der eben erwähnte tägliche Gang des Dampfdruckes sehr deutlich dafür spricht. Wohl aber sprechen die Erscheinungen und Überlegungen dagegen, diesen Einfluss der Mengung der unteren und oberen Luftschichten in Folge der steigenden Erwärmung des Bodens bei Tage bis zu sehr grossen Höhen, sagen wir viel über 1000 *m* hinaufreichen zu lassen. Das Phänomen des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln darf darum nicht schlechthin mit jenem auf dem Eiffelthurm gleichgestellt werden.

Sonderbar erscheint der Eintritt des Minimums der Windstärke im Winter. Man möchte im Verfolg der oben angeregten Gedanken wohl glauben annehmen zu dürfen, dass im Winter bei geringer Erwärmung des Bodens die Reaction der unteren Schichten auf die oberen nur bis zu geringen Höhen hinaufreicht, und auf die Luftschichte in der Höhe des Eiffelthurms nur mehr wenig Einfluss nehmen könnte.

Die Beobachtungen stimmen aber mit diesen naheliegenden Consequenzen gar nicht.

Eintritt des Minimums der Windstärke im Winter.

Höhe.............	21 *m*	58 *m*	140 *m*	300 *m*
Zeit..............	5^h a.	$5^1/_2$ a.	$5^1/_2$ a.	2^h p.

Wenn man nun auch annimmt, dass uns hier die eigentlichen streng vergleichbaren Zwischenglieder fehlen, und dass wegen der spät erst beginnenden Erwärmung des Bodens im Winter die Reaction der unteren Luftschichten auf die höheren erst um 2^h das Niveau von 300 *m* erreicht, und darüber wohl nicht mehr hinausgeht, was sehr plausibel scheint, so ist es doch auffällig und mit diesen Deductionen scheinbar in Widerspruch stehend, dass die Abschwächung der Windgeschwindig-

keit in 300 *m* Seehöhe im Winter nach den Beobachtungen auf dem Eiffelthurm grösser ist als im Sommer, und dass einer Abnahme der Windstärke auf dem Eiffelthurm von 142 *cm* nur eine Zunahme unten von 45 *cm*, d. i. weniger als $^1/_3$ gegenübersteht, und doch sollte angenähert Gewinn und Verlust gleich sein, wenn sich im Winter der Luftaustausch zwischen dem Erdboden und 300 *m* abspielt. Den absoluten Werthen der Amplituden der täglichen Variation ist allerdings eine strenge Vergleichbarkeit nicht zuzuschreiben. Die grössere Abschwächung der Windstärke im Winter könnte vielleicht gerade dadurch erklärt werden, dass dann von oben keine Luft herabsinkt und wieder einen Zuwachs von Geschwindigkeit bringt.

Kehren wir nun zur Betrachtung des täglichen Ganges der Windstärke auf dem Blue Hill zurück. Das Maximum der Windstärke tritt daselbst im Herbst, Winter und Frühling am Nachmittage ein, wie an der Erdoberfläche und zwar beziehungsweise um 1^h p., $0^1/_2{}^h$ p. und 3^h p., also mit zunehmender Tageslänge verspätet. Im Sommer dagegen tritt das entschieden hervortretende Maximum um Mitternacht ein, also wie auf dem Eiffelthurm; es macht sich aber daneben noch ein secundäres Maximum um 3^h p. bemerkbar, so dass selbst im Sommer der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit in 140 *m* über dem Boden noch eine Zwischenstellung einnimmt, zwischen jenem an der Erdoberfläche und jenem in 300 *m* über derselben. Eine Zunahme der Windstärke in der Nacht ist übrigens auch im Herbste, im Winter und im Frühling angedeutet.

Die Beobachtungen auf dem Blue Hill zeigen uns die interessante Thatsache, dass im Sommer das Maximum der Windstärke bei Nacht mindestens bis zum Niveau von rund 150 *m* herabreicht. Wir dürften aber hier der unteren Grenze schon ziemlich nahe sein, denn es tritt daneben noch ein secundäres Maximum um 3^h Nachmittag ein, welches durch die von oben herabsinkenden stärker bewegten Luftmassen bedingt wird. Auch in 60 *m* (Boston) über dem Boden tritt das Maximum, hier aber das einzige entwickelte Maximum, zwischen 3^h und 4^h p. ein (die Abweichung vom Tagesmittel ist +89 *cm* pro Secunde). Im Winter ist, wie schon bemerkt, der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Blue Hill in 142 *m* relativer und

203 *m* absoluter Höhe ganz gleich jenem an der Erdoberfläche. Auf einem schlanken Thurme von gleicher Höhe dürfte dies nicht der Fall sein. Die, wenn auch geringe Oberfläche des Berges genügt wohl im Winter, um den täglichen Gang der Windstärke ähnlich zu beeinflussen, wie die Erdoberfläche in den Niederungen selbst. Vielleicht bringen uns Anemometer auf Thürmen, wie z. B. jenes auf dem Strassburger Münster, eine nähere Aufklärung darüber.

Die vorstehende kleine Untersuchung scheint mir demnach zu dem Resultat zu führen, dass die Mengung der unteren und oberen Luftschichten in Folge der Erwärmung des Erdbodens bei Tage und der dadurch entstehenden aufsteigenden und niedersinkenden Luftbewegungen, wie sie Espy und Köppen zur Erklärung der täglichen Periode der Windstärke an der Erdoberfläche annehmen, in der That stattfindet und im Sommer in unserem Klima bis zu 800—1000 *m* etwa hinaufreicht, im Winter kaum über 300 *m*.

Nach den Ergebnissen nächtlicher wissenschaftlicher Ballonfahrten des Münchner Vereins für Luftschiffahrt können an ruhigen, warmen Sommertagen die unteren Luftschichten bis zu mindestens 900 *m* hinauf die adiabatische Temperaturvertheilung annehmen, d. h. die aufsteigende und niedersinkende Luftbewegung in Folge der Erhitzung des Bodens erstreckt sich bis zu dieser Höhe. Dies stimmt sehr gut mit den obigen Darlegungen.

Da die Windgeschwindigkeit von der Erdoberfläche nach oben hin anfangs sehr rasch und dann immer langsamer zunimmt, und der Werth dieser Zunahme nach den Örtlichkeiten natürlich recht verschieden sein wird, so ist a priori wohl kaum möglich zu bestimmten Annahmen darüber zu gelangen, zu welchen Zeitpunkten das Minimum der Windgeschwindigkeit in Folge dieses Luftaustausches in den verschiedenen Höhen eintreten dürfte.

Die vorhin mitgetheilten Registrirungen der Windgeschwindigkeit in 21 *m*, 58 *m*, 142 *m* und 300 *m* zeigen wenigstens im Allgemeinen das zeitliche Vorrücken des Eintrittes des Minimums nach oben, und damit das Fortschreiten des Eingriffes der unteren Schichten in dieser Richtung.

Zum Schlusse will ich die Gleichungen des täglichen Ganges der Windstärke für die verschiedenen Höhen hier zusammenstellen ($x = 0$ für Mitternacht, Centimeter pro Secunde)

Höhe	Winter
21 *m*	$34 \sin(236 \cdot 5 + x) + 12 \sin(57^\circ 0 + 2x)$
58 *m*	$41 \sin(247 \cdot 3 + x) + 19 \sin(89 \cdot 4 + 2x)$
142 *m*	$12 \sin(257 \cdot 1 + x) + 11 \sin(75 \cdot 2 + 2x)$
300 *m*	$116 \sin(86 \cdot 0 + x) + 15 \sin(233\ 4 + 2x)$
	Sommer
21 *m*	$78 \sin(242 \cdot 2 + x) + 12 \sin(70 \cdot 1 + 2x)$
58 *m*	$68 \sin(239 \cdot 0 + x) + 25 \sin(53 \cdot 1 + 2x)$
142 *m*	$35 \sin(134 \cdot 0 + x) + 23 \sin(44 \cdot 2 + 2x)$
300 *m*	$124 \sin(95 \cdot 9 + x) + 32 \sin(28 \cdot 3 + 2x)$

Auch in diesen Gleichungen tritt das Fortschreiten der Phasenzeiten, deren Verspätung von unten nach oben sehr schön zu Tage.

Höhe	Jahr
21 *m*	$60 \sin(240 \cdot 5 + x) + 14 \sin(69 \cdot 3 + 2x)$
58 *m*	$69 \sin(243 \cdot 9 + x) + 23 \sin(54 \cdot 7 + 2x)$
142 *m*	$19 \sin(205 \cdot 5 + x) + 18 \sin(41 \cdot 9 + 2x)$
300 *m*	$116 \sin(86 \cdot 0 + x) + 16 \sin(233 \cdot 4 + 2x)$

Wir sind nun bei den Gipfelstationen angelangt, welche so viel Eigenthümliches im täglichen Gange der Windstärke zeigen, dass die Erklärung derselben grosse Schwierigkeiten macht.

Das Maximum der Windstärke tritt auf dem Ben Nevis das ganze Jahr bei Nacht ein, vom Herbst bis zum Frühling um 1^h, im Sommer eigenthümlicher Weise erst um 3^h Morgens. Es spielt da sicherlich die tägliche Periode der stürmischen Winde mit hinein, die von jener der ruhigen Tage, in der Niederung wenigstens, wesentlich abweicht, wie ich vor einiger Zeit ausführlicher gezeigt habe.[1]

[1] Hann, Einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen in Wien 1873—1892. Diese Sitzungsber., Bd. CII, Abth. II. a. Februar 1893.

Ben Nevis, 1440 *m*.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	46	58	52	52
1^h a.	52*	64*	62	57*
2	50	62	69	56
3	43	55	70*	49
4	31	42	65	36
5	17	28	55	20
6	6	15	40	4
7	— 3	4	24	—11
8	— 8	— 4	6	—22
9	— 9	—10	—10	—30
10	— 9	—15	—25	—33
11	— 9	—21	—38	—34*
Mittag...........	—10	—26	—49	—33
1^h p.	—15	—35	—55	—32
2	—22	—44	—58	—31
3	—30	—53	—60*	—30
4	—38	—56*	—57	—30
5	—42*	—55	—52	—27
6	—41	—48	—44	—23
7	—34	—33	—32	—14
8	—21	—14	—17	— 3
9	— 3	8	0	11
10	16	30	18	27
11	33	48	36	41

Das Minimum der Windstärke tritt auf dem Ben Nevis, den Herbst ausgenommen, auffallend spät ein, im Winter erst um 5^h Nachmittag, im Frühling um 4^h, im Sommer um 3^h p.; im Herbste aber schon um 11^h Vormittags. Im Winter stehen die Epochen des Maximums und Minimums um 16 Stunden von einander ab, im Sommer nur um 12 Stunden. Von 8^h Morgens bis 8^h Abends inclusive ist die Windstärke auf dem Ben Nevis unter dem Mittel, die Maxima derselben sind dementsprechend stärker ausgeprägt als die Minima. Irgend welche theoretische Consequenzen vermag ich aus der täglichen Variation der Wind-

geschwindigkeit auf dem Ben Nevis nicht zu entwickeln. Vielleicht wäre in dieser Beziehung nur das Vorrücken der Epoche des Minimums vom Winter zum Sommer hervorzuheben.

Obir, 2140 *m*.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	0	45	107*	41
1^ha.	—13	37	101	36
2	—22	30	91	31
3	—25*	25	79	28
4	—21	21	64	27
5	—14	19	48	26
6	— 7	16	29	23
7	0	11	5	16
8	1	1	— 20	6
9	— 3	—12	— 48	— 8
10	—10	—28	— 76	—26
11	—18	—44	—101	—44
Mittag...........	—25	—58	—120	—59
1^hp.	—27*	—67	—129*	—69
2	—24	—68*	—128*	—70*
3	—15	—61	—113	—63
4	0	—46	— 88	—47
5	16	—26	— 55	—28
6	27	— 2	— 15	— 6
7	42	19	22	15
8	45*	37	56	32
9	42	48	81	43
10	31	52*	98	47*
11	16	51	106	46

Auf dem Obirgipfel tritt das Maximum der Windstärke schon frühzeitig ein, am Abend zwischen 8^h und 10^h, nur im Sommer verspätet sich dasselbe bis gegen Mitternacht. Das Minimum tritt das ganze Jahr hindurch zwischen 1^h und 2^h Nachmittag ein. Im Winter zeigt sich ein secundäres Minimum um 3^h Morgens und ein nur wenig hervortretendes zweites

Maximum um 8^h^ Vormittag. Die tägliche Periode ist dann überhaupt schwach entwickelt, dagegen sehr stark im Sommer (mittl. Ordinaten im Winter 18 *cm*, Frühling und Herbst 35 *cm*, Sommer 74 *cm*). In theoretischer Beziehung bietet auch der tägliche Gang der Windstärke auf dem Obirgipfel nichts Bemerkenswertes. Er weicht recht wesentlich ab von jenem der beiden nächsten höheren Stationen, Säntis und Sonnblick, den ich schon früher besprochen habe, und der sich durch ein frühes Auftreten des täglichen Minimums der Windstärke auszeichnet.

Pikes Peak, 4308 *m*.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Mitternacht	39	112	75	88
1^h^ a.	51	133	105	103
2	60	148	129	115
3	65*	152*	143*	119*
4	63	143	140	111
5	54	119	120	92
6	37	83	82	59
7	14	33	33	17
8	—11	— 20	— 20	— 30
9	—35	— 72	— 70	— 76
10	—55	—115	—108	—113
11	—67	—146	—131	—138
Mittag	—71*	—163*	—136*	—147*
1^h^ p.	—67	—159	—127	—139
2	—57	—144	—106	—119
3^h^ p.	—43	—120	— 80	— 90
4	—28	— 91	— 55	— 58
5	—16	— 61	— 35	— 27
6	— 5	— 32	— 21	— 1
7	2	— 7	— 12	19
8	8	17	— 4	35
9	13	40	7	47
10	20	63	24	60
11	29	87	47	73

In der neuen Reihe von Windregistrirungen auf dem Obirgipfel tritt aber, wenigstens im Mittel eines Jahres (1893), das Minimum der Windstärke zwei Stunden früher ein und der tägliche Gang nähert sich dadurch etwas jenem auf dem Säntis und Sonnblick.

Von allen hohen Gipfelstationen zeichnet sich die Station auf Pikes Peak durch den regelmässigsten und am stärksten ausgeprägten täglichen Gang der Windgeschwindigkeit aus. Das Maximum tritt das ganze Jahr hindurch um 3^h Morgens auf, das Minimum dessgleichen um Mittag. Die Amplituden sind sehr gross, im Frühling ist der Unterschied zwischen Maximum und Minimum über 3·1 *m*, im Sommer 2·8 *m*, im Herbst 2·7 *m* (die mittleren Ordinaten sind: Winter 38 *cm*, Frühling 94 *cm*, Sommer 75 *cm*, Herbst 78 *cm*). Die Windstärke bleibt von 8^h Morgens bis gegen 7^h Abends unter dem Mittel. Damit haben wir die Darstellung des täglichen Ganges der Windstärke auf den einzelnen Berggipfeln abgeschlossen.

Nachdem wir aber derart jede Station für sich in Bezug auf die tägliche Periode und deren Modification nach den Jahreszeiten einer Betrachtung unterzogen haben, empfiehlt es sich nun auch nachzusehen, in welcher Weise zu jeder Jahreszeit die Änderung der täglichen Variation der Windstärke mit der Höhe vor sich geht, da möglicher Weise dabei einige bemerkenswerthe Thatsachen sich ergeben könnten, die sich für die Theorie von einigem Werthe erweisen.

Ich habe desshalb in den folgenden fünf Tabellen den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit für jede einzelne Jahreszeit separat zusammengestellt mit Hilfe von Gipfelstationen und einer Station an der Erdoberfläche, als welche Paris genommen worden ist. Für die vier Jahreszeiten sind die berechneten Werthe eingesetzt, nur für das Jahr wurden die unmittelbar aus den Registrirungen sich ergebenden Mittelwerthe genommen, die desshalb auch, wie man sogleich bemerken wird, noch einige Unregelmässigkeiten aufweisen, die man aber nicht mehr zu unterdrücken braucht. Wenn eine regelmässige Verschiebung der Epochen des Eintrittes der Maxima und namentlich der Minima mit zunehmender Seehöhe stattfinden würde, so müsste dies in den folgenden Tabellen zu Tage treten.

D. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Winter.

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffelthurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonnblick	Pikes Peak
Höhe abs. ..	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel. ...	21	140	305	(1400)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 18	— 1*	46	46	0	— 10	20	39
1	— 20	— 1	36	52*	— 13	— 14	27	51
2	— 23	— 3	34*	50	— 22	— 17	31*	60
3	— 27	— 7	40	43	— 25*	— 18*	29	65*
4	— 30	— 11	52	31	— 21	— 17	21	63
5	— 31*	— 14*	65	17	— 14	— 15	8	54
6	— 29	— 14	72*	6	— 7	— 14	— 7	37
7	— 23	— 11	68	— 3	0	— 11	— 21	14
8	— 13	— 5	48	— 8	1	— 10	— 31	— 11
9	0	3	15	— 9	— 3	— 7	— 37*	— 35
10	15	12	— 28	— 9	— 10	— 5	— 35	— 55
11	28	19	— 73	— 9	— 18	— 2	— 29	— 67
Mittag	38	23	—112	— 10	— 25	2	— 18	— 71*
1	44	23*	—137	— 15	— 27*	6	— 7	— 67
2	45*	20	—142*	— 22	— 24	11	3	— 57
3	40	13	—127	— 30	— 15	16	9	— 43
4	31	5	— 94	— 38	0	19	11*	— 28
5	20	— 2	— 51	— 42*	16	22*	9	— 16
6	9	— 8	— 6	— 41	27	22*	5	— 5
7	— 1	— 11	33	— 34	42	19	0	2
8	— 9	— 12*	60	— 21	45*	15	— 2	8
9	— 13	— 9	72*	— 3	42	9	— 1	13
10	— 16	— 6	70	16	31	3	4	20
11	— 17	— 3	59	33	16	— 4	11	29
Mittel	·22	·10	·64	·24	·18	·12	·16	·38

E. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Frühlinge.

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffelthurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonnblick	Pikes Peak
Höhe abs.	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel.	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 56	— 22	130*	58	45	21	35	112
1	— 63	— 19	127	64*	37	10	17	133
2	— 69	— 17	116	62	30	1	— 3	148
3	— 71*	— 20	96	55	25	— 6	— 25	152*
4	— 70	— 27	69	42	21	— 11	— 44	143
5	— 62	— 36	36	28	19	— 13	— 59	119
6	— 49	— 44	— 1	15	16	— 14	— 67	83
7	— 32	— 48*	— 39	4	11	— 14	— 68*	33
8	— 9	— 46	— 75	— 4	1	— 15	— 61	— 20
9	16	— 36	—106	— 10	— 12	— 18	— 50	— 72
10	40	— 18	—128	— 15	— 28	— 22	— 35	—115
11	61	6	—139	— 21	— 44	— 26	— 20	—146
Mittag	77	31	—141*	— 26	— 58	— 29*	— 6	—163*
1	86	53	—131	— 35	— 67	— 29*	5	—159
2	86*	68	—112	— 44	— 68*	— 25	14	—144
3	79	73*	— 85	— 53	— 61	— 17	21	—120
4	67	68	— 55	— 56*	— 46	— 6	27	— 91
5	48	55	— 21	— 55	— 26	8	32	— 61
6	28	35	12	— 48	— 2	21	38	— 32
7	9	14	43	— 33	19	33	45	— 7
8	— 8	— 4	71	— 14	37	39	50	17
9	— 24	— 17	95	8	48	42*	54*	40
10	— 37	— 24	113	30	52*	39	53	63
11	— 47	— 25	125	48	51	31	47	87
Mittel	50	34	86	34	34	20	36	94

F. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Sommer.

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffel-thurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonn-blick	Pikes Peak
Höhe abs. ..	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel. ...	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 58	41*	138	52	107*	66	39	75
1	— 64	40	143*	62	101	69*	30	105
2	— 69	32	132	69	91	69	19	129
3	— 71*	17	106	70*	79	63	5	143*
4	— 69	— 2	67	65	64	51	— 10	140
5	— 61	— 23	21	55	48	33	— 26	120
6	— 48	— 41	— 28	40	29	9	— 41	82
7	— 30	— 52	— 71	24	5	— 19	— 54	33
8	— 7	— 56*	—104	6	— 20	— 46	— 63	— 20
9	19	— 52	—124	— 10	— 48	— 70	— 68*	— 70
10	44	— 41	—130*	— 25	— 76	— 87	— 66	—108
11	65	— 25	—123	— 38	—101	— 95*	— 59	—131
Mittag	81	— 9	—108	— 49	—120	— 93	— 46	—136*
1	88*	4	— 89	— 55	—129*	— 83	— 30	—127
2	87	13	— 68	— 58	—128	— 64	— 11	—106
3	79	16	— 50	— 60*	—113	— 43	7	— 80
4	64	15	— 34	— 57	— 88	— 20	24	— 55
5	46	11	— 19	— 52	— 55	1	38	— 35
6	25	9	— 2	— 44	— 15	19	48	— 21
7	6	8	17	— 32	22	32	54	— 12
8	— 12	11	41	— 17	56	42	56*	— 4
9	— 27	19	68	0	81	49	55	7
10	— 39	28	96	18	98	56	52	24
11	— 49	37	121	36	106	61	47	47
Mittel	50	25	79	41	74	52	39	75

G. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Herbste.

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffelthurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonnblick	Pikes Peak
Höhe abs.	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel.	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 27	— 3	98	52	41	14	— 15	88
1	— 32	— 2*	88	57*	36	7	— 19	103
2	— 38	— 5	78	56	31	2	— 19*	115
3	— 45	— 9	71	49	28	0	— 16	119*
4	— 50*	— 16	64	36	27	— 1	— 13	111
5	— 50	— 20	55	20	26	— 1	— 9	92
6	— 43	— 21*	40	4	23	0	— 8	59
7	— 30	— 17	17	— 11	16	— 2	— 8	17
8	— 11	— 8	— 14	— 22	6	— 5	— 11	— 30
9	11	5	— 52	— 30	— 8	— 10	— 14	— 76
10	34	18	— 92	— 33	— 26	— 16	— 17*	—113
11	54	31	—127	— 34*	— 44	— 23	— 16	—138
Mittag	66	38	—151	— 33	— 59	— 28	— 13	—147*
1	70*	40*	—161*	— 32	— 69	— 29*	— 6	—139
2	66	35	—151	— 31	— 70*	— 26	4	—119
3	54	24	—125	— 30	— 63	— 19	16	— 90
4	38	11	— 84	— 30	— 47	— 9	26	— 58
5	20	— 2	— 36	— 27	— 28	3	33	— 27
6	4	— 14	13	— 23	— 6	14	35*	— 1
7	— 8	— 21	56	— 14	15	23	33	19
8	— 16	— 22*	87	— 3	32	29	26	35
9	— 21	— 20	106	11	43	29*	15	47
10	— 22	— 14	112*	27	47*	27	3	60
11	— 24	— 8	108	41	46	21	— 7	73
Mittel	35	17	83	29	35	14	16	78

H. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit im Jahresmittel (Centimeter pro Secunde).

Ort	Paris	Blue Hill	Eiffelthurm	Ben Nevis	Obir	Säntis	Sonnblick	Pikes Peak
Höhe abs.	54	203	338	1443	2140	2500	3110	4310
Höhe rel.	21	140	305	(1440)	(1600)	(2000)	(2500)	(2700)
Mitternacht	— 39	11	100	47	42	29	20	99
1	— 45	— 7	84	47	38	23	— 2	98
2	— 50	— 4	76	59	30	9	6	109
3	— 51	— 9	75	70*	25	20	— 10	114*
4	— 52*	— 15	63	66	26	1	— 13	101
5	— 49	— 20	57	0	20	— 2	— 20	81
6	— 46	— 26	38	10	11	— 12	— 32	60
7	— 31	— 41*	6	7	— 1	— 3	— 46	7
8	— 11	— 27	— 49	— 6	— 13	— 24	— 47*	— 38
9	10	— 7	— 90	— 3	— 28	— 31	— 38	— 79
10	38	— 5	—106	— 18	— 42	— 41*	— 42	—118
11	55	4	—115	— 24	— 54	— 39	— 28	—142*
Mittag	65	33	—112*	— 37	— 68	— 33	— 1	—124
1	69	34	—115	— 44*	— 73*	— 34	2	—107
2	70*	41*	—109	— 44	— 65	— 36	19	— 87
3	57	40	— 96	— 29	— 58	— 10	18	— 64
4	53	14	— 69	— 28	— 43	4	6	— 53
5	39	— 3	— 44	— 54*	— 13	12	28	— 37
6	19	— 13	— 8	— 48	16	26	23	— 6
7	— 2	3	30	— 45	44	26	45*	5
8	— 14	— 4	76	— 2	56	25	29	24
9	— 19	1	97	16	55*	37*	30	43
10	— 29	— 5	106	21	48	33	32	54
11	— 36	— 2	110*	34	49	24	21	69
Mittel	40	15	76	32	38	22	23	72

Indem wir diese Tabellen einer Discussion unterziehen, wollen wir uns dabei auf die höheren Gipfelstationen beschränken, da wir den Verlauf der täglichen Periode in den unteren Schichten bis zu 300 *m* hinauf schon eingehender behandelt haben.

Wir glaubten aber die Zahlenwerthe des täglichen Ganges für diese unteren Schichten in die synoptischen Tabellen doch aufnehmen zu müssen, da der Eiffelthurm das ganze Jahr hindurch, Blue Hill wenigstens im Sommer sich den hohen Schichten in Bezug auf den täglichen Gang anschliesst und man derart mit einem Blicke ersehen kann, dass dann von 140 *m* (relativ) bis zu 4300 *m* hinauf der tägliche Gang der Windstärke nahezu der gleiche ist, und nur die dem Boden nächsten Luftschichten den umgekehrten Gang zeigen. Man sieht da auch gleich, dass es nicht angeht, den täglichen Gang in den hohen oberen Schichten als das Ergebniss der Reaction der unteren Schichten auf dieselben zu betrachten, weil Ursache und Wirkung in einem schreienden Widerspruche stehen würden.

Im Allgemeinen bemerkt man zunächst in diesen Tabellen, dass je zwei oder drei Stationen mit einander übereinstimmen, während die übrigen von denselben abweichen. Es müssen also die localen Verhältnisse von grossem Einflusse sein. Nur im Sommer ist die Übereinstimmung aller fünf Gipfelstationen über 1400 *m* eine recht befriedigende.

Wir wollen desshalb auch darauf verzichten, die Tabellen im Einzelnen durchzugehen. Um nun aber doch zu einigen allgemeineren Sätzen in Bezug auf den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit in den höheren Schichten der Atmosphäre zu gelangen, haben wir uns erlaubt, Mittelwerthe zu bilden für das Höheninterval Ben Nevis bis Pikes Peak inclusive, d. i. für die Höhenschicht von 1400 *m* bis 4300 *m*. Da die absoluten Windgeschwindigkeiten und damit auch die Grösse der Abweichungen vom Mittel nicht strenge vergleichbar sind, können allerdings diese Mittelwerthe keine grössere Bedeutung beanspruchen. Sie mögen nur dazu dienen, Fingerzeige dafür zu geben, wie im Allgemeinen die tägliche Variation der Windstärke in diesen hohen Regionen vor sich geht.

Im Folgenden soll in diesem Sinne eine Übersicht über den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit in den höheren Regionen der Atmosphäre gegeben werden.

Täglicher Gang im Winter (1400—4300 *m*).

Stunde..	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm....	19	21*	20	19	15	10	3	—4	—14	—18	—23	—25*
Nachm. .	—25	—22	—18	—13	—7	—2	2	6	9	12	15	17

Mittlere Ordinate 14 *cm*, Amplitude 46 *cm*. Das Maximum tritt zwischen 1^h und 2^h Morgens ein, das Minimum zwischen 11^h und Mittag, fällt also noch auf den Vormittag.

Täglicher Gang im Frühlinge (1400—4300 *m*).

Stunde..	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm....	54*	52	48	40	30	19	7	—7	—20	—32	—43	—51
Nachm. .	—56	—57*	—53	—46	—34	—20	—5	11	26	38	47	53

Mittlere Ordinate 35 *cm*, Amplitude 110 *cm*. Das Maximum tritt um Mitternacht ein, das Minimum kurz vor 1^h Nachmittag.

Täglicher Gang im Sommer (1400—4300 *m*).

Stunde..	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm....	68	73	75*	72	62	46	24	—2	—29	—53	—72	—85
Nachm. .	—89*	—85	—73	—58	—39	—21	—3	13	27	38	50	59

Mittlere Ordinate 51 *cm*, Amplitude 164 *cm*. Das Maximum tritt um 2^h Morgens ein, das Minimum fällt genau auf den Mittag.

Im Sommer ist der tägliche Gang der Windstärke durch das ganze Höhenintervall von 300 *m* bis 4300 *m* sehr gleichförmig und ein Mittelwerth für diese ganze Höhenschicht hat desshalb reelle Bedeutung.

Stellen wir die Gleichungen des täglichen Ganges für diese Jahreszeit in den verschiedenen Höhen zusammen, so erhalten wir:

Constanten des täglichen Ganges im Sommer[1]
(Centimeter pro Secunden).

	$x = 0$ für $11^1/_2{}^h$ p.				$x = 0$ für Mitternacht			
Höhe	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
300 *m*..	120	—29	7	31	96	28	124	32
1440 ..	43	48	0	5	50	17	65	5
2140 ..	110	36	— 2	—18	79	202	115	18
2500 ..	80	6	—15	6	94	292	80	17
3100 ..	48	—39	— 5	5	136	331	62	7
4300 ..	99	64	—38	22	64	316	118	44
Mittel...	83	14	— 9	8·5	87·8	328·4	84·5	12·4

Für den Sommer gilt demnach von 300 *m* bis 4300 *m* sehr angenähert die Gleichung

$$84\cdot5 \sin (87\cdot8+x)+12\cdot4 \sin (328\cdot4+2x).$$

In einer mittleren relativen Höhe von 1750 *m* circa dürfte hiernach das Minimum der Windgeschwindigkeit im Sommer noch am Vormittage zwischen 11^h und Mittag eintreten, denn die Abweichungen vom Tagesmittel sind:

Täglicher Gang im Sommer (1750 *m*).

Stunde..........	9	10	11	Mittag	1	2	3 p.
Centimeter.......	—65	—82	—91*	—92*	—85	—73	—56

Im Herbste wird der tägliche Gang in den verschiedenen Höhenstufen wieder viel unregelmässiger und es ist namentlich der Sonnblick, der am meisten von den übrigen Stationen abweicht. Soweit die Mittelbildung für diese Jahreszeit gestattet sein mag, erhält man folgenden Gang:

---

[1] Die Werthe von A_1 und A_2 und a_1 und a_2 sind mit den noch nicht abgerundeten Werthen von p und q gerechnet.

Täglicher Gang im Herbste (1400—4300 *m*).

Stunde..	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm....	36	35	37*	36	32	26	16	2	—12	—28	—41	—51
Nachm. .	—56*	—55	—48	—39	—24	—9	4	15	24	29	33	35

Mittlere Ordinate 30 *cm*, Amplitude 93 *cm*. Das Maximum tritt um 2^h Morgens ein, das Minimum um Mittag. Der tägliche Gang im Herbste stimmt (im Mittel) mit jenem im Sommer überein.

Täglicher Gang im Jahresmittel (1400—4300 *m*).

Stunde..	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vorm....	47*	41	43	44*	36	16	7	—7	—26	—36	—52	—57*
Nachm. .	—53	—51	—43	—29	—23	—13	2	15	26	36	38	39

Mittlere Ordinate 32 *cm*, Amplitude 104 *cm*. Das Maximum tritt im Jahresmittel bald nach Mitternacht ein. Der nicht ausgeglichene Gang zeigt in der Nacht noch einige Unregelmässigkeiten. Aber auch nach der gewöhnlichen Ausgleichung fällt das Maximum zwischen Mitternacht und 1^h a. Das Minimum der Windgeschwindigkeit tritt im Jahresmittel und im Durchschnitte aus allen Stationen um 11^h Vormittag ein.

Da die Epoche des Eintrittes des Minimums der täglichen Windgeschwindigkeit für die Theorie das grösste Interesse hat, so wollen wir recapitulirend constatiren, dass, den Frühling ausgenommen, dasselbe im Mittel aller Stationen in allen übrigen Jahreszeiten schon vor dem Mittage eintritt und dass dies auch für das Mittel des ganzen Jahres gilt.

Wir wollen nun zum Schlusse hier noch die Constanten der Gleichungen zusammenstellen, welche zur Berechnung der Abweichungen der Stundenmittel von den Monatsmitteln in den Tabellen *D*, *E*, *F*, *G* gedient haben. Die Abweichungen im Mittel des Jahres (Tabelle *H*) sind ohne irgend eine Ausgleichung geblieben.

Die Constanten des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit (Centimeter pro Secunde).

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
				Paris, Bureau Central				
Winter.....	—28	—19	+10	+ 7	236·5	57·0	34	12
Frühling ...	—67	—39	+11	+ 4	239·8	69·2	77	11
Sommer....	—69	—37	+12	+ 4	242·0	70·1	78	12
Herbst.....	—46	—24	+20	+ 5	242·8	77·1	52	20
Jahr.......	—52·5	—29·7	+13·2	+ 5·0	240·5	69·3	60·3	14·1
				Eiffelthurm				
Winter.....	+ 79	+39	—33	—43	63·7	217·4	88	55
Frühling ...	+135	— 7	— 5	+ 5	92·8	316·1	135	8
Sommer....	+123	—13	+15	+28	95·9	28·3	124	32
Herbst.....	+125	+13	—27	—27	83·9	224·7	126	38
Jahr.......	+115·5	+ 8·0	—12·5	— 9·2	86·0	233·4	115·8	15·5
				Blue Hill[1]				
Winter.....	—11	— 4	+10	+ 6	257·1	75·2	12	11
Frühling....	—21	—43	— 3	+27	213·7	9·5	48	27
Sommer....	+28	—21	+11	+20	134·0	44·2	35	23
Herbst.....	—20	— 6	+15	+12	260·4	66·7	21	19
Jahr.......	— 6·0	—18·5	+ 8·2	+16·2	205·5	41·9	19·4	18·2
				Ben Nevis				
Winter.....	+28	+24	+18	+ 6	49·9	70·8	37	19
Frühling....	+42	+33	+16	+ 1	51·6	86·1	54	16
Sommer....	+49	+42	+ 2	+ 5	49·6	17·4	65	5
Herbst.....	+43	+13	+ 9	+ 9	72·6	45·3	45	13
Jahr.......	+40·5	+28·0	+11·3	+ 5·2	55·3	65·2	49·2	12·4

[1] Die p und q für $x = 0$ für $11^1/_2{}^h$ p., die Winkelconstanten für $x = 0$ um Mitternacht.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
				Obir* [1]				
Winter	+ 14	—17	— 7	—22	147·4	212·2	22	23
Frühling....	+ 50	+16	— 2	—19	79·8	200·6	52	19
Sommer	+110	+36	— 2	—18	79·1	202·3	115	18
Herbst	+ 48	+20	— 4	—19	74·6	207·7	52	19
Jahr	+55·5	+13·7	— 3 7	— 19·5	83·6	205·8	57·2	19·9
				Obir* 1893 (neue Aufstellung)				
Jahr	+90	+14	—18	— 2	88·4	279·0	91	18
				Säntis*				
Winter	— 3	—18	— 4	— 2	198·2	257·8	19	4
Frühling....	+27	—14	— 1	—12	124·9	197·8	30	12
Sommer	+80	+ 6	—15	+ 6	93·6	291·9	80	17
Herbst	+21	— 4	— 4	—11	109·4	215·2	22	12
Jahr	+31·2	— 7·5	— 6·0	— 4·7	111·0	246·9	32·1	7·6
				Sonnblick*				
Winter	+20	— 3	— 4	+19	106·4	2·8	20	19
Frühling....	+27	—50	+14	+ 2	159·0	81·9	56	14
Sommer	+48	—39	— 5	+ 5	135·8	331·0	62	7
Herbst	+ 2	—22	—13	— 4	182·4	268·3	22	14
Jahr	+24·2	—28·5	— 2·0	+ 5·5	147·2	355·0	37·4	5·8

[1] Bei den mit * versehenen Stationen ist für die p und q die Zeit von $11^1/_2{}^h$ p. an gezählt (Stundenintervall 11^h bis Mitternacht), die Winkelconstanten sind aber auf die Zählung von Mitternacht an reducirt. Bei den übrigen Stationen gelten auch die p und q für $x = 0$ um Mitternacht.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
	Pikes Peak*							
Winter	+ 52	+28	−18	+ 7	69·3	305·2	59	19
Frühling	+127	+74	−28	+ 9	67·2	303·1	147	29
Sommer	+ 99	+64	−38	+22	64·0	315·6	118	44
Herbst	+112	+45	−33	− 2	75·6	281·3	121	33
Jahr	+97·5	+52·7	−29·2	+ 9·0	69·1	302·1	110·9	31·3

Wenn wir uns jetzt fragen, inwieweit die im Vorstehenden eingehend discutirten Beobachtungsergebnisse über die tägliche Periode der Windstärke auf den Berggipfeln von 1400 *m* bis zu 4300 *m* Seehöhe einen bestimmten Hinweis enthalten auf die derselben zu Grunde liegenden Ursachen, so müssen wir bekennen, dass wir einen solchen nicht haben finden können. Die Aussagen der vorstehenden Tabellen verhalten sich im Gegentheile negativ gegenüber den bisher geäusserten Ansichten über die Ursache der Erscheinung.

Der frühe Eintritt des Minimums der täglichen Windstärke spricht nach meinem Dafürhalten entschieden gegen die Annahme, dass es die an den Bergseiten aufsteigenden Thalwinde sind, welche die Abnahme der Windgeschwindigkeit bei Tage auf den Berggipfeln bewirken.

Es ist ferner auch die Ansicht ausgesprochen worden, dass infolge der täglichen Wanderung des Maximums der Erwärmung von Osten nach Westen in der Höhe ein wenn auch geringer, in gleicher Richtung wandernder Gradient entsteht, der in der Höhe eine Tendenz zu Ostwinden am Vormittage und eine Tendenz zu Westwinden am Nachmittage zur Folge hat. Die Ostwinde müssten hiernach das Maximum ihrer Stärke am Vormittage haben, die Westwinde am Nachmittage. In ähnlicher Weise müssten die Südwinde bei Tag verstärkt, die Nordwinde geschwächt werden.

Es ist wohl an sich recht unwahrscheinlich, dass ein merklicher derartiger Gradient entstehen kann, weil die Tempe-

raturdifferenzen zwischen Ost und West durch zu grosse Entfernungen getrennt sind, als dass ein wirksamer Temperaturgradient entstehen könnte. Aber es immer gut, in solchen Fällen auch die Erfahrung zu Rathe zu ziehen.

Herr Dr. Pernter hat sich in dankenswerther Weise der grossen Mühe unterzogen, für jede der acht Windrichtungen und für die Stationen Sonnblick, Säntis und Obir den täglichen Gang der Geschwindigkeit abzuleiten.[1] Ich habe mit Hilfe der von ihm auf vier Richtungen reducirten respectiven Werthe die folgende Tabelle K berechnet, indem ich Mittelwerthe nahm und selbe nach der Bessel'schen Formel berechnete. Wenn ein derartiger Einfluss auf die tägliche Periode der verschiedenen Windrichtungen vorhanden ist, so muss er für alle Berggipfel gelten.

Es wäre sehr zu wünschen, dass die von Dr. Pernter zuerst vorgenommenen Rechnungen auch auf die Windregistrirungen anderer Berggipfel ausgedehnt werden möchten und dass mehrjährige Aufzeichnungen denselben zu Grunde gelegt werden.

Der Nord- und der Ostwind haben das Hauptmaximum ihrer Stärke Abends zwischen 8^h und 9^h, ein secundäres Maximum um 5^h Morgens und das Minimum ihrer Stärke um 1^h Nachmittags. Der Südwind weht am kräftigsten um 9^h Abends, am schwächsten um 8^h Morgens; der Westwind erreicht seine grösste Stärke um Mitternacht und ist am schwächsten um 1^h Nachmittags. Ein entschiedener Gegensatz im täglichen Gange ihrer Stärke ist bei den entgegengesetzten Windrichtungen nicht vorhanden; eine Umkehrung des Ganges zwischen West und Ost, wie sie wohl bestehen müsste, wenn die erwähnte Ursache der täglichen Periode der Windstärke auf Berggipfeln zu Grunde liegen würde, ist nicht zu bemerken. West- und Ostwind erreichen das Minimum ihrer Stärke um 1^h Nachmittags und das Maximum derselben in der Nacht, und beim Nordwind ist dasselbe der Fall. Der Südwind weicht am meisten von dem allgemeinen Mittel und von dem Verhalten

---

[1] »Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick«. Denkschriften der Wiener Akademie, LXVIII. Bd., December 1890, S. 210.

K. Täglicher Gang der Windstärke füı jede der vier Hauptwindrichtungen. Centimeter pro Secunde.

Zeit	N	E	S	W	N	E	S	W	Zeit
	Beobachtet				Berechnet[1]				
Mittern.—1	21	1	23	45	21	5	23	48	Mittn.
1—2	23	6	9	38	18*	5*	15	41	1
2—3	21	12	—7	24	20	9	4	30	2
3—4	24	18	—18	11	21	16	—6	17	3
4—5	31	33	—19	—2	25	23	—16	4	4
5—6	32	36	—26	—11	26*	28*	—26	—7	5
6—7	25	26	—29	—15	23	27	—33	—15	6
7—8	3	10	—36	—25	13	21	—38	—21	7
8—9	—20	7	—41	—29	—3	7	—40*	—25	8
9—10	—41	—37	—43*	—35	—20	—10	—38	—27	9
10—11	—54	—49*	—38	—27	—40	—28	—34	—28	10
11—Mittag	—57	—49*	—22	—24	—56	—44	—27	—29	11
0—1	—72*	—26	—9	—26	—65	—53	—18	—31	Mittag
1—2	—52	—33	0	—28	—66*	—53*	—9	—32*	1
2—3	—43	—41	5	—37*	—55	—46	0	—31	2
3—4	—27	—48	15	—33	—40	—31	9	—29	3
4—5	—7	—26	20	—23	—19	—13	17	—23	4
5—6	9	13	22	—6	3	5	23	—13	5
6—7	28	44	26	13	21	20	29	—2	6
7—8	39	45*	34	24	35	28	33	12	7
8—9	43*	22	38*	32	38	30*	35	26	8
9—10	34	19	37	39	39*	25	35*	38	9
10—11	21	8	32	44	34	18	33	47	10
11—Mittern.	17	7	27	49*	27	11	29	50*	11
Mittel	31	24	27	26	30	23	24	26	Mittel

[1] Die Gleichungen für den täglichen Gang sind:

N ...... $43 \sin(89{\cdot}2+x)+24 \sin(255{\cdot}6+2x)$
E ...... $29 \sin(82{\cdot}4+x)+25 \sin(252{\cdot}0+2x)$
S ...... $37 \sin(146{\cdot}4+x)+3 \sin(55{\cdot}9+2x)$
W ..... $40 \sin(100{\cdot}0+x)+10 \sin(124{\cdot}0+2x)$

der anderen Winde ab durch den frühen Eintritt des Minimums seiner Stärke, schon um 8^h Morgens.

Es müssten noch von mehr Berggipfeln ähnliche Berechnungen vorliegen, um der Ursache dieses frühen Minimums grössere Bedeutung beilegen zu können; Herr Dr. Pernter hat auch nur zweijährige Beobachtungen der Rechnung unterziehen können. Im Widerspruche mit der Annahme einer Verstärkung der Winde durch die infolge der täglichen Wanderung der wärmsten Erdstellen bewirkte Verlagerung der oberen Gradienten steht die Thatsache, dass der Westwind am Nachmittage mehr an Stärke einbüsst als der Ostwind; es müsste umgekehrt sich verhalten. Der Ostwind müsste das Minimum seiner Stärke am späten Nachmittage, der Westwind am frühen Vormittage haben. Das ist aber nicht der Fall, die Epoche des Minimums fällt für beide auf 1^h Nachmittags. Im grossen Ganzen zeigt jede der vier Hauptwindrichtungen denselben täglichen Gang ihrer Stärke, d. i. jenen, den wir als den allgemein in der Höhe herrschenden gefunden haben. Ich glaube demnach nicht, dass man in dieser Tabelle eine Bestätigung der Ansicht finden kann, dass die oberen Gradienten für Ostwinde am Morgen, für Westwinde am Nachmittage verstärkt werden infolge der täglichen Wanderung der Richtung, nach welcher hin die wärmste Erdstelle liegt. Die Unterschiede der Erwärmung zwischen hinlänglich benachbarten Erdstellen, die aus dieser Quelle stammen, sind offenbar viel zu gering, d. h. der Temperaturgradient ist zu klein, um merkliche obere Druckgradienten hervorzubringen.

Für ganz entschieden halte ich aber die Frage doch noch nicht; man müsste, wie schon bemerkt, den bezüglichen Rechnungen eine grössere Ausdehnung geben und wohl besser nur auf den Sommer beziehen. Bemerkenswerther Weise habe ich vor langer Zeit schon aus den Windregistrirungen auf dem Dodabetta Peak in Südindien, 2643 *m* Seehöhe, ein Resultat erhalten, welches für eine Verstärkung der Ostwinde am Vormittage und der Westwinde am Nachmittage sprechen könnte. Die von November bis Mai herrschenden ENE-Winde erreichen um 9^h und 10^h Vormittags das Maximum ihrer Stärke, das Minimum aber in der Nacht; die westlichen Monsunwinde von

Juni bis October erreichen das Maximum ihrer Stärke am Abende, das Minimum um 1^h und 2^h Nachmittags. Der Ostmonsun hat einen fast entgegengesetzten täglichen Gang der Stärke, wie der Westmonsun.[1]

Wenn man also nicht annehmen will, und ich glaube es stehen doch manche Bedenken dieser Annahme entgegen, dass die oberen Theile des Berggipfels durch ihre Erwärmung auf das Anemometer auf dem Gipfel selbst in analoger Weise einwirken, wie die Erdoberfläche auf das Anemometer auf dem Eiffelthurm, so sehe ich zunächst keine andere plausible Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln.

Für diese Annahme würde sprechen die starke Erwärmung der Bergoberfläche im Sommerhalbjahre, welche durch die grosse tägliche Temperaturamplitude bezeugt wird, die, wie ich nachgewiesen habe, viel grösser ist als jene in der freien Atmosphäre in gleicher Höhe. Man könnte über der erwärmten Bergoberfläche bei Tage ein ebensolches Spiel aufsteigender und niedersinkender Luftmassen annehmen, wie über der Niederung, nur müsste die Hauptwirkung von jenen Theilen des Berges ausgehen, die bloss einige hundert Meter unter dem Anemometer liegen, weil sonst der Eintritt des Minimums der Windstärke am Vormittage oder bald nach Mittag auf diesem Wege nicht zu Stande kommen könnte.

Wie sich aber dieser Vorgang mit dem längs der Bergseiten von den Thälern herauf aufsteigenden Luftströmen vereinigen lassen möchte, ist mir unklar. Die zunehmende Bewölkung über dem Berggipfel und die Wolkenkappen auf demselben am Nachmittage sprechen wie so manches Andere zu deutlich für die über dem Berge aufsteigenden Luftmassen. Bevor diese aufsteigende Bewegung aus den Thälern herauf den Berggipfel erreicht hat, könnte allerdings der oben erwähnte locale Vorgang Zeit und Raum zur Entwicklung finden und das frühe Eintreten des Minimums der Windstärke am Vormittage auf manchen Berggipfeln erklären.

---

[1] Hann, »Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und der Richtung des Windes«. Diese Sitzungsber., Bd. LXXIX, II., Jännerheft 1879.

Die bedeutenden Unterschiede im Eintritte des Minimums der Windstärke auf den verschiedenen Berggipfeln würden unter dieser Annahme vollkommen verständlich. Ich möchte dieselbe jedoch nur als Anregung zu weiterem Nachdenken und Nachforschen hinstellen.

Eine Entscheidung über diese Frage könnten nur Wolkenbeobachtungen bringen. Consequente stündliche Aufzeichnungen selbst nur der relativen Geschwindigkeit der Wolken bei Tage würden feststellen, ob auch in der freien Atmosphäre ein Minimum der Geschwindigkeit der Luftströmungen um Mittag eintritt. Dann müsste die Ansicht definitiv aufgegeben werden, dass der tägliche Gang der Windstärke auf den Berggipfeln in seiner Gesammtheit eine locale Erscheinung sei, die von den Erhebungen der Erdoberfläche selbst bedingt wird, und es würden die Registrirungen der Windstärke auf den Berggipfeln erhöhtes Interesse gewinnen und die Frage nach deren Ursache eine grössere Tragweite erlangen.

Die jährliche Periode der Windstärke auf den Berggipfeln.

Die folgende Tabelle *L* enthält die einzelnen Monats- und Jahresmittel der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblick und auf dem Säntis in Meter pro Secunde.

Die Beobachtungsreihe des Sonnblick und auch jene des Säntis ist zu kurz, um die jährliche Periode der Windgeschwindigkeit genauer bestimmen zu lassen. Man sieht aber, wie zu erwarten, dass das Maximum der Windstärke auf unseren Alpengipfeln in den Wintermonaten eintritt, wie in den Niederungen. Doch hat auf den Berggipfeln auch der Sommer eine grosse Windgeschwindigkeit und die Amplitude der jährlichen Variation der Windstärke ist desshalb gering.

Auf dem Sonnblick trat das Minimum der Windstärke in den Monaten Mai bis Juli ein, auf dem Säntis von April bis Juni, der Juli hat wieder eine sehr grosse Windstärke. Bei Gegenüberstellen der gleichen Monate vermisst man fast jede Übereinstimmung im Gange der Windstärke zwischen Sonnblick und Säntis. Besonders auffallend ist die grosse Windgeschwindigkeit des Juli 1888 auf dem Säntisgipfel; auf dem Sonnblick war dieser Monat relativ ruhig. Der Februar 1891,

L. Monats- und Jahresmittel der Windgeschwindigkeit. (Meter pro Secunde.)

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
	Sonnblick												
1887	—	—	—	—	—	—	—	—	8·5	7·7	7·9	6·7	—
1888	10·7	8·2	10·4	6·9	8·6	6·7	6·9	7·0	6·2	(9·9)	7·7	8·5	8·1
1889	8·6	8·7	10·4	8·6	7·6	8·6	7·9	10·3	9·1	8·8	10·4	10·4	9·1
1890	13·8	9·7	11·3	10·5	9·8	(10·3)	8·4	12·3	11·1	10·7	9·0	10·9	10·6
1891	8·9	14·5	12·1	8·5	9·9	9·1	8·2	9·7	8·8	10·6	10·2	10·9	10·1
1892	11·4	10·3	9·4	9·4	8·1	9·0	7·9	9·0	8·7	10·2	8·9	10·2	9·4
1893	12·3	9 8	10·1	9·0	6·6	7·0	8·1	6·7	8·8	11·3	9·1	9·4	9·0
Mittel	10·95	10·20	10·62	8·82	8·43	8·45	7·90	9·17	8·74	9·89	9 03	9·57	9·31
	Säntis												
1886	8·9	5·4	7·7	6·2	6·6	5·8	8·7	8·6	6·4	7·2	10·8	12·1	7·9
1887	6·9	8·4	7·3	7·4	8·4	6·4	6·7	7·9	7·1	6·7	7·1	8·9	7·4
1888	9·7	7·7	10·4	7·1	7·3	6·7	11·3	6·6	5·6	8·3	9·2	7·5	8·1
1889	8·7	12·7	5·9	5·5	5·1	5·3	8·0	8·6	8·5	7·8	6·5	7·9	7·5
1890	11·3	7·2	7·6	6·2	6·9	8·8	8·3	8·6	6·7	8·2	6·9	6·9	7·8
1891	8·6	7·1	9·2	5·2	6·5	7·7	8·7	8·8	5·9	7·4	8·6	11·3	7·9
1892	8·9	10·4	6·6	6·1	6·6	8·3	8·4	7·2	7·2	8·1	6·4	7·8	7·7
1893	7 3	9·1.	6·3	5·2	5·3	6·4	6·7	5·8	8·8	9·4	7·0	7·9	7·1
Mittel	8·79	8·50	7·62	6·11	6·59	6·92	8·35	7·76	7·02	7·89	7·81	8·79	7·68

der dem Sonnblick das höchste Monatsmittel der Windstärke brachte, war wieder umgekehrt auf dem Säntis ruhig.

Ich habe die Monatsmittel der Windstärke für Kremsmünster und Wien aus den gleichen Monaten abgeleitet, wie für den Sonnblick. Auch hier vermisst man eine Übereinstimmung. Die folgende kleine Tabelle enthält diese Mittel, sowie jene für den Obir aus der Periode Februar 1884 bis November 1890 inclusive und Jänner bis December 1893 (also für nicht ganz acht Jahrgänge). Die Mittel für den Säntis sind zum Vergleiche beigegeben.

Jährliche Periode der Windgeschwindigkeit.
Meter pro Secunde.

Ort	Obir	Säntis	Sonnblick	Kremsmünster[1]	Wien[1]
Höhe	2140 *m*	2500 *m*	3110 *m*	390 *m*	220 *m*
Jahre	8	8	6	6	6
Jänner	**7·5**	**8·8**	**10·9**	3·7	5·9
Februar	7·2	8·5	10·2	**4·3**	5·8
März	6·6	7·6	10·6	**4·3**	**6·3**
April	5·6	6·1*	8·8	3·7	5·4
Mai	5·3	6·6	8·4	3·4	4·7
Juni	5·4	6·9	8·4	3·5	4·9
Juli	4·8	8·3	7·9*	3·6	5·3
August	4·7*	7·8	9·2	3·2*	4·8
September	5·3	7·0	8 7	3·3	4·8
October	6·2	7·9	9·9	3·2	4·7
November	6·3	7·8	9·0	3·3	4·4*
December	6·7	8·8	9·6	3·1*	4·5
Jahr	6·0	7·7	9·3	3·5	5·1

[1] Aus genau derselben Periode abgeleitet, aus welcher die Mittel für den Sonnblick stammen.

Auf den Gipfelstationen hat der Jänner und nach ihm der Februar das Maximum der Windstärke, das Minimum fällt auf das Frühjahr oder den Sommer (zwischen April und August).

Die mit den Sonnblick-Mitteln der Zeit nach genau correspondirenden Mittel der Windgeschwindigkeit für Kremsmünster und Wien zeigen durchaus keinen parallelen Gang, weder mit dem Sonnblick, noch untereinander.

Auf die mittlere Windgeschwindigkeit nehmen locale Verhältnisse in hohem Grade Einfluss, so dass eine Übereinstimmung im jährlichen Gange der Windstärke selbst in gleichen Perioden nur wenig zur Geltung kommt. Unten trat das Maximum der Windstärke im März ein, auf denselben Monat fällt auch im vieljährigen Mittel das Maximum. Der Juli, in dem auf dem Sonnblick die kleinste Windgeschwindigkeit registrirt worden ist, hatte unten in Kremsmünster und Wien ein secundäres Maximum der Windstärke.

Der Vollständigkeit der Charakterisirung der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel halber will ich zum Schlusse auch noch einige Daten über die absoluten Maxima der Windgeschwindigkeit anführen. Wegen der Unsicherheit der Reduction der Aufzeichnungen auf absolutes Maass darf man bei den folgenden Zahlen keine grosse Genauigkeit voraussetzen.

Die mittleren Monatsmaxima der Windgeschwindigkeit aus der Periode September 1887 bis December 1893 sind:

Mittlere Monatsmaxima der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel. Meter pro Secunde.

Monat	m/s	Monat	m/s
December	30	Juni	27
Jänner	35	Juli	27
Februar	32	August	29
März	33	September	28
April	28	October	30
Mai	29	November	31

Das mittlere Jahresmaximum ist 40 *m* pro Secunde. Die grösste Windgeschwindigkeit trat in der Nacht vom 17. zum 18. Februar 1891 ein bei einem Sturme aus NE und N. Der

Beobachter notirte um 9^h Abends NE_8 und um 7^h Morgens N_{10} bei —13° C. Das Anemometer gibt als grösste Windgeschwindigkeit 48 *m* pro Secunde (d. i. mittlere Windgeschwindigkeit für ein ganzes Stundenintervall).

Anhang.

Tabelle I und II enthalten den täglichen Gang der Windstärke auf dem Sonnblick nach den rohen Mitteln.

Die Reduction der anemometrischen Aufzeichnungen der Windgeschwindigkeit auf Meter pro Secunde erfolgte unter der Annahme der Robinson'schen Regel. Da aber von März 1889 an infolge einer Änderung am Registrirapparat die Windgeschwindigkeiten etwas kleiner ausfielen, wurden dieselben von da an mit einem empirischen Factor 1·4 multiplicirt, um sie mit den früheren unmittelbar vergleichbar zu machen.[1] Man darf aus diesen und anderen Gründen, die zum Theile für die Windregistrirungen überhaupt gelten, den folgenden absoluten Werthen der Windgeschwindigkeiten auf dem Sonnblickgipfel keine zu grosse Bedeutung beilegen.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit im August im Mittel der sechs Jahre 1888—1893 war so abweichend von jenem der übrigen Monate, dass ich, um den jährlichen Gang dieses Elementes, wie er sich im Mittel vieler Jahre herausstellen dürfte, etwas übersichtlicher zu erhalten, mir erlaubte, für diesen Monat nur die vierjährigen Mittel 1890 bis 1893 einzustellen. Es ergab sich nämlich, dass es die beiden ersten Jahrgänge waren, welche diese Abweichungen von den sechs- bis siebenjährigen Mitteln der anderen Monate zumeist hervorbrachten. Um jedermann ein Urtheil über die Berechtigung dieses einigermassen willkürlich scheinenden Vorganges zu gestatten, mögen die stündlichen Windgeschwindigkeiten im August nach den Mitteln der verschiedenen Perioden hier Platz finden. Die Windgeschwindigkeiten in Kilometern pro Stunde entsprechen immer jenem Stundenintervalle, das der angeschriebenen Stunde vorausgeht.

---

[1] Man sehe darüber die citirte Abhandlung von Dr. Pernter nach auf S. 36 des Separatabdruckes (S. 236 des Bandes).

Mittlere Windgeschwindigkeit im August.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
					Vormittag						
25·0	24·6	25·3	25·4	25·9	24·9	24·3	23·1	23·0*	23·8	23·2	23·6
32·5	33·6	33·8	34·1	**35·7**	34·3	33·0	33·0	34·3	32·8	32·0	30·9
					Nachmittag						
23·7	23·6	24·7	24·2	23·3	23·8	24·8	24·7	25·2	**25·8**	**25·8**	25·4
30·6	28·5	28·7	27·4	27·2*	27·9	27·8	29·3	30·7	29·2	29·1	31·3

In der ersten Reihe, den vier Jahren 1890—1893 entsprechend, fällt das Minimum der Windgeschwindigkeit etwa auf 9^h Vormittags und stimmt darin mit den vorhergehenden und nachfolgenden Monaten überein; in der zweiten Reihe hingegen aus den zwei Jahrgängen 1888 und 1889 abgeleitet, tritt das Minimum erst um 5^h Abends ein, wo in allen Nachbarmonaten die Windgeschwindigkeit schon wieder erheblich über dem Mittel sich befindet. Es ist nun durchaus unwahrscheinlich, dass ein Monat derart ohne jeden Übergang sich von den Nachbarmonaten unterscheidet, und es schien mir daher berechtigt, die beiden Jahrgänge 1888 und 1889 als mit grösseren Störungen behaftet, vorläufig von den Mittelwerthen für den August auszuscheiden, um den jährlichen Gang der Stundenmittel deutlicher hervortreten zu lassen. Ich zweifle nicht, dass die vierjährigen Mittel den langjährigen näher kommen dürften, als die sechsjährigen, welche auch die Jahre 1888 und 1889 einschliessen.

Die Häufigkeit der acht Hauptwindrichtungen nach den unmittelbaren dreimaligen täglichen Beobachtungen um 7^h, 2^h und 9^h in den derart differirenden Jahrgängen war folgende:

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen
1888—1889..	26	6	1	1	10	23	19	7	6
1890—1893..	13	5	2	4	10	25	14	17	3
1887—1893..	18	4	1	3	9	24	17	14	6

Die beiden Jahrgänge 1888—1889, mit der anormalen Verlegung des Minimums der Windstärke auf den Nachmittag zeichnen sich durch ein anormales Vorwiegen des Nordwindes

aus; nimmt man aber NW, N und NE zusammen, dann ist allerdings kaum ein Unterschied zu bemerken. Es bleibt demnach doch fraglich, ob das Vorwiegen gewisser Windrichtungen die Anomalie im täglichen Gange der Windstärke während der beiden ersten Jahrgänge erklären kann.

Die Tabelle III enthält die Constanten der periodischen Reihen mittelst deren der jährliche Gang der täglichen Variation berechnet worden ist, nachdem die rohen Mittel aus sechs Jahren noch zu grosse Unregelmässigkeit zeigen.

Es wurden zunächst die Constanten der Reihe

$$p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x$$

für die einzelnen Monate berechnet und dann die p und q, die eine ausgesprochene jährliche Periode zeigen, desgleichen wieder durch analoge Sinusreihen dargestellt. Da der August in dem Werthe von q_1 nach den Beobachtungen eine auffallende Störung zeigt, wurde in Tabelle III der berechnete Werth von q_1 (also —0·76 statt —0·22, siehe S. 680) statt dessen eingestellt und die Rechnung wiederholt. So wurden die mit q_1' bezeichneten Werthe erhalten, die sich natürlich nur in den Monaten Juli, August und September merklich von den früheren unterscheiden.

Es schien mir, dass es bei den Coëfficienten der einmaligen täglichen Welle zweckmässiger sei, sich auf die Berechnung mit zwei Gliedern zu beschränken; die jährliche Periode der unmittelbar nach den Beobachtungen erhaltenen Werthe von p_1 und q_1 ist von einfacher Natur. Hingegen ist es bei den Coëfficienten p_2, q_2 jedenfalls erforderlich, noch ein drittes periodisches Glied zur Berechnung derselben zu verwenden, weil im jährlichen Gange derselben drei Maxima und drei Minima hervortreten.

Als Verwandlungszahl der nominellen Kilometer pro Stunde in Meter pro Secunde wurde angenommen

$$0·2777 \times 1·25 = 0·347.$$

Dies gilt für die rohen und für die berechneten reducirten Monatsmittel. Für die Mittel der Jahreszeiten wurden etwas

andere Reductionsfactoren verwendet, d i. für den Winter 0·353, Frühling 0·344, Sommer 0·356, Herbst 0·367. Die Bearbeitung der rohen, den Anemogrammen entnommenen Windgeschwindigkeiten erfolgte in längeren Pausen mit Unterbrechungen, und so kam es, dass ich zuerst für die Tabelle der Monatsmittel einen einheitlichen Factor zur Reduction benützte, dann später etwas strenger verfahrend, zur Reduction der Jahreszeitenmittel verschiedene der ungleichen Zahl der zu reducirenden Monate genauer angepasste Factoren.[1] Daher stimmen die Jahreszeitenmittel nicht völlig genau mit den Monatsmitteln, wie es sein sollte. Der Unterschied ist aber für den vorliegenden Zweck und die erreichbare Genauigkeit der mittleren Windgeschwindigkeiten überhaupt völlig irrelevant.

Tabelle IV, täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Säntisgipfel, bedarf keiner Erläuterung.

Tabelle V bis XII enthalten die Jahreszeitenmittel der Windgeschwindigkeit in Meter pro Secunde und die Abweichungen der Stundenmittel von den entsprechenden 24stündigen Mitteln ohne irgend eine Ausgleichung.

In einigen dieser Tabellen bemerkt man durch alle vier Jahreszeiten hindurchgehende Störungen des täglichen Ganges, von denen jene, welche in die Nachtzeit fallen, sicherlich nicht durch Wechseln der Autographenpapiere und ähnliche äussere Beeinflussungen entstanden sein können. Auf dem Säntis macht sich 2—3^h Morgens eine Abnahme der Windstärke zu allen Jahreszeiten geltend, von 7—8^h a. eine Zunahme derselben. Sonnblick 1—2^h a. Abnahme der Windstärke, desgleichen 4—5^h p. auffallende Abnahme derselben in allen Jahreszeiten. Die Papiere wurden angeblich stets um Mittag ausgewechselt.

Auf dem Ben Nevis, wo die Windstärken direct geschätzt werden, ist Morgens um 5^h eine erhebliche Abnahme der Windstärke in allen Jahreszeiten zu bemerken, dagegen um 3^h a. eine Zunahme. Um 3^h und 4^h Nachmittag macht sich eine ganz auffallende Abnahme der Windstärke in allen Jahreszeiten bemerkbar.

---

[1] Einen Theil der Monatsmittel hatte schon Herr Dr. Pernter in seiner Abhandlung reducirt.

Diesen Störungen mögen in der That irgend welche vorübergehende Einflüsse auf den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Grunde liegen, die in der Natur der Erscheinung begründet sind und mit anderen meteorologischen Vorgängen zusammenhängen. Vorläufig genügt es, darauf aufmerksam gemacht zu haben. Es werden vieljährige Registrirungen nöthig sein, um dieselben genauer untersuchen zu können.

Anhang. Tabelle I. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel.
Mittel aus 6 Jahren. Meter pro Secunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
12— 1h a.	11·03	10·86	10·96	8·98	8·84	8·77	8·01	8·67	8·46	8·95	8·70	9·99	9·35
1— 2	11·17	10·65	10·51	8·64	8·70	8·29	7·66	8·53	8·08	8·84	8·74	9·68	9·12
2— 3	11·20	10·86	10·89	8·60	8·29	8·50	7·73	8·77	8·32	8·91	8·84	9·64	9·21
3— 4	11·06	10·37	10·82	8·46	7·91	8 32	7·80	8·81	8·05	8·91	8·84	9·36	9·06
4— 5	11·17	10·27	10·75	8·29	7·62	8·29	7·66	8·98	8·05	8·98	8·91	9 36	9·02
5— 6	11·52	10·13	10·44	8·29	7·62	7·94	7·62	8·64	7·94	9·16	8·88	9·33	8·95
6— 7	11·62	9·85	10·20	8·22	7·66	7·62	7·42	8 43	7·84	9·40	8·74	9·09	8·84
7— 8	11·09	9·61	10·16	8·18	7·84	7·32	7·28	8·01	7·97	9 19	8·60	9·16	8·70
8— 9	10·89	9·43	10·02	8·43	8·05	7·32	7·21	7·97	8·08	9·29	8·39	9·29	8·69
9—10	10·86	9·54	9·88	8·64	8·11	7·32	7·32	8·25	8 08	9·33	8·57	9·43	8·77
10—11	10·54	9·36	10·05	8·74	8·36	7·32	7·46	8·05	7·94	9·33	8·46	9·26	8·74
11—Mittag	10·82	9·33	10·44	8·81	8·50	7·49	7·59	8·18	8·08	9·47	8 39	9·43	8·87
12— 1	11·34	9·71	10·89	9·09	8·74	7·84	7·77	8·22	7·94	9·57	8·81	9·82	9·14
1— 2	10·82	9·88	10·75	9·26	8·57	8·05	8·11	8·18	8·08	9·64	9·01	9·71	9·17
2— 3	11·09	10·23	11·09	9·16	8·84	8·53	8·01	8·57	8·18	9·75	8·98	9·68	9·34
3— 4	11·24	10·16	10·99	9·12	8·77	8·64	8·36	8·39	8·15	9·61	8·98	9·68	9·34
4— 5	10·86	10·34	10·99	8·84	8·60	8·67	8·32	8·08	8·15	9·57	8·74	9·47	9·21
5— 6	11·03	10·44	11·34	8·95	8·74	8·91	8·64	8·25	8·29	10·02	8·95	9·61	9·43
6— 7	10·82	10·27	11·24	9·01	8·70	9·09	8·70	8·60	8·29	9·75	8·81	9·33	9·38
7— 8	10·93	10·51	11·52	9·33	9·33	9·12	8·84	8·57	8·81	9·92	8·77	9·57	9·60
8— 9	10·61	10 16	11·24	9·29	9·36	9·09	8·46	8·74	8·77	9·50	8·50	9·64	9·44
9—10	10·34	10·44	11·13	9·43	9·23	9·26	8·29	8·95	8·74	9·29	8·60	9·75	9·45
10—11	10·41	10·68	11·03	9·40	9·29	9·40	8·43	8·95	8·74	9·12	8·60	9·68	9·47
11—Mittern.	10·72	10·51	10·96	9·05	8·91	9·26	8·46	8·81	8·50	8·95	8·50	9·85	9·37
Mittel	10·96	10·15	10·76	8·84	8·52	8·35	7·96	8·48	8·23	9·35	8·72	9·53	9·15

Anhang. Tabelle II.

Sonnblick. Abweichungen der Stundenmittel vom Monatsmittel.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mittn.— 1ʰa.	·07	·71	·20	·14	·32	·42	·05	·19	·23	— ·40	— ·02	·46	·20
1— 2	·21	·50	— ·25	— ·20	·18	— ·06	— ·30	·05	— ·15	— ·51	·02	·15	— ·03
2— 3	·24	·71	·13	— ·24	— ·23	·15	— ·23	·29	·09	— ·44	·12	·11	·06
3— 4	·10	·22	·03	— ·38	— ·61	— ·03	— ·16	·33	— ·18	— ·44	·12	— ·17	— ·09
4— 5	·21	·12	— ·01	— ·55	— ·90	— ·06	— ·30	·50	— ·18	— ·37	·19	— ·17	— ·13
5— 6	·56	— ·02	— ·32	— ·55	— ·90	— ·41	— ·34	·16	— ·29	— ·19	·16	— ·20	— ·20
6— 7	·66	— ·30	— ·56	— ·62	— ·86	— ·73	— ·54	— ·05	— ·39	·05	·02	— ·44	— ·31
7— 8	·13	— ·54	— ·60	— ·66	— ·68	—1·03	— ·68	— ·47	— ·26	— ·16	— ·12	— ·37	— ·45
8— 9	— ·07	— ·72	— ·74	— ·41	— ·47	—1·03	— ·75	— ·51	— ·15	— ·06	— ·33	— ·24	— ·46
9—10	— ·10	— ·61	— ·88	— ·20	— ·41	—1·03	— ·64	— ·23	— ·15	— ·02	— ·15	— ·10	— ·38
10—11	— ·42	— ·79	— ·71	— ·10	— ·16	—1·03	— ·50	— ·43	— ·29	— ·02	— ·26	— ·27	— ·41
11—Mittag	— ·14	— ·82	— ·32	— ·03	— ·02	— ·86	— ·37	— ·30	— ·15	·12	— ·33	— ·10	— ·28

12—1h	·36	−·44	·13	·25	·22	−·51	−·19	−·26	−·29	·22	·09	·29	−·01
1—2	−·14	−·27	−·01	·42	·05	−·30	·15	−·30	−·15	·29	·29	·18	·02
2—3	·13	·08	·33	·32	·32	·18	·05	·09	−·05	·40	·26	·15	·19
3—4	·28	·01	·23	·28	·25	·29	·40	−·09	−·08	·26	·26	·15	·19
4—5	−·10	·19	·23	·00	·08	·32	·36	−·40	−·08	·22	·02	−·06	·06
5—6	·07	·29	·58	·11	·22	·56	·68	−·23	·06	·67	·23	·08	·28
6—7	−·14	·12	·48	·17	·18	·74	·74	·12	·06	·40	·09	−·20	·23
7—8	−·03	·36	·76	·49	·81	·77	·88	·09	·58	·57	·05	·04	·45
8—9	−·35	·01	·48	·45	·84	·74	·50	·26	·54	·15	−·22	·11	·29
9—10	−·62	·29	·37	·59	·71	·91	·33	·47	·51	−·06	−·12	·22	·30
10—11	−·55	·53	·27	·56	·77	1·05	·47	·47	·51	−·23	−·12	·15	·32
11—Mittern.	−·24	·36	·20	·21	·39	·91	·50	·33	·27	−·40	−·22	·32	·22
Mittel	·24	·38	·37	·33	·44	·59	·42	·28	·24	·28	·16	·20	·23

Anhang. Tabelle III.

Sonnblickgipfel. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit.

Willkürliche Einheiten. $x = 0$ für $11^1/_2{}^h$ Nachts.

	p_1	q_1	p_2	q_2	p_1	q_1	p_1	q_2	q_1'
	nach den Beobachtungen				berechnet mit 2 Gliedern		berechnet mit 3 Gliedern		berechnet mit 2 Gliedern
Jänner	—0·27	0·53	—0·62	0·54	0·59	0·07	0·50	0·28	0·05
Februar	1·59	—0·38	—0·21	0·68	0·90	—0·22	1·13	—0·42	—0·28
März	0·94	—1·31	—0·29	0·38	0·91	—0·92	1·01	—1·13	—0·94
April	0·36	—1·30	0·64	—0·03	0·89	—1·61	0·66	—1·42	—1·57
Mai	0·81	—1·71	0·89	—0·21	1·07	—1·87	0·98	—1·66	—1·83
Juni	2·12	—1 68	—0·16	0·22	1·38	—1·61	1·61	—1·80	—1·65
Juli	0·92	—1·61	—0·25	0·03	1·46	—1·11	1·55	—1·32	—1·28
August	1·01	—0·22	0·09	0·11	1·05	—0·76	0·82	—0·57	—0 98
September	0·79	—0·60	0·24	—0·37	0 33	—0·66	0·24	—0·45	—0·82
October	—0·61	—1·02	—0·40	—0·25	—0·27	—0·63	—0·04	—0·82	—0·67
November	—0·01	—0·15	—0·39	0·51	—0·35	—0·44	—0·27	—0·65	—0·38
December	0·37	—0·42	0·49	0·35	0·06	—0·10	—0·17	0·09	—0·06
Jahr	0·67	—0·82	0·00	0·16	0·67	—0·82	0·67	—0·82	—0·87

$$p_1 = 0\cdot668+0\cdot718 \sin(323^\circ9+x)+0\cdot390 \sin(67^\circ4+2x)+0\cdot247 \sin(338^\circ6+3x)$$

$$q_1 = -0\cdot822+0\cdot767 \sin(129\cdot7+x)+0\cdot366 \sin(55\cdot0+2x)+0\cdot283 \sin(132\cdot1+3x)$$

$$q_1' = -0\cdot867+0\cdot802 \sin(124\cdot1+x)+0\cdot282 \sin(62\cdot4+2x)$$

$$p_2 = 0\cdot002+0\cdot260 \sin(321\cdot4+x)+0\cdot251 \sin(234\cdot9+2x)+0\cdot408 \sin(144\cdot0+2x)$$

$$q_2 = 0\cdot163+0\cdot318 \sin(77\cdot3+x)+0\cdot251 \sin(113\cdot9+2x)+0\cdot165 \sin(284\cdot0+2x)$$

Berechnete Werthe der Constanten.

	p_1	q_1'	p_2	q_2	a_1	a_2	A_1	A_2
Jänner	0·59	0·05	—0·13	0·54	0·59	0·55	85°1	346°5
Februar	0·90	—0·28	—0·59	0·50	0·94	0·77	107·3	310·3
März	0·91	—0·94	—0·17	0·34	1·31	0·38	135·3	333·4
April	0·89	—1·57	0·74	0·00	1·81	0·74	150·5	90·0
Mai	1·07	—1·83	0·73	—0·12	2·12	0·74	149·7	99·3
Juni	1·38	—1·65	—0·06	0·14	2·15	0·15	140·1	336·8
Juli	1·46	—1·28	—0·28	0·24	1·94	0·37	131·2	310·6
August	1·05	—0·98	0·14	—0·12	1·44	0·18	133·0	130·6
September	0·33	—0·82	0·13	—0·42	0·88	0·44	158·1	162·8
October	—0·27	—0·67	—0·33	—0·13	0·72	0·35	202·0	248·5
November	—0·35	—0·38	—0·27	0·39	0·52	0·47	222·6	325·3
December	0·06	—0·06	0·11	0·60	0·08	0·61	135·0	10·4
Jahr	0·67	—0·87	0·00	0·16	1·09	0·16	142·4	0·9

Anhang. Tabelle IV. Säntis. Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit.
Mittel aus acht Jahren (1886—1893). Meter pro Secunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mittn.— 1ʰa.	8·49	8·60	7·39	6·66	6·92	7·52	9·12	8·49	7·81	7·86	7·94	8·81	7·97
1— 2	8·49	8·66	7·36	6·51	6·59	7·31	9·21	8·43	7·90	7·80	7·90	8·66	7·90
2— 3	8·52	8 36	7·30	6 21	6 39	7·35	9·10	8·24	7·62	7·79	7·78	8·51	7·76
3— 4	8 66	8·72	7·26	6·29	6·56	7·50	9·24	8·36	7·84	7·84	7·78	8·48	7·88
4— 5	8·59	8·46	7·24	6·28	6·40	7·25	8 99	8·09	7·42	7·80	7·44	8·31	7 69
5— 6	8·75	8·28	7·20	6·25	6·56	6·96	8·61	8·01	7·42	7·71	7·73	8·36	7·65
6— 7	8·81	8·21	7 14	6·12	6·45	6·88	7·98	7·90	7·29	7 94	7·69	8·26	7·56
7— 8	9·15	8·39	7·74	6·05	6·66	6·60	7·71	7·74	7·05	8·00	8·09	8·62	7·65
8— 9	9·00	8·47	7·65	5·76	6·30	6 45	7·45	7·24	6·63	7·84	7·90	8·54	7·44
9—10	9·01	8 36	7·70	5·65	6·11	6·25	7·31	7·08	6·51	7·92	7·86	8·59	7 36
10—11	9·04	8·40	7·71	5·57	6·06	6·09	6·97	6 86	6·46	7·54	7·75	8·80	7·27
11—Mittag	9·09	8·15	7·76	5·56	6·22	6 17	6·91	6·84	6·40	7·48	7·92	9·01	7·28
12— 1	8·72	8·25	7·81	5·64	6·25	6·45	7·16	7·14	6·31	7·46	7 75	9·18	7·34
1— 2	8·68	8·45	7 68	5·69	6·25	6·62	7·36	7·08	6·31	7·49	7·55	8·86	7·33
2— 3	8·80	8·36	7·62	5·74	6·04	6·54	7·55	7·06	6·14	7·66	7·51	8·72	7·31
3— 4	9 00	8 61	7·89	5·84	6·45	6 70	8·01	7·21	6·43	7·73	7 74	9·31	7·58
4— 5	9·03	8·70	7·90	5·84	6 38	6·74	8·45	7·34	6·52	8·15	7·92	9 70	7·72
5— 6	8 76	8·74	8·04	6 28	6·56	6·89	8·60	7·64	6·49	8·42	7·92	9·20	7·79
6— 7	8·85	8·74	7·89	6·50	6·89	7·16	8·92	7·89	6·86	8·36	7·98	9 29	7·94
7— 8	8·70	8·65	7·77	6·36	7·09	7·29	9 08	7·81	7·15	8·45	7·86	9·01	7·93
8— 9	8·75	8·59	7·76	6·30	7·25	7·26	9·06	7·90	7·45	8·12	7·86	8·85	7·93
9—10	8 80	8·51	7·91	6·46	7·38	7 38	9·14	8 34	7·70	8·16	8 06	8·69	8·04
10—11	8 69	8·60	7·68	6·60	7·16	7·25	9·15	8·38	7·73	8·10	7·95	8·72	8·00
11—12	8·64	8·35	7·62	6·58	6·94	7·38	8·92	8·24	7·66	7·84	7·90	8·93	7·92
Mittel	8·79	8·48	7·63	6·11	6·58	6·92	8·33	7·72	7·05	7·89	7·82	8·81	7 68

Anhang. Tabelle V. Paris, Bureau Central.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht	2·07	1·83	1·60	1·52	— ·24	— ·54	— ·50	— ·27	— ·39
1ʰ a.	2 03	1·80	1·48	1·46	— ·28*	— ·57	— ·62	— ·33	— ·45
2	2·06	1·68	1·44	1·38	— ·25	— ·69	— ·66	— ·41	— ·50
3	2·09	1·73	1·38	1·34	— ·22	— ·64*	— ·72*	— ·45*	— ·51
4	2 04	1·69	1·40	1·36	— ·27	— ·68	— ·70	— 43	— ·52
5	2·11	1·73	1·41	1·36	— ·20	— ·64	— ·69	— ·43	— ·49
6	2·03	1·77	1·52	1·39	— ·28*	— ·60	— ·58	— ·40	— ·46
7	2·03	1·98	1·84	1·47	— ·28	— ·39	— ·26	— ·32	— ·31
8	2·12	2·33	2·07	1·62	— ·19	— ·04	— ·03	— ·17	— ·11
9	2 21	2·60	2·32	1·83	— ·10	·23	·22	·04	·10
10	2·49	2·89	2 60	2 12	·18	·52	·50	·33	·38
11	2·62	3·00	2·80	2 37	·31	·63	·70	·58	·55
Mittag	2·75	3·11	2·80	2·52	·44	·74	·70	·73	·65
1	2·77	3·12	2·93	2·51	·46	·75	·83*	·72*	·69
2	2·83	3·18	2 90	2·47	·52*	·81*	·80	·68	·70*
3	2·65	3·10	2·79	2·30	·34	·73	·69	·51	·57
4	2·57	3·10	2·83	2·18	·26	·73	·73	·39	·53
5	2·41	2·99	2·76	1·96	·10	·62	·66	·17	·39
6	2·40	2·70	2·46	1·78	·09	·33	·36	— ·01	·19
7	2·31	2·39	2·06	1·74	·00	·02	— ·04	— ·05	— ·02
8	2·31	2·22	1·79	1·67	,00	— ·15	— ·31	— ·12	— ·14
9	2·26	2·16	1·75	1·65	— ·05	— ·21	— ·35	— ·14	— ·19
10	2·14	1·97	1·73	1·56	— ·17	— ·40	— ·37	— ·23	— ·29
11	2·10	1·86	1·64	1·51	— ·21	— ·51	— ·46	— ·28	— ·36
Mittel	2·31	2·37	2·10	1·79	·23	·51	·52	·34	·40

Anhang. Tabelle VI. Eiffelthurm.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht	9·62	10·16	8·94	9·44	·43	1·28	1·25	1·05	1·00
1	9·59	9·92	8·78	9·24	·40	1·04	1·09	·85	·84
2	9·55	9·76	8·78	9·09	·36	·88	1·09	·70	·76
3	9·78	9·73	8·61	9·04	·59	·85	·92	·65	·75
4	9·76	9·59	8·35	8·96	·57	·71	·66	·57	·63
5	9·82	9·49	8·32	8·80	·63	·61	·63	·41	·57
6	9·74	9·23	7·86	8·84	·55	·35	·17	·45	·38
7	9·73	8·73	7·11	8·84	·54	— ·15	— ·58	·45	·06
8	9 67	7·92	6·21	8·38	·48	— ·96	—1·48	— ·01	— ·49
9	9·43	7·34	6·04	7·74	·24	—1·54	—1·65	— ·65	— ·90
10	9·13	7·42	6·25	7·12	— ·06	—1·46	—1·44	—1·27	—1·06
11	8·46	7·53	6·60	6·97	— ·73	—1·35	—1·09	—1·42	—1·15
Mittag	8·04	7·63	6·79	6·93	—1·15	—1·25	— ·90	—1·46	—1·12
1	7·77	7·78	6·96	7·03	—1·42	—1·10	— ·73	—1·36	—1·15
2	7·73	7·84	7·21	7·04	—1·46	—1·04	— ·48	—1·35	—1·08
3	7·83	8·14	7·12	7·24	—1·36	— ·74	— ·57	—1·15	— ·96
4	8·24	8·46	7·28	7·43	— ·95	— ·42	— ·41	— ·96	— ·69
5	8·69	8·34	7·44	7·92	— ·50	— ·54	— ·25	— ·47	— ·44
6	9·26	8·60	7·48	8·49	·07	— ·28	— ·21	·10	— ·08
7	9 57	9·26	7·58	8·97	·38	·38	— ·11	·58	·30
8	9·84	9·81	8·17	9·39	·65	·93	·48	1·00	·76
9	9·90	10·08	8·64	9·42	·71	1·20	·95	1·03	97
10	9·75	10·10	8·99	9·58	·56	1·22	1·30	1·19	1·06
11	9·72	10·22	9·05	9·49	·53	1·40	1·36	1·10	1·10
Mittel	9·19	8·88	7·69	8·39	·64	·90	·82	·84	·76

Anhang. Tabelle VII. Blue Hill.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht—1	10·01	8·58	7·28	8·23	·14	— ·15	·45	— ·01	·11
1— 2	9·74	8·45	7·12	8·09	— ·13	— ·28	·29	— ·15	— ·07
2— 3	9·78	8·58	6·98	8·18	— ·09	— ·15	·15	— ·06	— ·04
3— 4	9·83	8·54	6·84	8·09	— ·04	— ·19	·01	— ·15	— ·09
4— 5	9·83	8·36	6·75	8·14	— ·04	— ·37	— ·08	— ·10	— ·15
5— 6	9·78	8·32	6·62	8·14	— ·09	— ·41	— ·21	— ·10	— ·20
6— 7	9·78	8·23	6·44	8·18	— ·09	— ·50	— ·39	— ·06	— ·26
7— 8	9·69	8·18	6·21	7·96	— ·18	— ·55	— ·62	— ·28	— ·41
8— 9	9·78	8·45	6 26	8·09	— ·09	— ·28	— ·57	— ·15	— ·27
9—10	10·01	8·67	6·35	8·36	·14	— ·06	— ·48	·12	— ·07
10—11	9·96	8·67	6·44	8·41	·09	— ·06	— ·39	·17	— ·05
11—Mittag	10·01	8·72	6·57	8 54	·14	— ·01	— ·26	·30	·04
12— 1	10 23	9·08	6·84	8·85	·36	·35	·01	·61	·33
1— 2	10·14	9·17	6·94	8·76	·27	·44	·11	·52	·34
2— 3	10·19	9·53	7·03	8·54	·32	·80	·20	·30	·40
3— 4	10 01	9·71	7·12	8·45	·14	·98	·29	·21	·40
4— 5	9·69	9·57	6·98	8·00	— ·18	·84	·15	— ·24	·14
5— 6	9 61	9·13	6·80	8·00	— ·26	·40	— ·03	— ·24	— ·03
6— 7	9·69	8·67	6·71	8·09	— ·18	— ·06	— ·12	— ·15	— ·13
7— 8	9·92	8·72	6·89	8·27	·05	— ·01	·06	·03	·03
8— 9	9·96	8·67	7·12	8·09	·09	— ·06	·29	— ·15	— ·04
9—10	9·83	8·63	7·15	8·09	— ·04	— ·10	·32	— ·15	·01
10—11	9·80	8·45	7·15	8·05	— ·07	— ·28	·32	— ·19	— ·05
11—12	9·65	8·58	7·24	8·14	— ·22	— ·15	·41	— ·10	— ·02
Mittel	9·87	8·73	6 83	8·24	·14	·31	·26	·19	·15

Anhang. Tabelle VIII. Ben Nevis.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht	11·12	8·21	5·69	8·04	·38	·48	·45	·56	·47
1	11·21	8·27	5·80	7·80	·47	·54	·56	·32	·47
2	11·21	8·39	5·96	7·98	·47	·66	·72	·50	·59
3	11·31	8·54	5·99	8·16	·57	·81	·75	·68	·70
4	11·35	8·30	6·07	8·10	·61	·57	·83	·62	·66
5	10·56	7·69	5·58	7·38	— ·18	— ·07	·34	— ·10	·00
6	10·75	7·84	5·66	7·35	·01	·11	·42	— ·13	·10
7	10·72	7·81	5·52	7·41	— ·02	·08	·28	— ·07	·07
8	10·65	7·72	5·25	7·32	— ·09	— ·01	·01	— ·16	— ·06
9	10·79	7·81	5·08	7·41	·05	·08	— ·16	— ·07	— ·03
10	10·69	7·60	5·06	7·11	— ·05	— ·13	— ·18	— ·37	— ·18
11	10·69	7·60	4·92	7·02	— ·05	— ·13	— ·32	— ·46	— ·24
Mittag	10·49	7·36	4·75	7·11	— ·25	— ·37	— ·49	— ·37	— ·37
1	10·56	7·30	4·62	6·96	— ·18	— ·43	— ·62	— ·52	— ·44
2	10 36	7·18	4·62	7·26	— ·38	— ·55	— ·62	— ·22	— ·44
3	10·69	7·33	4·73	7·26	— ·05	— ·40	— ·51	— ·22	— ·29
4	10·59	7·27	4·75	7·44	— ·15	— ·46	— ·49	— ·04	— ·28
5	10·13	7·21	4·62	7·08	— ·61	— ·52	— ·62	— ·40	— ·54
6	10·23	7·18	4·73	7·14	— ·51	— ·55	— ·51	— ·34	— ·48
7	10·16	7·15	4·86	7·20	— ·58	— ·58	— ·38	— ·28	— ·45
8	10·82	7·57	5·17	7·53	·08	— ·16	— ·07	·05	— ·02
9	10·79	8·02	5·39	7·65	·05	·29	·15	·17	·16
10	10·92	7·96	5·39	7·77	·18	·23	·15	·29	·21
11	10·98	8·12	5·52	7·95	·24	·39	·28	·47	·34
Mittel	10·74	7·73	5·24	7·48	·26	·36	·41	·31	·32

Anhang. Tabelle IX. Obir.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mittn.— 1ʰa.	7·97	6·91	6·79	7·00	— ·05	·32	1·01	·42	·42
1— 2	7·97	6·83	6·67	7·02	— ·05	·24	·89	·44	·38
2— 3	7·89	6·91	6·51	6·87	— ·13	·32	·73	·29	·30
3— 4	7·77	6·83	6·51	6·87	— ·25	·24	·73	·29	·25
4— 5	7·77	6·87	6·47	6·90	— ·25	·28	·69	·32	·26
5— 6	7·81	6·83	6·31	6·83	— ·21	.24	·53	·25	·20
6— 7	7·89	6·79	6·04	6·69	— ·13	·20	·26	·11	·11
7— 8	8·09	6·59	5·64	6·63	·07	— ·03	— ·14	·05	— ·01
8— 9	8·05	6·43	5·37	6·59	·03	— ·16	— ·41	·01	— ·13
9—10	8·01	6·35	5·01	6·47	— ·01	— ·24	— ·77	— ·11	— ·28
10—11	7·97	6·24	4·84	6·24	— ·05	— ·35	— ·94	— ·34	— 42
11—Mittag	7·85	6·12	4·66	6·16	— 17	— 47	—1·12	— ·42	— ·54
12— 1	7·69	5·96	4·66	5·94	— ·33	— ·63	—1·12	— ·64	— ·68
1— 2	7·65	6·00	4·58	5·82	— ·37	— ·59	—1·20	— ·76	— ·73
2— 3	7·77	6·00	4·66	5·94	— ·25	— ·59	—1·12	— ·66	— ·65
3— 4	7·85	6·08	4·78	5·92	— ·17	— ·51	—1·00	— ·64	— ·58
4— 5	8·21	6·00	4·90	6·12	·19	— ·59	— ·88	— ·46	— ·43
5— 6	8·32	6·31	5·33	6·49	·30	— ·28	— ·45	— ·09	— ·13
6— 7	8·44	6·75	5·68	6·74	·42	·16	— ·10	·16	·16
7— 8	8·56	6·94	6·27	6·95	·54	·35	·49	·37	·44
8— 9	8·40	7·10	6·75	6·98	·38	·51	·97	·40	·56
9—10	8·28	7·26	6·71	6·94	·26	·67	·93	·36	·55
10—11	8·17	6·98	6·83	6·90	·15	·39	1·05	·32	·48
11—12	8·05	7·06	6·79	7·04	·03	·47	1·01	·46	·49
Mittel	8·02	6·59	5·78	6·58	·20	·37	·77	·35	·38

Anhang. Tabelle X. Säntis.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mittn. — 1ha.	8·63	6·99	8·38	7·87	— ·06	·22	·72	·28	290
1— 2	8·60	6·82	8·32	7·87	— ·09	·05	·66	·28	·225
2— 3	8·46	6·63	8·23	7·73	— ·23	— ·14	·57	·14	·085
3— 4	8·62	6·70	8·37	7·82	— ·07	— ·07	·71	·23	·200
4— 5	8·45	6·64	8·11	7·56	— ·24	— ·13	·45	— ·03	·012
5— 6	8·46	6·67	7·86	7·62	— ·23	— ·10	·20	·03	— ·025
6— 7	8·43	6·57	7·59	7·64	— ·26	— ·20	— ·07	·05	— ·120
7— 8	8·72	6·82	7·35	7·71	·03	·05	— ·31	·12	— ·027
8— 9	8·67	6·57	7·05	7·46	— ·02	— ·20	— ·61	— ·13	— ·240
9—10	8·65	6·49	6·88	7·43	— ·04	— ·28	— ·78	— ·16	— ·315
10—11	8·75	6·45	6·64	7·25	·06	— ·32	—1·02	— ·34	— ·405
11—Mittag	8·72	6·51	6·64	7·27	·03	— ·26	—1·02	— ·32	— ·392
12— 1	8·72	6·57	6·92	7·17	·03	— ·20	— ·74	— ·42	— ·332
1— 2	8·66	6·54	7·02	7·12	— ·03	— ·23	— ·64	— ·47	— ·342
2— 3	8·63	6·47	7·05	7·10	— ·06	— ·30	— ·61	— ·49	— ·365
3— 4	8·97	6·73	7·31	7·30	·28	— ·04	— ·35	— ·29	— ·100
4— 5	9·14	6·71	7·51	7·53	·45	— ·06	— ·15	— ·06	·045
5— 6	8·90	6·96	7·71	7·61	·21	·19	·05	·02	·117
6— 7	8·96	7·09	7·99	7·73	·27	·32	·33	·14	·265
7— 8	8·79	7·07	8·06	7·82	·10	·30	·40	·23	·257
8— 9	8·73	7·10	8·07	7·81	·04	·33	·41	·22	·250
9—10	8·67	7·25	8·29	7·97	— ·02	·48	·63	·38	·367
10—11	8·67	7·15	8·26	7·93	— ·02	·38	·60	·34	·325
11—12	8.64	7·05	8·18	7·80	— ·05	·28	·52	·21	·240
Mittel	8·69	6·77	7·66	7·59	— ·12	·21	.52	·22	·222

Anhang. Tabelle XI. Sonnblick.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mittn.— 1h a.	10·81	9·52	8·71	9·21	·41	·22	·23	— ·07	·20
1— 2	10·69	9·22	8·37	9·06	·29	— ·08	— ·11	— ·22	— ·02
2— 3	10·76	9·18	8·55	9·20	·36	— ·12	·07	— ·08	·06
3— 4	10·45	8·99	8·53	9·10	·05	— ·31	·05	— ·18	— ·10
4— 5	10·45	8·82	8·53	9·15	·05	— ·48	·25	— ·13	— ·13
5— 6	10·51	8·71	8·28	9·17	·11	— ·59	— ·20	— ·11	— ·20
6— 7	10·37	8·62	8·03	9·17	— ·03	— ·68	— ·45	— ·11	— ·32
7— 8	10·13	8·66	7·73	9·09	— ·27	— ·64	— ·75	— ·19	— ·46
8— 9	10·05	8·76	7·70	9·09	— ·35	— ·54	— ·78	— ·19	— ·47
9—10	10·12	8·81	7·83	9·17	— ·28	— ·49	— ·65	— ·11	— ·38
10 - 11	9·90	8·98	7·81	9·08	— ·50	— ·32	— ·67	— ·20	— ·42
11—Mittag	10·04	9·17	7·96	9·15	— ·36	— ·13	— ·52	— ·13	— ·28
12— 1	10·47	9·49	8·15	9·29	·07	·19	— ·33	·01	— ·01
1— 2	10·32	9·45	8·33	9·43	— ·08	·15	— ·15	·15	·02
2— 3	10·52	9·62	8·59	9·50	·12	·32	·11	·22	·19
3— 4	10·54	9·55	8·68	9·43	·14	·25	·20	·15	·18
4— 5	10·40	9·40	8·58	9·33	·00	·10	·10	·05	·06
5— 6	10·54	9·59	8·82	9·62	·14	·29	·34	·34	·28
6— 7	10·32	9·57	9·02	9·47	— ·08	·27	·54	·19	·23
7— 8	10·52	9·97	9·07	9·70	·12	·67	·59	·42	·45
8— 9	10·32	9·88	8·99	9·44	— ·08	·58	·51	·16	·29
9—10	10·36	9·85	9·06	9·40	— ·04	·55	·58	·12	·30
10—11	10·44	9·83	9·15	9·33	·04	·53	·67	·05	·32
11—12	10·54	9·56	9·07	9·15	·14	·26	·59	— ·13	·21
Mittel	10·40	9·30	8·48	9·28	·17	·36	·38	·15	·23

Anhang. Tabelle XII. Pike's Peak.

	Meter pro Secunde				Abweichung vom Mittel				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht—1	11·90	11·37	7·47	10·23	·64	1·34	·94	1·04	·99
1— 2	11·77	11·37	7·57	10·23	·51	1·34	1·04	1·04	·98
2— 3	11·80	11·53	7·80	10·23	·54	1·50	1·27	1·04	1·09
3— 4	11·93	11·53	7·90	10·20	·67	1·50	1·37	1·01	1·14
4— 5	11·83	11·33	7·83	10·07	·57	1·30	1·30	·88	1·01
5— 6	11·67	11·03	7·67	9·90	·41	1·00	1·14	·71	·81
6— 7	11·70	10·67	7·27	9·77	·44	·64	·74	·58	·60
7— 8	11·27	10·13	6·60	9·30	·01	·10	·07	·11	·07
8— 9	11·00	9·67	6·07	8·73	— ·26	— ·36	— ·46	— ·46	— ·38
9—10	10·80	9·13	5·60	8·30	— ·46	— ·90	— ·93	— ·89	— ·79
10—11	10·63	8·57	5·20	7·90	— ·63	—1·46	—1·33	—1·29	—1·18
11—Mittag	10·43	8·27	5·03	7·60	— ·83	—1·76	—1·50	—1·59	—1·42
12— 1	10·63	8·43	5·17	7·80	— ·63	—1·60	—1·36	—1·39	—1·24
1— 2	10·73	8·63	5·43	7·93	— ·53	—1·40	—1·10	—1·26	—1·07
2— 3	10·80	8·83	5·77	8·13	— ·46	—1·20	— ·76	—1·06	— ·87
3— 4	10·90	9·10	6·03	8·40	— ·36	— ·93	— ·50	— ·79	— ·64
4— 5	11·00	9·17	6·10	8·63	— ·26	— ·86	— ·43	— ·56	— ·53
5— 6	11·07	9·37	6·10	8·97	— ·19	— ·66	— ·43	— ·22	— ·37
6— 7	11·37	9·83	6·20	9·37	·11	— ·20	— ·33	·18	— ·06
7— 8	11·30	10·03	6·40	9·50	·04	·00	— ·13	·31	·05
8— 9	11·33	10·43	6·60	9·63	·07	·40	·07	·44	·24
9—10	11·43	10·67	6·80	9·83	·17	·64	·27	·64	·43
10—11	11·54	10·73	7·00	9·90	·28	·70	·47	·71	·54
11—12	11·53	10·93	7·20	10·10	·27	·90	·67	·91	·69
Mittel	11·26	10·03	6·53	9·19	·39	·95	·77	·80	·72

Über die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes

von

Max Jüllig,

dipl. Ingenieur, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, Oberingenieur der k. k. österr. Staatsbahnen.

(Mit 4 Tafeln und 9 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1894.)

Ferraris hat gezeigt,[1] dass man durch zwei Wechselströme von constanter Phasendifferenz, welche die Stromleiter *mn* und *op* durchfliessen (Fig. 1), eine hohle Kupfermasse *K*, die an einem dünnen Faden hängt, in rotirende Bewegung versetzen kann. Die Intensitäten der beiden Wechselströme sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$J_1 = J_0 \sin \frac{2\pi t}{T}, \qquad J_2 = J_0' \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

wobei

$$0 < \varphi < \pi$$

Ein ähnliches Phänomen hat Tesla durch vier Magnetpole *a*, *b*, *c*, *d* (Fig. 2) von variabler Intensität hervorgerufen und zur Construction eines für technische Zwecke dienlichen Motors verwendet.[2] Zur Erregung der Magnetpole *a*, *b*, *c*, *d* dienten die Wechselströme J_1 und J_2 (Fig. 2), deren Intensitäten sehr nahe den Werthen

---

[1] Rotazioni elettrodinamiche prodotto per mezzo di correnti alternate. Nota del prof. Galileo Ferraris. Atti della R. Accademia delle science di Torino, 1887—1888, p. 360.

[2] Berliner elektrotechn. Zeitschr., Bd. 9, S. 343. D. R. Patent Nr. 47885, von 1. Mai 1888 ab giltig.

$$J_1 = J_0 \cos \frac{2\pi t}{T},$$

$$J_2 = J_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$$

entsprachen.

Die Kupfermasse[1] K (Fig. 2) rotirt um eine zur Zeichnungsfläche senkrechte Axe.

Sowohl beim Apparate von Ferraris, als bei jenem von Tesla entstehen magnetische Felder, deren Kraftlinien ihre Gestalt periodisch ändern und in unmittelbarer Nähe der Drehungsaxe der Kupfermasse K ein nahezu homogenes magnetisches Feld bilden, das um die Axe qr (Fig. 1), beziehungsweise um eine durch den Punkt K (Fig. 2) senkrecht zur Zeichnungsfläche gelegten Axe rotirt.

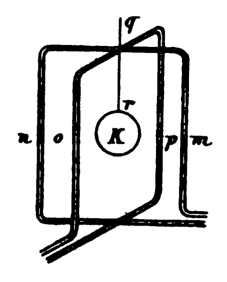


Fig. 1.

Die Einwirkung der rotirenden Kraftlinien auf die bewegliche Kupfermasse ist gleichartig mit jener eines um dic Axe yy' (Fig. 3) rotirenden Magnetes[2] und die Erklärung der auftretenden Rotationserscheinungen ist identisch mit jener, welche für die Phänomene des Arago'schen Rotationsmagnetismus gegeben wurde.

In der Literatur über magnetische Drehfelder existiren keine präcisen Darstellungen der beim Ferraris'schen oder Tesla'schen Phänomen in Betracht kommenden Kraftlinien. Es würde auch kaum möglich sein, unter Berücksichtigung aller Einflüsse durch Rechnung die Gestalt der Kraftlinien zu ermitteln.

Macht man jedoch gewisse vereinfachende Annahmen, so ergeben sich übersichtliche Resultate, welche eine Beurtheilung der Beschaffenheit des Drehfeldes in allen seinen Theilen gestatten. Nehmen wir zunächst an, dass die beiden Strom-

---

[1] Beziehungsweise ein mit Kupferdraht umgebener Eisenkern.

[2] In Fig. 3 bedeutet $abcd$ eine gläserne Schutzhülle, um Luftströme abzuhalten.

schleifen *mn* und *op* (Fig. 1) aus unendlich dünnen Drähten bestehen, die in zwei aufeinander senkrechten Ebenen liegen. Die Gestalt der beiden Leiter wird durch Fig. 4 versinnlicht.

Die geradlinigen Leiter 1 I, 2 II, 3 III, 4 IV sind zur Axe *AB* parallel und unendlich lang; die kürzesten Abstände

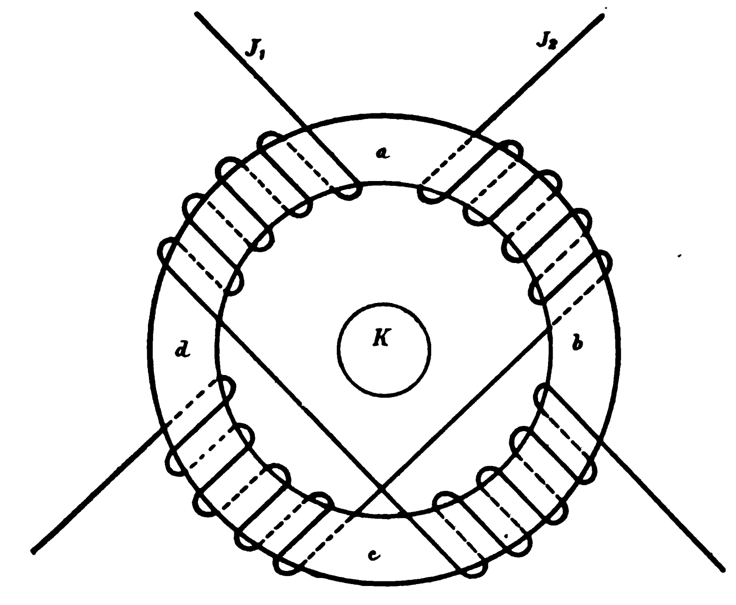


Fig. 2.

des Punktes O von den genannten vier unendlich langen Leitern $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ seien einander gleich.

In den Schleifen 1 I II 2 und 3 III IV 4 circuliren die Ströme

$$J_1 = J_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

und

$$J_2 = J_0 \sin \frac{2\pi t}{T} \qquad 1)$$

Zunächst soll das magnetische Potential V_2 des in Fig. 4 dargestellten Leiters 3 III IV 4 für einen beliebigen Punkt G bestimmt werden. Es ist bekanntlich $V_2 = J_2 w$, wobei w einen körperlichen Winkel bezeichnet, der von allen geradlinigen Leit-

strahlen, die man vom Leiter III.3.4.IV zum Punkte G ziehen kann, umschlossen wird.[1]

Dieser körperliche Winkel wird durch den Inhalt einer Fläche f gemessen, welche ein vom Punkte G ausgehender Fahrstrahl, während er über die Schleife III.3.4.IV gleitet, aus einer Kugeloberfläche herausschneidet, deren Mittelpunkt mit dem Punkte G zusammenfällt und deren Radius gleich 1 gewählt wird. Die Fläche f wird positiv gerechnet, wenn der Strom, von G aus gesehen, entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung verläuft.

Fig. 3.

Im vorliegenden Falle ist die Fläche f ein sphärisches Zweieck (Fig. 4), da die Leitstrahlen $G3$, $G4$ und GIII, GIV mit dem Kugeldurchmesser $dc \parallel AB$ zusammenfallen, wenn wir die Schleife III.3.4.IV unendlich lang machen.

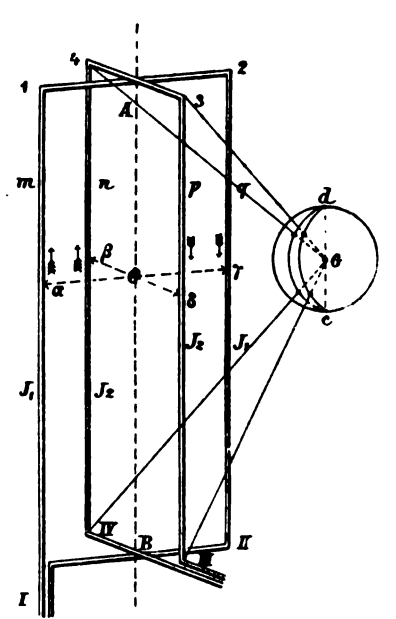


Fig. 4.

Bezeichnen wir mit φ den Neigungswinkel der Ebenen 3IIIG und 4IVG, so ist $f = 2\varphi$ und somit

$$V_2 = 2J_2\varphi.$$

Bezeichnen wir ferner mit ψ den Neigungswinkel der Ebenen 2IIG und 1IG, so ist das durch die Stromschleife I1 2II im Punkte G hervorgerufene elektromagnetische Potential

$$V_1 = 2J_1\psi.$$

Fig. 5 zeigt eine orthogonale Projection des in Fig. 4 dargestellten Stromsystems, wobei die Zeichnungsfläche mit der Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ identisch ist und OA zur

[1] Vergl. v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig, Vieweg, 1891, 2. Aufl., S. 376, §. 186.

Zeichnungsfläche senkrecht steht. Das Zeichen + in Fig. 5 bedeutet, dass der Strom von der Zeichnungsfläche zum Be-

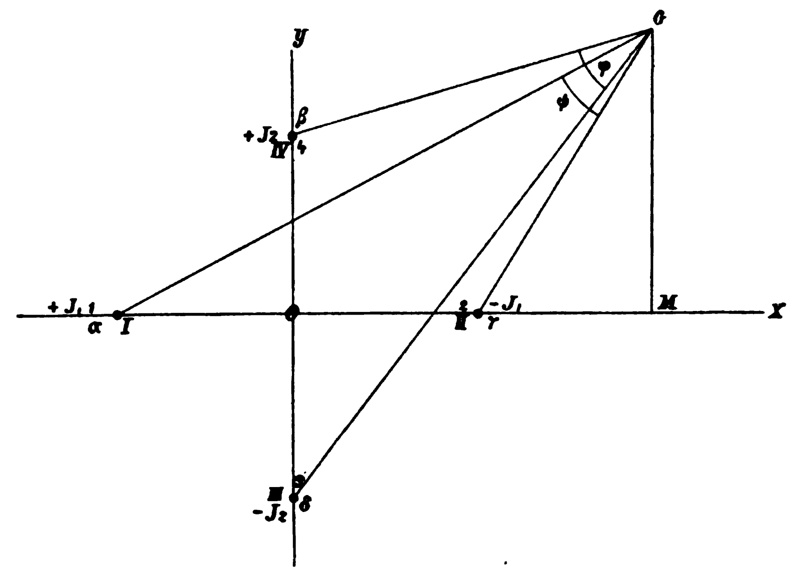


Fig. 5.

schauer fliesse, das Zeichen — die entgegengesetzte Stromrichtung.

Wir betrachten die Geraden $O\gamma$, $O\beta$, OA (Fig. 4 und 5) als x-, y- und z-Axen eines rechtwinkeligen Coordinatensystems.

Die Gleichung der Niveauflächen lautet:

$$V_1 + V_2 = C,$$

wobei C eine willkürliche reelle Grösse ist. Um die Gleichung der Niveauflächen in rechtwinkeligen Coordinaten darzustellen, setzen wir $OM = x$, $MG = y$, $O\alpha = O\beta = O\gamma = O\delta = g$ und es ergibt sich

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2gx}{x^2 + y^2 - g^2}; \qquad \psi = \operatorname{arctg} \frac{2gy}{x^2 + y^2 - g^2}.$$

Bezeichnen wir das Potential im Punkte G mit V, so ist

$$V = V_1 + V_2 = 2(\varphi J_2 + \psi J_1)$$

und mit Berücksichtigung der Werthe von φ und ψ

$$\frac{V}{2} = J_2 \operatorname{arctg} \frac{2gx}{x^2+y^2-g^2} + J_1 \operatorname{arctg} \frac{2gy}{x^2+y^2-g^2}. \qquad 1a)$$

Es ist dies die Gleichung der Niveauflächen. Da in derselben die Variable z nicht erscheint, sind die Niveauflächen, wie vorauszusehen war, Cylinderflächen. Schneidet man dieselben durch eine zur Z-Axe senkrechte Ebene, so erhält man als Schnittlinien eine Schaar von Niveaulinien, deren Gleichung mit Gleichung 1a) identisch ist.

Die Kraftlinien bilden eine Schaar von Curven, welche die Niveauflächen normal schneiden. Da die ersteren Cylinderflächen bilden, deren Erzeugende sämmtlich zu einander parallel sind, so sind die Kraftlinien ebene Curven, welche in jeder beliebigen, zur xy-Ebene parallelen Ebene dargestellt werden können.

Bestimmt man aus Gleichung 1 a) den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = Q,$$

so ist die Differentialgleichung der Kraftlinien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{Q}.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1a) erhält man

$$Q = \frac{(s^4+4g^2y^2)J_2(y^2-x^2-g^2)-(s^4+4g^2x^2)J_1\, 2xy}{(s^4+4g^2y^2)J_2\, 2xy-(s^4+4g^2x^2)J_1(x^2-y^2-g^2)},$$

wobei zur Abkürzung

$$x^2+y^2-g^2 = s^2$$

gesetzt wurde. Die Differentialgleichung der Kraftlinien lautet somit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(s^4+4g^2y^2)J_2\,.\,2xy-(s^4+4g^2x^2)J_1(x^2-y^2-g^2)}{(s^4+4g^2y^2)J_2(y^2-x^2-g^2)-(s^4+4g^2x^2)J_1\,.\,2xy} \qquad 2)$$

Dieser Differentialgleichung genügt die endliche Gleichung

$$J_1 \log \text{nat} \frac{(x+g)^2+y^2}{(x-g)^2+y^2} - J_2 \log \text{nat} \frac{(y+g)^2+x^2}{(y-g)^2+x^2} = C, \qquad 3)$$

wobei unter C eine willkürliche Constante zu verstehen ist.

Sind J_1, J_2 und C gegeben, so lässt sich für jede Abscisse x die zugehörige Ordinate y berechnen.

Die Gleichung 3) wurde jedoch nicht durch Integration der Differentialgleichung 2), sondern auf einem Umwege gefunden, der nun beschrieben werden soll und auch zu einer einfachen Construction der durch Gleichung 3) dargestellten Curven geführt hat.

Setzt man in Gleichung 2)

$$J_2 = 0,$$

so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+g^2-x^2}{2xy}.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich leicht integriren und führt zur endlichen Gleichung

$$\frac{(x+g)^2+y^2}{(x-g)^2+y^2} = C, \qquad 4)$$

wobei C eine willkürliche Constante ist.

Durch eine einfache Transformation erhält man aus Gleichung 4) die Gleichung

$$y^2+(\gamma-x)^2 = r^2, \qquad 5)$$

wobei

$$\gamma = g\frac{C+1}{C-1}; \qquad r = \frac{2g\sqrt{C}}{C-1} \qquad 6)$$

Gleichung 5) ist die Gleichung eines Kreises vom Radius r, dessen Mittelpunkt auf der Abscissenaxe liegt und um die Länge γ vom Ursprung des Coordinatensystems entfernt ist.

Zu dem gleichen Resultate kann man auf synthetischem Wege gelangen.

Lassen wir in Fig. 5 J_2 verschwinden, so erhalten wir nachstehende Figur 6.

Das magnetische Potential im Punkte M ist $2\psi J_1 = V_1$. Für jede Niveaufläche (beziehungsweise Niveaulinie) ist V_1 constant, somit auch ψ constant. Hieraus folgt mit Rücksicht auf einen bekannten Lehrsatz der ebenen Geometrie, dass der Kreisbogen I M II eine Niveaulinie ist.

Die Niveaulinien der Stromschleife J_1 bilden eine Schaar von Kreisbögen, die sich in den Punkten I und II schneiden, und die Niveauflächen sind Kreiscylinderflächen, deren Erzeugende

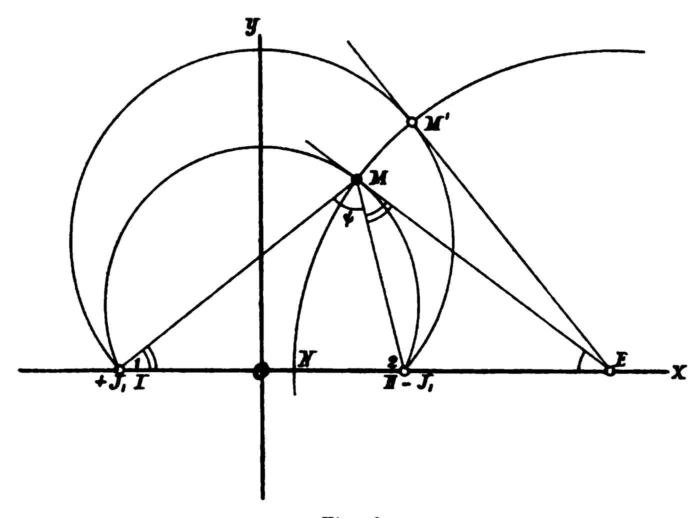


Fig. 6.

zu den Geraden I 1 und II 2 parallel sind und deren Mantelflächen sich in den Geraden I 1 und II 2 schneiden.

Behufs Ermittlung der Gestalt der Kraftlinien ziehen wir durch M (Fig. 6) eine Tangente ME und bezeichnen die Entfernung OE mit Γ.

Es soll zunächst die Länge ME berechnet werden. Bekanntlich ist

$$\sphericalangle E\,\mathrm{I}\,M = \sphericalangle EM\,\mathrm{II}.$$

Da ferner die Dreiecke MEII und MEI den Winkel bei E gemein haben, sind dieselben ähnlich und es besteht die Proportion

$$\overline{\mathrm{I}E} : \overline{ME} = \overline{ME} : \overline{\mathrm{II}E}$$

oder

$$\overline{ME}^2 = \overline{\mathrm{I}E} . \overline{\mathrm{II}E}.$$

Setzen wir $ME = R$ und berücksichtigen, dass $\overline{OE} = \Gamma$, $\overline{O\text{I}} = \overline{O\text{II}} = g$, so ergibt sich

$$R^2 = (\Gamma + g)(\Gamma - g) = \Gamma^2 - g^2.$$

Ziehen wir vom Punkte E aus an eine beliebige andere Niveaulinie IM'II eine Tangente EM', so erhalten wir für die Länge $M'E$ immer denselben Werth $\sqrt{\Gamma^2 - g^2} = R$, und liegen die Punkte MM'... in der Peripherie eines Kreises, der sämmtliche Niveaulinien normal schneidet und somit als eine Kraftlinie angesehen werden muss. In Fig. 7 ist ein System von Kraft- und Niveaulinien dargestellt. Die Niveaulinien entsprechen gleichen Potentialdifferenzen und die Kraftlinien sind derart angeordnet, dass die Intensität des magnetischen Feldes durch die Anzahl der Kraftlinien bestimmt wird, welche eine auf beliebiger Niveaufläche befindliche Flächeneinheit durchdringen. Sämmtliche Kraftlinien liegen in parallelen Ebenen, deren Entfernung gleich 1 *cm* gewählt wurde. Legt man durch je zwei benachbarte Kraftlinien zwei zur Zeichnungsfläche senkrechte Kreiscylinder, so wird durch diese aus einer 1 *cm* hohen, zur Zeichnungsfläche parallelen Schicht eine Kraftröhre (Sphondyloid) herausgeschnitten. Jede Einheits-Kraftröhre[1] ist derart beschaffen, dass sie in einem bewegten linearen Stromleiter, welcher dieselbe in einer Secunde durchschneidet, elektromotorische Kräfte wachruft, deren Mittelwerth der absoluten elektromagnetischen Einheit der elektromotorischen Kraft gleich ist, wobei jedoch die Rückwirkung eines im besagten Leiter eventuell entstehenden Stromes auf die Gestalt der Kraftlinien unberücksichtigt bleibt. Für jedes magnetische Feld lassen sich unzählig viele verschiedene Anordnungen der Sphondyloiden finden, welche obiger Bedingung entsprechen. Es muss desshalb die Gestalt des Querschnittes der Sphondyloiden noch durch willkürliche Nebenbedingungen näher bestimmt werden. Im vorliegenden Falle wird angenommen, dass die Schnitte der Einheits-Kraftröhren mit der Ebene 1I II2 Rechtecke bilden, deren Höhe = 1 *cm* und deren sonstige Anordnung aus Fig. 8 zu entnehmen ist.

---

[1] Vergl. Maxwell, Lehrb. der Elektricität und des Magnetismus, II. Bd.

Diese Figur zeigt in etwas vergrössertem Massstabe einen Schnitt des in Fig. 7 dargestellten magnetischen Feldes durch

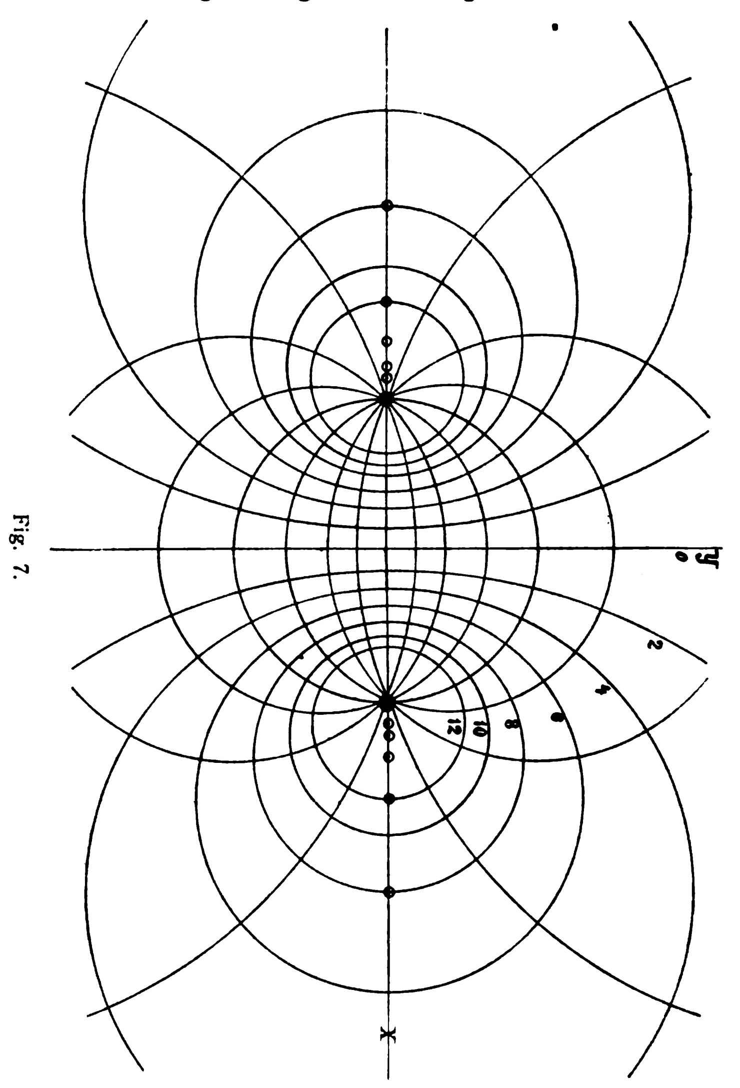


Fig. 7.

eine Ebene, welche die x- und z-Axe in sich enthält und somit zur Zeichnungsfläche der Figur 7 senkrecht steht.

Bestimmen wir zunächst die magnetische Intensität, welche durch die Stromschleife 1 I II 2 in verschiedenen Punkten der Ebene 1 I II 2 erzeugt wird.

Es sei n (Fig. 8) eine nordmagnetische Masse $= 1$, $On = x$, so wirkt der Strom 2II auf n mit der Kraft $P_2 = 2J_1 : (g-x)$, der Strom 1I mit der Kraft $P_1 = 2J_1 : (g+x)$. Somit ist die magnetische Intensität für jeden Punkt, der in der Ebene 1II2 liegt und von OZ um x absteht

$$H = 2J_1 \left(\frac{1}{g-x} + \frac{1}{g+x} \right) \qquad 7)$$

Bewegt sich ein Stromleiter OO' von 1 *cm* Länge von OO' parallel zu sich selbst in der Ebene 1II2 nach $a_1 a'$, $a_2 a_2' \ldots$ u. s. w., so wird in jedem Zeitelement dt, in welchem der Strom-

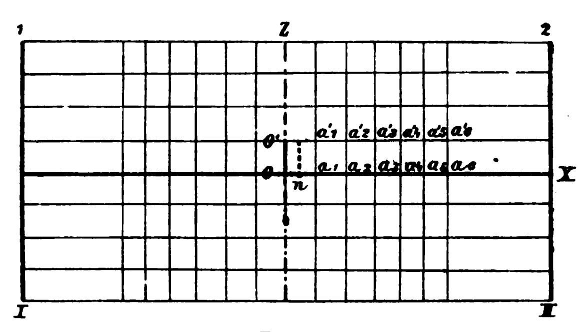


Fig. 8.

leiter das Wegelement dx zurücklegt, die im beweglichen Leiter OO' inducirte elektromotorische Kraft

$$e = H. \frac{dx}{dt},$$

somit

$$edt = Hdx.$$

Der Mittelwerth von e im Verlaufe der Zeit t ist

$$e_m = \frac{1}{t} \int_0^t edt = \frac{1}{t} \int_0^x Hdx \qquad 8)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass O' nach t Secunden den Weg x zurückgelegt hat.

Es sollen nun die Strecken

$$oa_1 = x_1,\ oa_2 = x_2,\ oa_3 = x_3 \ldots oa_n = x_n$$

so gewählt werden, dass für $t = 1$ Secunde, die Mittelwerthe

$$e'_m = \int_0^{x_1} H dx = 1, \quad e''_m = \int_0^{x_2} H dx = 2, \quad e'''_m = \int_0^{x_3} H dx = 3,$$

und allgemein

$$e_m^{(n)} = \int_0^{x_n} H dx = n \tag{9}$$

sind.

Setzt man in Gleichung 8) für H den Werth aus Gleichung 7) und $e_m^{(n)}$ statt e_m, x_n anstatt x, $t = 1$, so ergibt sich

$$e_m^{(n)} = 2 J_1 \int_0^{x_n} \left(\frac{dx}{g-x} + \frac{dx}{g+x} \right) = n \tag{10}$$

und nach Durchführung der Integration

$$e_m^{(n)} = n = 2 J_1 \log \text{nat} \frac{g + x_n}{g - x_n},$$

somit

$$x_n = g \frac{e^{\frac{n}{2J_1}} - 1}{e^{\frac{n}{2J_1}} + 1}$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$e^{\frac{n}{2J_1}} = \varkappa_n$$

setzen,

$$x_n = g \frac{\varkappa_n - 1}{\varkappa_n + 1}. \tag{11}$$

Für jedes Rechteck $oo'a'_1a_1$, $a_1a'_1a'_2a_2$, $a_2a'_2a'_3a_3$ u. s. w. ist das Doppelintegral

$$\int_{x=x_n}^{x=x_{n+1}} \int_{z=0}^{z=1} H dx dz = 1.$$

Die Gleichung einer Kraftlinie, welche die Abscissenaxe in der Entfernung $ON = x_n$ (Fig. 6) schneidet, hat die Form

$$y^2 + (\gamma_n - x)^2 = r_n^2.$$

Setzen wir $y = O$, so erhalten wir allgemein

$$x = \gamma_n \pm r_n.$$

Von den beiden Werthen $x = \gamma_n + r_n$ und $x = \gamma_n - r_n$ entspricht der kleinere dem Werthe x_n der Gleichung 11) und ist somit

$$x_n = \gamma_n - r_n = g\frac{\varkappa_n - 1}{\varkappa_n + 1}. \qquad 12)$$

Da ferner (wie aus der Erläuterung zu Fig. 6 zu entnehmen ist)

$$\gamma_n^2 - g^2 = r_n^2, \qquad 13)$$

erhalten wir aus den Gleichungen 12) und 13)

$$\left.\begin{aligned} \gamma_n &= g\frac{\varkappa_n^2 + 1}{\varkappa_n^2 - 1} \\ r_n &= g\frac{2\varkappa_n}{\varkappa_n^2 - 1} \end{aligned}\right\} \qquad 14)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung 6) die physikalische Bedeutung der Constante C der Gleichung 4)

$$C = \varkappa_n^2 = e^{\frac{n}{J_1}},$$

wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$

Setzen wir $J = 4$ in absolutem elektromagnetischem Maasse gemessenen Stromeinheiten $= 40$ Ampère, so wird

$$\varkappa_n = e^{\frac{n}{8}} = 1 \cdot 133148^n.$$

In der Tabelle A sind die Werthe für

$$\frac{x_n}{g} = \frac{\varkappa_n - 1}{\varkappa_n + 1} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma_n}{g} = \frac{\varkappa_n^2 + 1}{\varkappa_n^2 - 1}$$

für $n = 1$ bis $n = 12$ zusammengestellt.

Tabelle *A*.

n	$\frac{x_n}{g} = \frac{\varkappa_n - 1}{\varkappa_n + 1}$	$\frac{\gamma_n}{g} = \frac{\varkappa_n^2 + 1}{\varkappa_n^2 - 1}$
1	0·062	8·045
2	0·124	4·083
3	0·185	2·790
4	0·245	2·164
5	0·303	1·803
6	0·358	1·574
7	0·412	1·421
8	0·462	1·313
9	0·510	1·236
10	0·555	1·179
11	0·596	1·137
12	0·635	1·105

Mit Hilfe dieser Tabelle wurden die in Fig. 7 dargestellten Kraftlinien construirt, und zwar für $n = 2, 4, 6, 8, 10$ und 12.

Als Controle für die Richtigkeit der Zeichnung dient die Thatsache, dass die Kraftlinie 12 den Mittelpunkt der Kraftlinie 6, die Kraftlinie 8 den Mittelpunkt der Kraftlinie 4 und allgemein die Kraftlinie n den Mittelpunkt der Kraftlinie $\frac{n}{2}$ in ihrer Peripherie enthält. Dies lässt sich aus den Gleichungen 14) leicht ersehen.

Jede Kraftlinie mit dem Index $2n$ schneidet die positive x-Axe in zwei Punkten, deren Abscissen gleich $\gamma_{2n} - r_{2n}$ und $\gamma_{2n} + r_{2n}$ sind.

Nun ist aus den Gleichungen 14) zu entnehmen, dass

$$\gamma_{2n} + r_{2n} = g \frac{\varkappa_{2n} + 1}{\varkappa_{2n} - 1}$$

und da

$$\varkappa_n = e^{\frac{n}{2J_1}}, \quad \varkappa_{2n} = e^{\frac{2n}{2J_1}} = \varkappa_n^2,$$

so ergibt sich

$$\gamma_{2n} + r_{2n} = g\frac{\varkappa_n^2+1}{\varkappa_n^2-1} = \gamma_n.$$

Aus dieser Gleichung ist die oben angeführte geometrische Beziehung unmittelbar ersichtlich.

In Fig. 9, Taf. I sind alle der Tabelle A entsprechenden Kraftlinien gezeichnet. Fig. 10 zeigt die Kraftlinien eines magnetischen Feldes, das von den coëxistirenden Strömen

$$J_1 = 4\cos 15°, \qquad J_2 = 4\sin 15°$$

erzeugt wird. Die Figuren 9 bis 15 auf Tafel I bis IV entsprechen den Strömen

Fig. 9....	$J_1 = 4\cos\ 0°$	$J_2 = 4\sin\ 0°$
Fig. 10....	$J_1 = 4\cos 15$	$J_2 = 4\sin 15$
Fig. 11....	$J_1 = 4\cos 30$	$J_2 = 4\sin 30$
Fig. 12....	$J_1 = 4\cos 45$	$J_2 = 4\sin 45$
Fig. 13....	$J_1 = 4\cos 60$	$J_2 = 4\sin 60$
Fig. 14....	$J_1 = 4\cos 75$	$J_2 = 4\sin 75$
Fig. 15....	$J_1 = 4\cos 90$	$J_2 = 4\sin 90.$

Fig. 15 ist mit Fig. 9 congruent und aus dieser durch Drehung um 90° entstanden. Die übrigen Figuren zeigen die Zwischenstadien. Zur Construction der Figur 10 dienten zwei Tabellen, welche gerade so wie Tabelle A berechnet wurden. Für die eine Tabelle ist

$$\varkappa_n = e^{\frac{n}{8\sin 15°}}, \quad \text{für die zweite} \quad \varkappa_n = e^{\frac{n}{8\cos 15°}}.$$

Die Mittelpunkte der kreisförmigen Kraftlinien für

$$\varkappa_n = e^{\frac{n}{8\cos 15°}}$$

liegen in der Geraden *ab* (Fig. 10), jene für

$$\varkappa_n = e^{\frac{n}{8\sin 15°}}$$

in der zu *ab* senkrechten Geraden *cd*. Die resultirenden Kraftlinien erhält man durch entsprechende Verbindung der Schnittpunkte der beiden Kraftliniensysteme.[1]

In ähnlicher Weise wurden die übrigen Figuren gezeichnet und sind die Figuren 13 und 14 die um 90° gedrehten Spiegelbilder der Figuren 11 und 10.

Die Figuren auf Taf. I bis IV zeigen die successiven Veränderungen der Kraftlinien eines elektromagnetischen Drehfeldes.

Aus der angegebenen Construction lässt sich auch die Gleichung der Kraftlinien ableiten.

Wir haben eine Schaar von Kreisen, deren Gleichung durch die Formel

$$y^2 + (\gamma_n - x)^2 = r_n^2 \tag{15}$$

gegeben ist, mit einer zweiten Schaar von Kreisen zum Schnitt zu bringen, deren Gleichung lautet:

$$x^2 + (\gamma_m - y)^2 = r_m^2, \tag{16}$$

wobei für ein und dieselbe Kraftlinie

$$n - m = \text{Const.} = C. \tag{17}$$

Es ist ferner

$$\gamma_n = g\frac{\varkappa_n^2 + 1}{\varkappa_n^2 - 1}, \tag{18}$$

$$r_n^2 = \gamma_n^2 - g^2, \tag{19}$$

$$\varkappa_n = e^{\frac{n}{2J_1}}, \tag{20}$$

$$\gamma_m = g\frac{\varkappa_m^2 + 1}{\varkappa_m^2 - 1}, \tag{21}$$

$$r_m^2 = \gamma_m^2 - g^2, \tag{22}$$

$$\varkappa_m = e^{\frac{m}{2J_2}}. \tag{23}$$

---

[1] Vergl. auch Maxwell, Lehrb. der Elektricität und des Magnetismus, I. Bd., S. 179.

Eliminirt man aus den neun Gleichungen 15) bis 23) die Grössen

$$\gamma_n, \quad r_n, \quad \varkappa_n, \quad n,$$
$$\gamma_m, \quad r_m, \quad \varkappa_m, \quad m,$$

so ergibt sich die allgemeine Gleichung der Kraftlinien.

Zunächst erhält man aus den Gleichungen 15), 19) und 16), 22):

$$y^2+(\gamma_n-x)^2 = \gamma_n^2-g^2$$
$$x^2+(\gamma_m-y)^2 = \gamma_m^2-g^2$$

Durch Auflösung nach γ_n und γ_m erhält man

$$\gamma_n = \frac{x^2+y^2+g^2}{2x} \qquad 24)$$

$$\gamma_m = \frac{x^2+y^2+g^2}{2y} \qquad 25)$$

Aus Gleichung 20) und 23) folgt

$$n = 2J_1 \log \operatorname{nat} \varkappa_n = J_1 \log \operatorname{nat} \varkappa_n^2,$$
$$m = 2J_2 \log \operatorname{nat} \varkappa_m = J_2 \log \operatorname{nat} \varkappa_m^2,$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung 17):

$$n-m = C = J_1 \log \operatorname{nat} \varkappa_n^2 - J_2 \log \operatorname{nat} \varkappa_m^2 \qquad 26)$$

Bestimmt man $\varkappa_n^2$ und $\varkappa_m^2$ aus den Gleichungen 18) und 21), so erhält man

$$\varkappa_n^2 = \frac{\gamma_n+g}{\gamma_n-g}, \qquad \varkappa_m^2 = \frac{\gamma_m+g}{\gamma_m-g}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen 24) und 25)

$$\varkappa_n^2 = \frac{(g+x)^2+y^2}{(g-x)^2+y^2}, \qquad \varkappa_m^2 = \frac{(g+y)^2+x^2}{(g-y)^2+x^2}. \qquad 27)$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung 26) ein, so ergibt sich als Schlussresultat

$$J_1 \log \operatorname{nat} \frac{(g+x)^2+y^2}{(g-x)^2+y^2} - J_2 \log \operatorname{nat} \frac{(g+y)^2+x^2}{(g-y)^2+x^2} = C.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung, welche mit Gleichung 3) identisch ist, erhält man die Differentialgleichung 2) und gelangt somit auf zwei verschiedenen Wegen zum gleichen Resultate.

Jedes der in Fig. 9 bis 15 dargestellten Kraftliniensysteme wird durch eine Kraftlinie, welche durch den Mittelpunkt der betreffenden Figur geht,[1] in zwei congruente Hälften getheilt, von denen die eine mit der anderen durch eine Drehung um 180° zur Deckung gebracht werden kann. Alle Kraftlinien mit Ausnahme der Mittelpunktskraftlinien sind geschlossene Curven. Dieselben sind in nächster Nähe der Leiter 1 I, 2 II, 3 III, 4 IV nahezu kreisförmig, nehmen dann eine unregelmässig eiförmige Gestalt an, aus der sie in die Lemniscatenform übergehen. Die weiteren Übergangsformen sind aus den Figuren zu entnehmen. Die Mittelpunktskraftlinien sind in Fig. 9, 12 und 15 gerade Linien, in Fig. 10, 11, 13, 14 und 16 transcendente Curven, deren Gleichung lautet:

$$J_1 \log \text{nat} \frac{(x+g)^2+y^2}{(x-g)^2+y^2} = J_2 \log \text{nat} \frac{(y+g)^2+x^2}{(y-g)^2+x^2}. \qquad 28)$$

Sucht man aus dieser Gleichung $\frac{dy}{dx}$, so ergibt sich Gleichung 2) und folgt aus der letzteren für $x = y = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{J_1}{J_2} = \frac{J_0 \cos \frac{2\pi t}{T}}{J_0 \sin \frac{2\pi t}{T}} = \text{ctg} \frac{2\pi t}{T}, \qquad 29)$$

das heisst: die durch die Gerade AB (Fig. 4) gehenden Kraftlinienelemente rotiren mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{T}$.[2]

Um auch über die Lage der unendlich fernen Punkte der Mittelpunktskraftlinien Aufschluss zu erhalten, führen wir

---

[1] Wir wollen dieselbe der Kürze halber mit dem Namen »Mittelpunktskraftlinie« bezeichnen.

[2] Vergl. Gleichung 1).

Polarcoordinaten ein und setzen

$$x = \rho \sin \varepsilon, \qquad y = \rho \cos \varepsilon.$$

Gleichung 28) nimmt dann folgende Form an:

$$J_1 \log \mathrm{nat} \frac{g^2+2g\rho \sin \varepsilon+\rho^2}{g^2-2g\rho \sin \varepsilon+\rho^2} = J_2 \log \mathrm{nat} \frac{g^2+2g\rho \cos \varepsilon+\rho^2}{g^2-2g\rho \cos \varepsilon+\rho^2}. \quad 30)$$

Dividirt man in beiden Brüchen Zähler und Nenner durch ρ^2 und sagt

$$\frac{g}{\rho} = \delta,$$

so ergibt sich

$$J_1 \log \mathrm{nat} \frac{\delta^2+2\delta \sin \varepsilon+1}{\delta^2-2\delta \sin \varepsilon+1} = J_2 \log \mathrm{nat} \frac{\delta^2+2\delta \cos \varepsilon+1}{\delta^2-2\delta \cos \varepsilon+1}. \quad 31)$$

Für sehr grosse Werthe von ρ sind die Binome $\delta^2+2\delta \sin \varepsilon$, $\delta^2-2\delta \sin \varepsilon$, $\delta^2+2\delta \cos \varepsilon$, $\delta^2-2\delta \cos \varepsilon$ sehr klein und jedenfalls kleiner als 1.

Man kann somit die Logarithmen in Reihen entwickeln und erhält, wenn noch Glieder der dritten Ordnung berücksichtigt werden

$$\left. \begin{aligned} J_1 \sin \varepsilon \left[1+\delta^2\left(\frac{4}{3}\sin^2 \varepsilon - 1\right)\right] = \\ = J_2 \cos \varepsilon \left[1+\delta^2\left(\frac{4}{3}\cos^2 \varepsilon - 1\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad 32)$$

Für $\rho = \infty$ wird $\delta = 0$ und

$$\mathrm{tg}\, \varepsilon_\infty = \frac{J_2}{J_1} = \mathrm{tg} \frac{2\pi t}{T}.^{[1]}$$

Es geht somit eine Tangente, welche die Mittelpunktskraftlinie im Ursprung des Coordinatensystems berührt, durch die beiden unendlich fernen Punkte dieser Curve.

Eine solche Tangente ist zugleich eine Asymptote. Dies lässt sich leicht mit Hilfe der Gleichung 2) nachweisen. Dividirt

---

[1] Vergl. Gleichung 29.

man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung durch x^6 und setzt der Kürze halber

$$1+\frac{y^2}{x^2}-\frac{g^2}{x_2}=\sigma^2,$$

so erhält man

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\sigma^4+4g^2\frac{y^2}{x^4}\right)J_2 . 2\frac{y}{x}-\left(\sigma^4+4g^2\frac{1}{x^2}\right)J_1\left(1-\frac{y^2}{x^2}-\frac{g^2}{x^2}\right)}{\left(\sigma^4+4g^2\frac{y^2}{x^4}\right)J_2\left(\frac{y^2}{x^2}-1-\frac{g^2}{x^2}\right)-\left(\sigma^4+4g^2\frac{1}{x^2}\right)J_1 . 2\frac{y}{x}} \qquad 33)$$

Bezeichnen wir mit X, Y die unendlich grossen Coordinaten eines Punktes der Curve, für welchen $\rho=\infty$, so ist das Verhältniss

$$Y:X=\operatorname{ctg}\varepsilon_\infty=\frac{J_1}{J_2} \qquad 34)$$

und wir erhalten zunächst, indem wir in Gleichung 33) für x und y X und Y setzen und die Beziehung 34) berücksichtigen, unter Hinweglassung der unendlich kleinen Brüche

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\infty=-\frac{2\sigma_\infty^4 J_2\frac{J_1}{J_2}-\sigma_\infty^4 J_1\left(1-\frac{J_1^2}{J_2^2}\right)}{\sigma_\infty^4 J_2\left(\frac{J_1^2}{J_2^2}-1\right)-\sigma_\infty^4 J_1 . 2\frac{J_1}{J_2}},$$

$$\sigma_\infty^2=1+\frac{J_1^2}{J_2^2}.$$

Durch entsprechende Reduction ergibt sich

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\infty=\frac{J_1}{J_2}. \qquad 35)$$

Da

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\left(\frac{dy}{dx}\right)_\infty=\operatorname{ctg}\varepsilon_\infty,$$

so ist[1] jeder zu einem unendlich fernen Punkt einer Mittelpunktskraftlinie gezogene Radiusvector eine Asymptote, welche die Mittelpunktskraftlinie überdies im Coordinatenursprung

---

[1] Vergl. Gleichung 29.

berührt. Unter den Kraftlinien der Fig. 12 findet sich auch eine ∞-förmige Curve und lässt sich eine solche auch in den durch Fig. 10, 11, 13, 14 und 16 dargestellten Systemen einschalten.

Für den Doppelpunkt dieser Curven nimmt der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ die Form $\frac{0}{0}$ an.

Somit ist nach Gleichung 2)

$$2J_2(s^4+4g^2y^2)xy = J_1(s^4+4g^2x^2)(x^2-y^2-g^2) \qquad 36)$$

$$J_2(s^4+4g^2y^2)(y^2-x^2-g^2) = 2J_1(s^4+4g^2x^2)xy, \qquad 37)$$

wobei

$$s^2 = x^2+y^2-g^2.$$

Die Coordinaten x_a, y_a des Doppelpunktes müssen überdies der Gleichung der Curve

$$J_1 \log\text{nat} \frac{(x+g)^2+y^2}{(x-g)^2+y^2} - J_2 \log\text{nat} \frac{(y+g)^2+x^2}{(y-g)^2+x^2} = C \qquad 38)$$

Genüge leisten.

Dividirt man Gleichung 36) durch Gleichung 37) und setzt x_a, y_a an Stelle von x und y, so ergibt sich

$$\frac{2x_a y_a}{y_a^2-x_a^2-g^2} = \frac{x_a^2-y_a^2-g^2}{2x_a y_a}$$

und nach weiterer Reduction

$$x_a^2+y_a^2 = g^2, \qquad 39)$$

das heisst: alle Doppelpunkte der schleifenförmigen Curven liegen in der Peripherie eines Kreises vom Radius g.

Bestimmt man x_a und y_a aus den Gleichungen 36) und 37) und substituirt deren Werthe in Gleichung 38), so erhält man für beliebige Werthe von J_1 und J_2 jenen Werth von C, für welchen die Gleichung 38) einer ∞-förmigen Curve angehört.

Da mit Rücksicht auf Gleichung 39) die Grösse

$$s^2 = x_a^2+y_a^2-g^2 = 0$$

ist, nehmen die Gleichungen 36) und 37) die einfache Form an:

$$2J_2 y_a^3 = J_1 x_a(x_a^2-y_a^2-g^2) = -2J_1 x_a y_a^2,$$

$$2J_1 x_a^3 = J_2 y_a(y_a^2-x_a^2-g^2) = -2J_2 y_a x_a^2$$

und ergibt sich mit Rücksicht auf Gleichung 1)

$$\frac{x_a}{y_a} = -\frac{J_2}{J_1} = -\mathrm{tg}\,\frac{2\pi t}{T}. \tag{40}$$

Hieraus folgt, dass die Bewegung des Doppelpunktes in einem Kreise vom Radius g mit constanter Geschwindigkeit erfolgt, jedoch entgegengesetzt dem Sinne der Drehung der Asymptote der Mittelpunktskraftlinie.

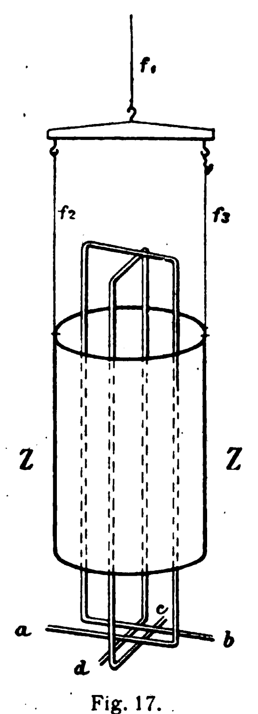


Fig. 17.

Zum Schlusse möge noch eines Experimentes erwähnt werden, das als eine Ergänzung der Ferraris'schen Versuche angesehen werden kann.

Lässt man durch die Windungen *ab* und *cd* (Fig. 17) Wechselströme hindurchgehen, deren Intensitäten näherungsweise durch die Ausdrücke

$$J_m = J \sin \frac{2\pi t}{T},$$

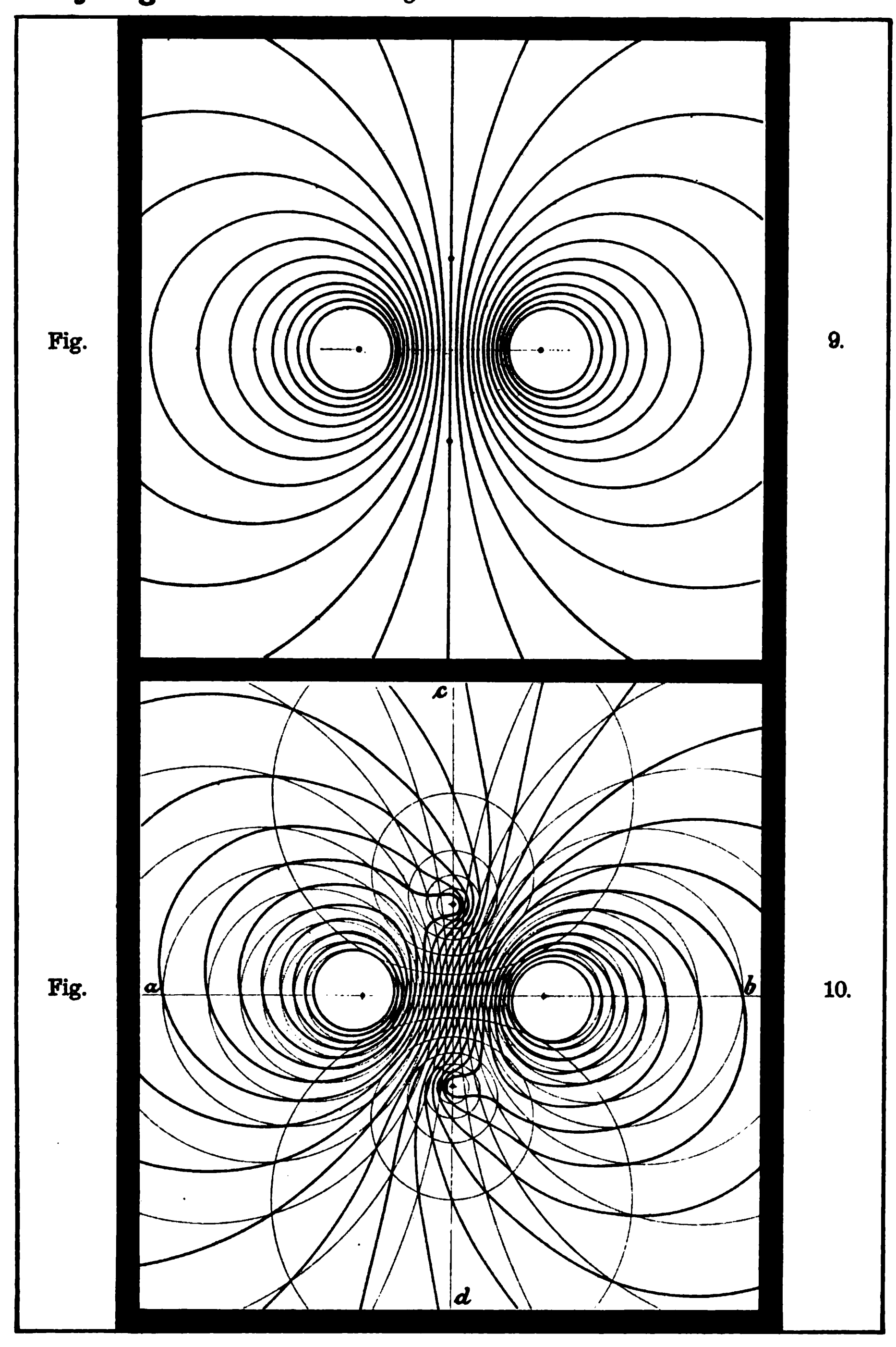
$$J_n = J \cos \frac{2\pi t}{T}$$

gegeben sind, so geräth ein an dünnen Seidenfäden f_1, f_2, f_3 aufgehängter kupferner Hohlcylinder sofort in Rotation.

Bei Anstellung des Experimentes wurden nicht einfache Drahtwindungen wie diese in der Figur dargestellt sind, sondern mit dünnem Kupferdraht bewickelte Rahmen mit je 480 Windungen benützt.

Die Erklärung des Phänomens ist durch die in den Figuren 9 bis 16 versinnlichte Bewegung der Kraftlinien unmittelbar gegeben.

M. Jüllig: Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes. Taf I.



Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CIII. Abth. IIa. 1894.

Photolithographie v. Max Jaffé, Wien.



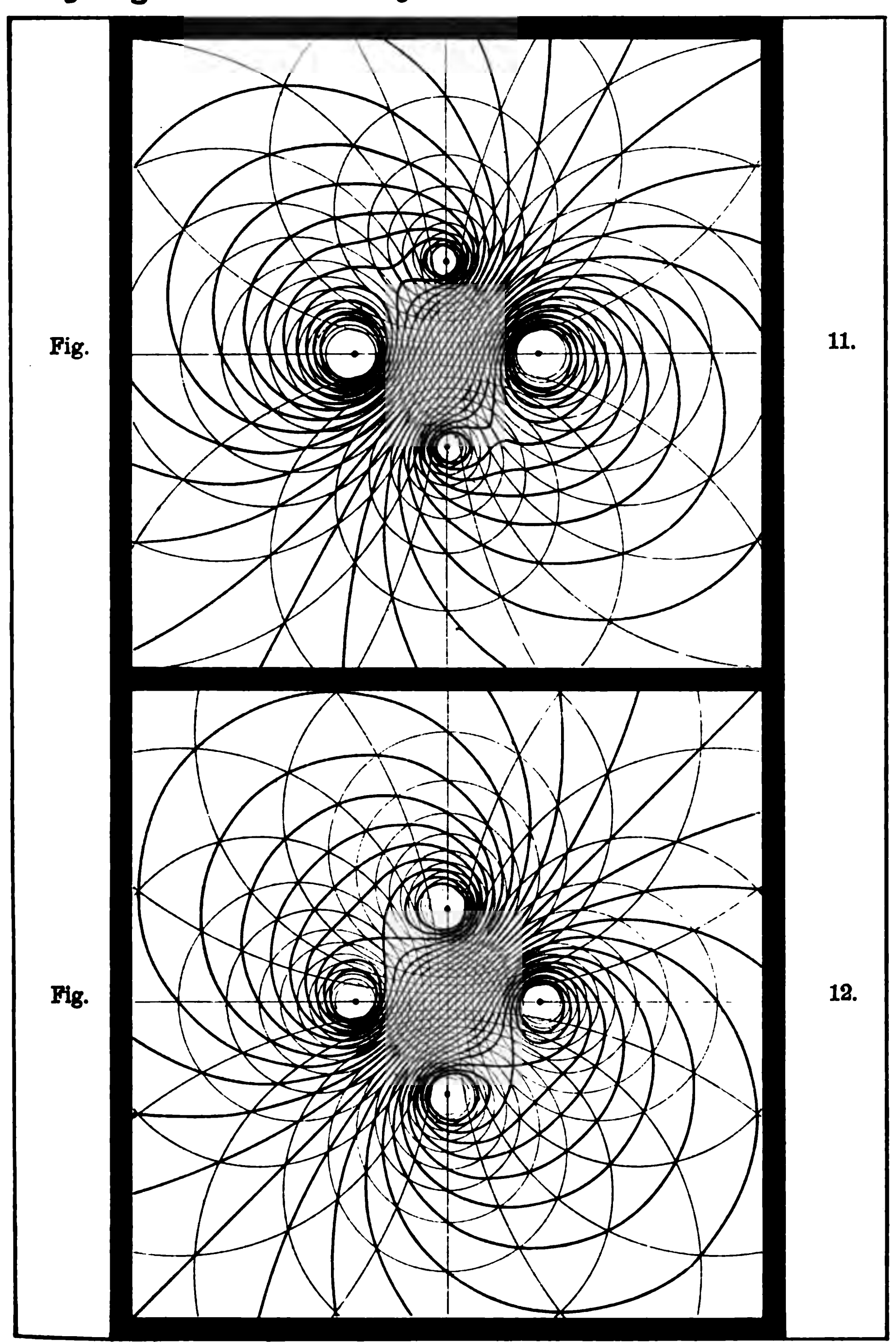
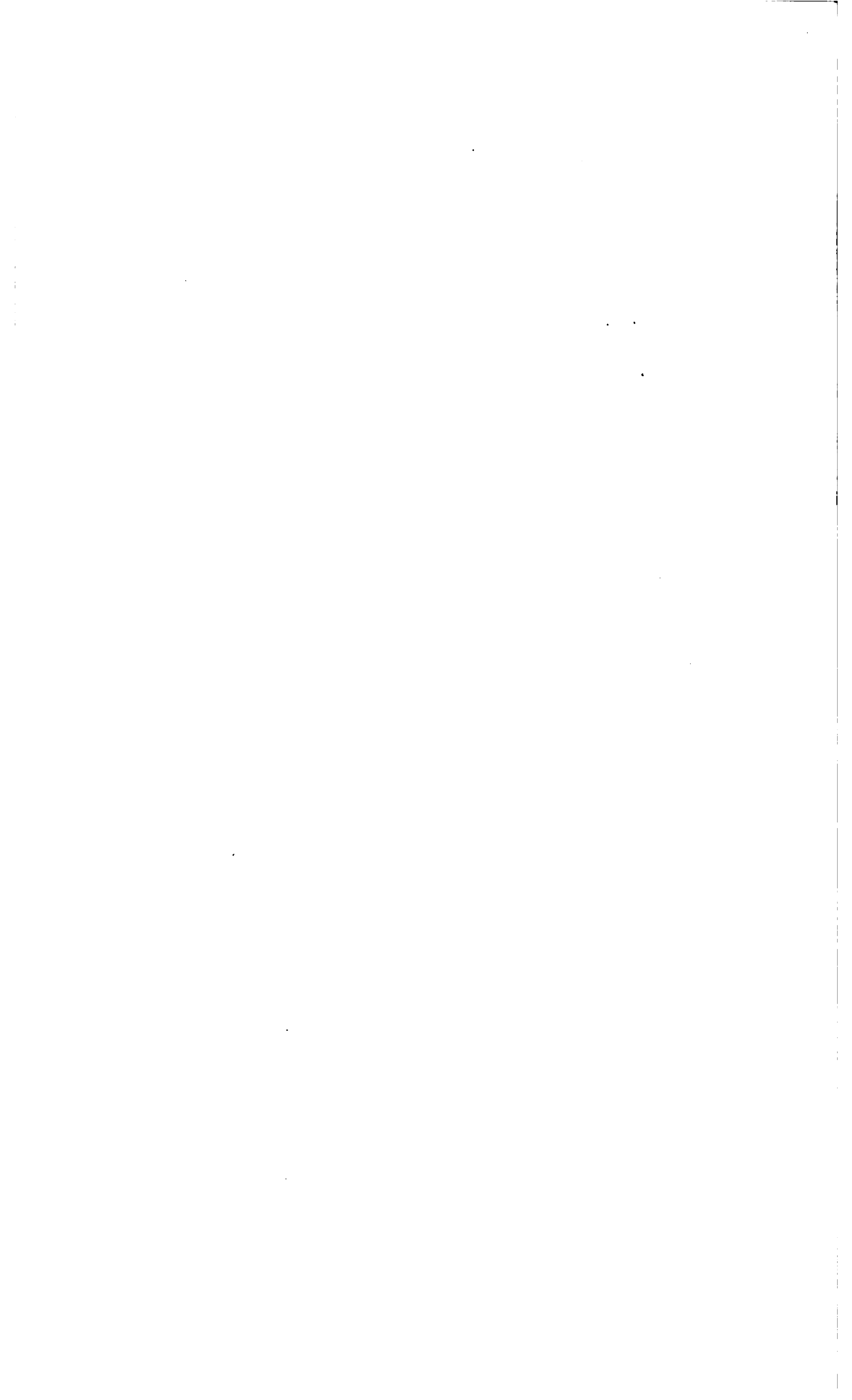


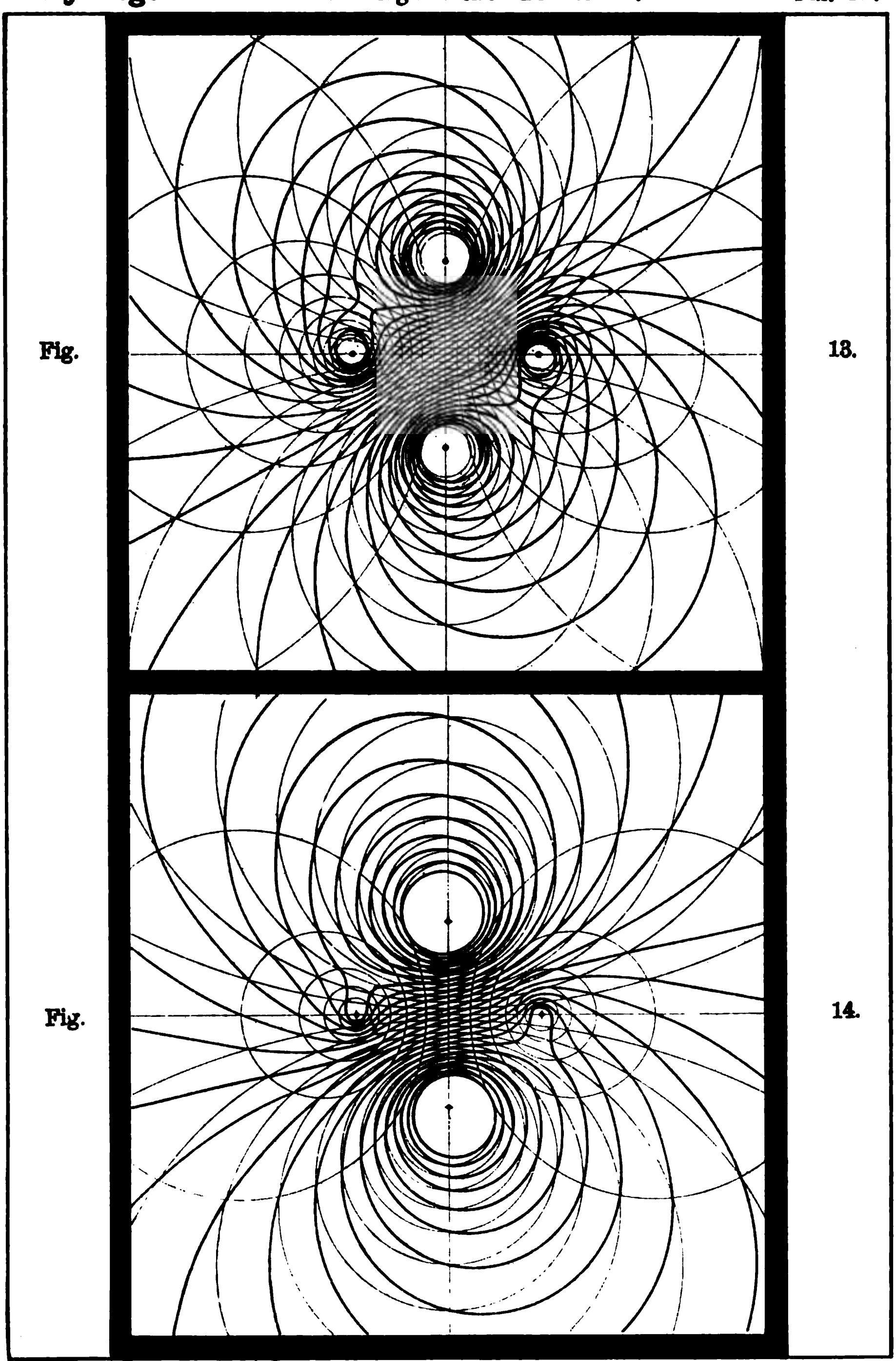
Fig. 11.

Fig. 12.

Photolithographie v. Max Jaffé, Wien.



M. Jüllig: Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes. Taf. III.

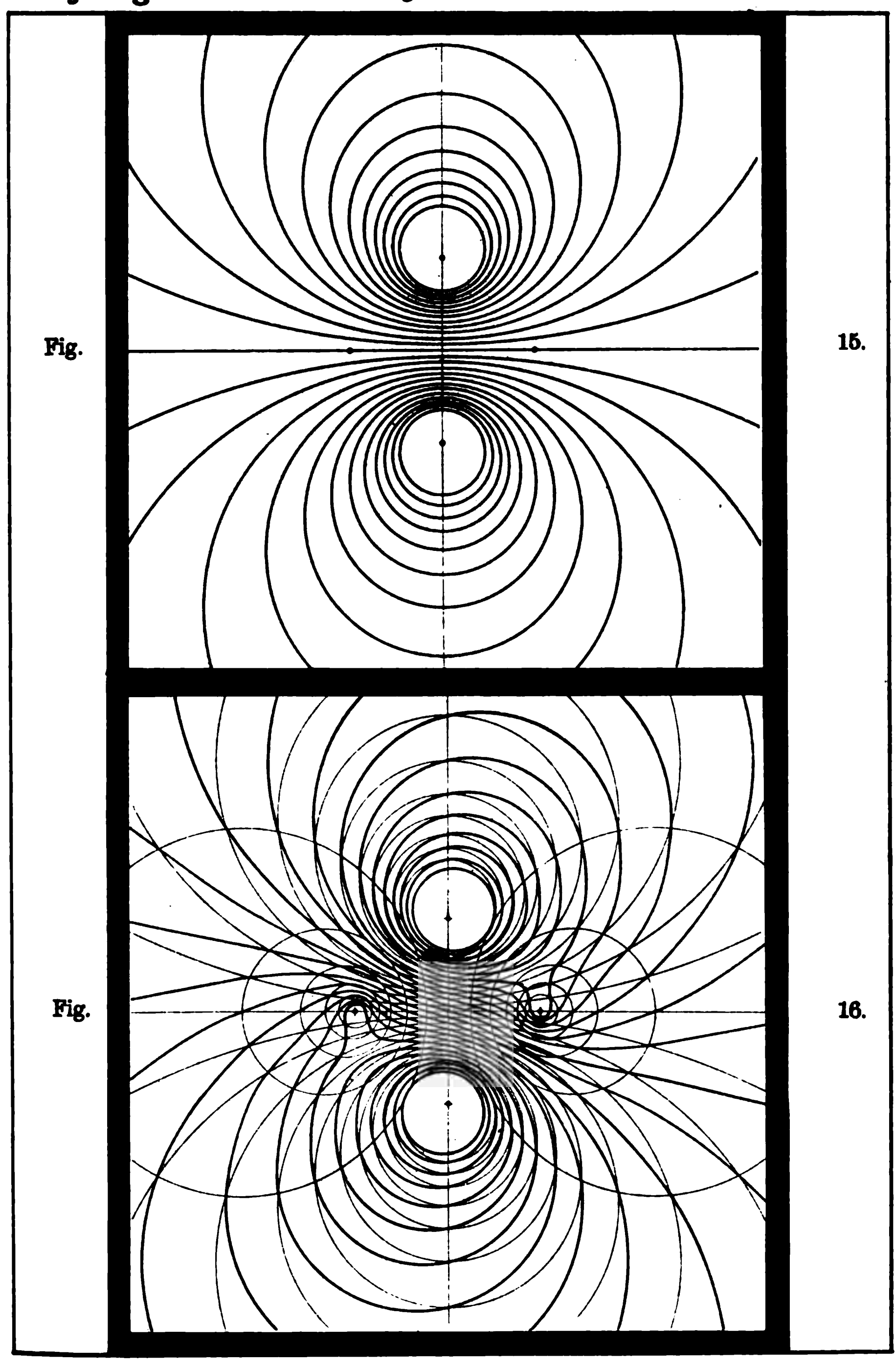


Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CIII. Abth. IIa. 1894.

Photolithographie v. Max Jaffé, Wien.



M. Jüllig: Kraftlinien eines magnetischen Drehfeldes. Taf. IV.



Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CIII. Abth. IIa. 1894.

Photolithographie v. Max Jaffé, Wien.



Zur Frage der Perihelsbewegung des Planeten Mercur

von

Dr. **Eduard Frh. v. Haerdtl,**
Professor an der k. k. Universität in Innsbruck.

Durch die grossartige Thätigkeit Le Verrier's besitzen wir heute von allen grossen Planeten Tafeln, welche die Bewegung derselben mit einer Genauigkeit darstellen, die kaum etwas zu wünschen übrig lässt.

Während für alle grossen Planeten diese Tafeln ausschliesslich auf das allgemeine Attractionsgesetz basirt erscheinen, sah sich Le Verrier bei Herstellung der Mercurstafeln, um die erforderliche Genauigkeit in der Darstellung der Beobachtungen dieses Planeten zu erreichen, gezwungen, ein empirisches Glied zu Hilfe zu nehmen. Diese empirische Correction bezieht sich ausschliesslich auf die Bewegung des Perihels der Mercurbahn, und zwar erscheint die säculare Bewegung dieses Elements um 38″ grösser angenommen, als jener Werth, welchen die Theorie mit den von Le Verrier adoptirten Werthen der Massen der Planeten für diese Grösse finden lässt.

Die Astronomen haben mühevolle Arbeiten nicht gescheut, diese Unvollkommenheit in der Mercurstheorie zu beseitigen. Die Rechnungen Le Verrier's sind revidirt und auf die neuesten Beobachtungen ausgedehnt worden, aber nur mit dem Erfolge, die Resultate des berühmten Astronomen zu bestätigen.

Le Verrier selbst hat schon den Versuch unternommen, mit Zuhilfenahme einer Hypothese den Widerspruch zwischen

Theorie und Beobachtungen zu lösen, und zwar suchte er die anormale Bewegung des Perihels durch die Einwirkung eines oder einer Gruppe von kleinen Planeten zwischen Mercur und der Sonne zu erklären. Die Frage, ob solche Planeten wirklich existiren, beschäftigte lange Zeit hindurch die Astronomen in intensivster Weise, doch hat das eifrigste Nachforschen nach solchen Körpern bis heute noch zu keinem Resultate geführt.

Diese zuerst von Le Verrier ausgesprochene Hypothese eines intramercuriellen störenden Körpers hat mehrfache Modificationen erfahren, indem man an die Stelle eines Planeten mehrere kleinere Planetoiden treten liess oder beziehungsweise einen Ring sehr kleiner Körper. Diese Hypothesen bilden den Gegenstand einer sehr hübschen Arbeit Bauschinger's. Ich glaube mich hier mit einem Hinweis darauf begnügen zu können (Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Mercur, München 1884).

Wenngleich zugegeben werden muss, dass die Hypothesen eines oder mehrerer intramercurieller Planeten oder eines Planetoidenringes gewiss zu keiner offenbaren Unwahrscheinlichkeit oder Unmöglichkeit führen, so scheinen mir doch zu viele gewichtige Gründe gegen diese Hypothesen zu sprechen Ich will hier aber auf diese Gründe nicht näher eingehen, denn in der erwähnten Arbeit Bauschinger's findet sich das Für und Wider, welches sich gegen jede dieser einzelnen Hypothesen vom theoretischen Standpunkte sagen lässt, in einer so vollständigen Weise zusammengestellt, dass ich diesen Bemerkungen nichts Neues beizufügen hätte. Was sich aber vom Standpunkte der Beobachtung noch ausserdem gegen diese Hypothesen anführen lässt, hat wieder von Newcomb in seiner »Populären Astronomie« eingehende Behandlung gefunden.

Es ist mir nicht recht erklärlich, aber es ist Thatsache, dass in allen Arbeiten, welche sich auf die Bewegung des Mercurperihels beziehen, einer Hypothese nicht einmal Erwähnung geschieht, die auf den ersten Blick die anormale Bewegung des Mercurperihels in ungezwungenster Weise zu erklären scheint. Wenngleich wir in der Folge sehen werden, dass sich gegen diese Hypothese auch ein gewichtiger Ein-

wand erheben lässt, so scheint es mir doch nicht gerechtfertigt, dass man dieselbe bisher ganz unberücksichtigt liess. Ich vermuthe, dass man an die folgende Hypothese überhaupt nicht gedacht habe, und dass es sich einzig daraus erklärt, dass man nicht zusah, wie sich denn die Verhältnisse bei näherem Eingehen auf diese Hypothese gestalten.

Die Hypothese, auf deren nähere Untersuchung wir im Folgenden eingehen wollen, lässt sich in vier Worte zusammenfassen: Mercur habe einen Satelliten.

Bezeichnet man mit M, m, m' die Massen beziehungsweise der Sonne, des Mercur und des hypothetischen Satelliten, mit μ die Summe dieser drei Massen

$$\mu = M + m + m',$$

so gelten die folgenden drei Differentialgleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes des Mercursystems

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\mu \frac{d\Omega}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = f\mu \frac{d\Omega}{dy}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = f\mu \frac{d\Omega}{dz}.$$

Nehmen wir an, dass die Entfernungen des Satelliten und des Mercur zu ihrem gemeinsamen Schwerpunkt klein seien im Verhältniss zur Entfernung des Mercur von der Sonne, so lässt sich Ω nach Potenzen der Verhältnisse $\frac{\rho}{R}$ und $\frac{\rho'}{R}$ entwickeln. Die Entwicklung wollen wir einstweilen nur so schreiben:

$$\Omega = \frac{1}{R} + \Omega'.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes stellt uns jenes Glied vor, von welchem die Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes unter der Annahme abhängt, dass die Massen des Planeten, wie des Satelliten in demselben vereint seien. Ω' hingegen liefert uns die Variationen der Mercurselemente, welche aus der Anwesenheit eines Satelliten resultiren würden.

Bezeichnet man mit a, a' die grossen Halbaxen der Mercursbahn und der Satellitenbahn, mit e, e' die Excentricitäten, mit l, l' die mittleren Längen, mit ϖ, ϖ' die Perihellängen, endlich mit γ

die Neigung der Satellitenbahn, so liefert die Entwicklung von Ω' bekanntlich den folgenden Ausdruck:[1]

$$\Omega' = +\frac{mm'}{(m+m')^2}\frac{a'^2}{a^3}\left\{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}e^2+\frac{3}{8}e'^2-\frac{3}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\ldots\right.$$
$$+\frac{3}{4}\cos(2l'-2l)$$
$$\left.+\ldots\ldots\ldots\right\}.$$

In der ganzen Entwicklung von Ω', wenn wir dieselbe hingeschrieben denken, kommt kein Glied vor, welches $\bar{\omega}'$ allein enthält. Wir schliessen demnach sofort, dass aus der Anwesenheit eines Satelliten keine säculare Variation der Excentricität der Mercursbahn resultiren kann. Dieses Resultat scheint mir desshalb erwähnenswerth, da der Versuch Le Verrier's, eine etwaige säculare Verbesserung dieser Excentricität empirisch aus dem Vergleich der Beobachtungen mit der Theorie zu ermitteln, welche Bestimmung auch scheinbar befriedigend ausfiel, doch zu solchen Consequenzen führte, dass Le Verrier schliesslich es für besser hielt, von den hiefür erhaltenen Werth lieber keinen Gebrauch zu machen.

Aber die Variation des Perihels des Mercur enthält ein säculares Glied, welches durch den Ausdruck dargestellt erscheint:

$$e\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{f\mu}{na^2}\sqrt{1-e^2}\,\frac{d\Omega'}{de} =$$
$$= +\frac{3}{4}\frac{mm'}{(m+m')^2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 e\sqrt{1-e^2}\,.n$$

und die Integration dieses Ausdruckes liefert sofort

$$\delta\bar{\omega} = \frac{3}{4}\frac{mm'}{(m+m')^2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2\sqrt{1-e^2}\,.nt.$$

[1] Le Verrier: Annales de l'Observatoire de Paris, t. IV, p. 45.

Setzen wir

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\varphi}{2},$$

so geht das säculare Glied in Ω', welches $\sin^2\frac{\gamma}{2}$ enthält, über in

$$-\frac{3}{8}\frac{mm'}{(m+m')^2}\frac{a'^2}{a^3}\varphi^2$$

und hiemit findet sich für die säculare Variation des Knotens der Mercursbahn der Ausdruck

$$\delta\theta = -\frac{3}{4}\frac{mm'}{(m+m')^2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 nt.$$

Aus dem Vergleiche dieses Ausdruckes mit dem von $\delta\varpi$ ergibt sich sofort, dass aus der Anwesenheit eines Satelliten eine säculare Bewegung des Knotens resultiren müsse, welche der Grösse nach gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt der säcularen Bewegung des Perihels wäre. Wir werden auf diesen Punkt erst weiter unten näher eingehen.

Nach den früheren Bemerkungen beträgt die jährliche Variation des Perihels, welche durch die Wirkung des Satelliten zu erklären wäre, $+0\overset{''}{.}38$. Nimmt man aber auf jene Werthe der Massen Rücksicht, welche nach dem Stande der heutigen Forschung als die wahrscheinlichsten bezeichnet werden müssen, so erhebt sich der Werth der Perihelsbewegung auf $+0\overset{''}{.}43$. Wir wollen diesen letzten Werth den nachfolgenden Ausführungen zu Grunde legen, da bei Annahme dieses Werthes sich die Verhältnisse durchwegs ungünstiger gestalten, als bei Zugrundelegung des kleineren Werthes.

Substituiren wir nun für die Mercurselemente sofort die bekannten numerischen Werthe und vernachlässigen gleich im obigen Ausdrucke für $\delta\varpi$ die Masse des Satelliten gegen die Masse des Mercur, da dieselbe ja jedenfalls nur Bruchtheile der ersteren betragen kann, so geht der obige Ausdruck in die folgende Gleichung über:

$$+0\overset{''}{.}43 = +394500''\left(\frac{m'}{m}\right)\left(\frac{a'}{a}\right)^2$$

oder

$$+0\cdot0000001089 = \left(\frac{m'}{m}\right)\left(\frac{a'}{a}\right)^2.$$

Wie man sieht, stehen rechts zwei Unbekannte, erstlich nämlich das Verhältniss der Satellitenmasse zur Masse des Mercur, zweitens das Verhältniss der grossen Halbaxe der Satellitenbahn zur grossen Halbaxe der Mercursbahn.

Macht man also über eine der Grössen eine beliebige Annahme, so gestattet uns diese Gleichung, sofort die andere Unbekannte zu bestimmen.

Nehmen wir an — ein Fall, der sich ja in der Wirklichkeit thatsächlich vorfindet, und zwar zwischen Mond und Erde — dass das Verhältniss der Satellitenmasse zur Masse des Planeten Mercur $\frac{1}{80}$ betrage, so folgt sofort aus obiger Gleichung:

$$\frac{a'}{a} = +0\cdot00295.$$

Das analoge Verhältniss $\left(\frac{a'}{a}\right)$ zwischen Mond und Erde beträgt bekanntlich $+0\cdot00256$. Man sieht, der obigen Gleichung kann man durch Annahmen genügen, die vollkommen plausibel sind und für die Analoga in unserem Planetensystem schon vorhanden sind.

Nach Le Verrier beträgt die jährliche analoge Variation des Erdperihels, also die durch den Mond auf die Erde ausgeübte säculare Störung des Erdperihels

$$\delta\varpi = +0\text{''}0698\, t.$$

Dieselbe ist viel kleiner als die Variation des Mercurperihels, was sich einerseits daraus erklärt, dass der Werth von $\left(\frac{a'}{a}\right)^2$ sich ja in beiden Fällen nicht völlig deckt, anderseits aber auch daraus, dass auf der rechten Seite der Factor n, also die mittlere Bewegung des Planeten selbst, vorkommt. Dieselbe ist ja für Mercur $n = 14732''$, für die Erde nur $n = 3548''$.

Wir schliessen sofort daraus, dass für Mars und Jupiter, caeteris paribus, der Einfluss der Satelliten auf die Perihelsbewegung dieser Planeten noch kleiner sein müsse.

Ich habe das obige numerische Beispiel nur herausgegriffen, um zu zeigen, dass unsere Hypothese gewiss nicht so viel Unwahrscheinliches an sich habe, dass es gerechtfertigt erscheint, dieselbe rundweg abzulehnen. Übrigens leisten mehrere Annahmen nahezu dasselbe, wie die obige. Um einen Überblick hierüber zu ermöglichen, habe ich das folgende Täfelchen gerechnet.

Unter nachfolgenden Annahmen über das Verhältniss der Masse des Satelliten zur Masse des Mercur, welche sich in der ersten Verticalreihe angegeben finden, resultiren jene Werthe von a', also die zugehörigen Werthe der grossen Halbaxe der Satellitenbahn, die sich in der zweiten Verticalreihe wiedergegeben finden.

In der letzten Verticalreihe theile ich endlich noch die entsprechenden Umlaufszeiten mit.

$\frac{m'}{m}$	$\log a'$ (astr. Einheiten)	a' (in Einheiten des aeq. Durchmessers des Mercur)	T (in Tagen)
1 : 50	6·956	28	23
1 : 80	7·058	35	33
1 : 100	7·106	40	39
1 : 150	7·194	49	53
1 : 200	7·257	56	66

Hätten wir für die jährliche Bewegung den kleineren Werth Le Verrier's statt des Werthes $+0\overset{s}{.}43$ zu Grunde gelegt, so könnte man noch die Masse des Satelliten kleiner annehmen, als es hier zulässig erscheint.

Greift man nun auf die früher gegebene Entwicklung von Ω' zurück, so lässt eine kurze Rechnung uns sofort finden, dass bei Zugrundelegung auch des grösstmöglichen Werthes für die Masse des Satelliten, alle Ungleichheiten, welche aus den periodischen Gliedern der Function Ω' resultiren würden, nur verschwindende Coëfficienten erreichen können.

Wie wir schon bemerkten, bedingt die Anwesenheit eines Satelliten eine säculare Bewegung der Knotenlänge, welche jener der Perihelslänge an Grösse nicht nachsteht.

Derselben scheinbaren Schwierigkeit begegnet man aber auch dann, wenn man, von der Hypothese Le Verrier's oder einer dieser ähnlichen Hypothese ausgehend, die anormale Perihelsbewegung des Mercur zu erklären versucht, denn sofern man nicht die Lage der Bahn des einzelnen Planeten oder der Planetengruppe oder des Planetoidenringes mit der Lage der Mercursbahn nahe zusammenfallend annimmt, resultirt auch hier ein sehr merkbarer Betrag für die Änderung dieses Elements. Es genügt wohl, hier diesen Umstand erwähnt zu haben.

Man könnte sofort, das Nichtvorhandensein einer Anomalie in der Bewegung des Knotens der Mercursbahn als feststehende Thatsache ansehend, zur Erklärung dieses Umstandes, welcher mit unserer Hypothese in Widerspruch zu stehen scheint, eine weitere Hypothese heranziehen, nämlich die Annahme, dass die Neigung der Bahn des Satelliten verschwindend sei. Unter dieser Annahme wird $\sin\frac{\gamma}{2} = 0$, es verschwindet also das säculare Glied mit der Neigung als Factor in Ω', mithin wird auch $\delta\theta = 0$.

Obwohl es sich nicht verkennen lässt, dass eine solche Annahme hier absolut nicht so viel Bedenkliches an sich trägt wie die analoge Annahme im Falle der intramercuriellen Planeten, will ich diese Annahme hier aber gar nicht ernstlich in Erwägung ziehen, denn es scheint mir, dass kein zwingender Grund besteht, der ersten Hypothese gleich mit einer zweiten zu Hilfe zu kommen.

Die diesbezügliche Frage, welche ich hier noch in Kürze behandeln will, möchte ich so formuliren: Ist es zulässig, eine Knotenbewegung der Mercursbahn ungefähr von derselben Grösse wie die Perihelsbewegung anzunehmen? Oder auch: Begegnet man bei Zugrundelegung des Beobachtungsmaterials, welches Le Verrier der Ermittlung der Constanten der Mercursbahn zu Grunde gelegt hat, schon derartigen Schwierigkeiten, dass man mit voller Berechtigung behaupten könne, die Beob-

achtungen liessen die Annahme einer derartigen Bewegung überhaupt nicht zu?

An mehreren Orten habe ich die Behauptung aufgestellt gefunden, dass die Untersuchungen Le Verrier's evident bewiesen, dass keine Abweichung zwischen dem theoretischen und beobachteten Werthe der Knotenbewegung der Mercursbahn vorhanden sei. So genau ich die schönen Arbeiten Le Verrier's auch durchgesehen habe, so habe ich trotzdem nirgends von Le Verrier selbst eine derartige Behauptung ausgesprochen gefunden. Und wie wir gleich sehen werden, sprechen viele Umstände dagegen, dass Le Verrier auch diese Ansicht überhaupt habe aussprechen können. Im Gegentheil, Le Verrier macht selbst ausdrücklich darauf aufmerksam, dass die Bestimmung der Knotenlänge sehr unsicher sei. Während z. B. sämmtliche Meridianbeobachtungen für die Knotenlänge die Correction $\delta\Theta = +12\overset{"}{.}4$ ergeben, zeigt es sich, dass den Bedingungsgleichungen, welche Le Verrier aus den Mercursdurchgängen abgeleitet hatte, besser genügt werde, wenn man für $\delta\Theta$ einen negativen Werth annimmt. Le Verrier bemerkt hiezu noch (p. 92): »N'ayant aucune raison de choisir entre ces deux quantités, nous accepterons la valeur moyenne $\delta\Theta = +5\overset{"}{.}5$.

Die Behauptung also, dass eine grössere Bewegung des Knotens ausgeschlossen erscheine, ist demnach nicht auf Le Verrier zurückzuführen und dieser Umstand allein vermindert schon wesentlich das Gewicht derselben.

Nehmen wir für die jährliche Änderung des Knotens denselben Werth an, wie für die jährliche Änderung des Perihels, also $\delta\Theta = -0\overset{"}{.}43\,t$, so resultiren für die folgenden Jahre, 1697, 1723...bis 1848, also jene Jahre, in welchen die Mercursdurchgänge beobachtet wurden und welche allein zur Verbesserung der Elemente dieses Planeten von Le Verrier herangezogen erscheinen, die folgenden Variationen der Position des Knotens, welche wir mit $\delta\Theta$ bezeichnen und in der zweiten Verticalreihe ansetzen wollen.

Datum	$\delta\Theta$		E
1697	+65″9	+0·032 $\delta\Theta$	+2″1
1723	+54·6	+0·012 $\delta\Theta$	+0·7
1736	+49·0	+0·045 $\delta\Theta$ −0·052 $\delta\Theta$	+2·2 −2·5
1743	+46·0	−0·039 $\delta\Theta$ +0·024 $\delta\Theta$	−1·8 +1·1
1753	+41·7	−0·033 $\delta\Theta$	−1·4
1769	+34·8	+0·018 $\delta\Theta$	+0·6
1782	+29·2	+0·055 $\delta\Theta$ −0·056 $\delta\Theta$	+1·6 −1·6
1786	+27·5	−0·085 $\delta\Theta$ +0·057 $\delta\Theta$	−2·3 +1·6
1789	+26·2	−0·033 $\delta\Theta$ +0·018 $\delta\Theta$	−0·9 +0·5
1799	+21·9	+0·020 $\delta\Theta$ −0·052 $\delta\Theta$	+0·4 −1·1
1802	+20·6	−0·012 $\delta\Theta$	−0·2
1832	+ 7·7	−0·065 $\delta\Theta$ +0·034 $\delta\Theta$	−0·5 +0·3
1845	+ 2·2	+0·041 $\delta\Theta$	+0·1
1848	+ 0·9	+0·001 $\delta\Theta$	0·0

Die Zahlen der dritten Verticalreihe habe ich den Untersuchungen Le Verrier's entnommen, und zwar der Zusammenstellung der Bedingungsgleichungen, welche Le Verrier aus der Discussion der Beobachtungen der Mercursdurchgänge abgeleitet hat (S. 80, Bd. V).

Multiplicirt man die Zahlen dieser dritten Zeile mit den nebenanstehenden Zahlen linker Hand, so resultiren die Zahlen E, die wir in der vierten Verticalreihe angesetzt haben. Ein Blick auf diese Werthe genügt, um uns davon zu belehren, welch' ausserordentlich geringen Einfluss sogar sehr starke Variationen der Knotenlänge hier nur ausüben.

Die E-Werthe übersteigen nur in wenigen Fällen jene Fehler, welche in den Bedingungsgleichungen übrig bleiben

wenn man in demselben die von Le Verrier schliesslich adoptirten Verbesserungen der Constanten der Mercursbahn zurücksubstituirt. Wie mir eine vorläufige Rechnung gezeigt hat, lassen sich diese Fehler aber durch ganz geringfügige Variation der 14 Unbekannten, welche in den aus den Mercursdurchgängen abgeleiteten Bedingungsgleichungen vorkommen, noch sehr wesentlich herabdrücken.

Ich will hier auf diese Rechnung nicht näher eingehen, denn ich glaube, die wenigen Zahlen, die ich hier mitgetheilt habe, beweisen zur Genüge, dass das Beobachtungsmaterial, welches Le Verrier, so weit es die Mercursdurchgänge anlangt, herangezogen hat und heranziehen konnte, keineswegs die Behauptung stützt, dass eine der Perihelsbewegung adäquate Änderung des Knotens, als ausgeschlossen zu betrachten sei.

Zu ganz demselben Resultate haben mich meine provisorischen, die Meridianbeobachtungen betreffenden Rechnungen geführt, aus welchen Le Verrier 195 Bedingungsgleichungen aufgestellt hat, die die Form haben:

$$c_1\delta\varphi + c_2\delta\Theta \pm C = 0.$$

Für die Meridianbeobachtungen, welche die Jahre 1801 bis 1842 umfassen, ist das Maximum von $\delta\Theta$ rund 20″. Wirft man aber einen Blick auf die Bedingungsgleichungen (S. 89, Bd. V), so sieht man, dass im Mittel die Coëfficienten c_2 rund $\pm 0{\cdot}05$ betragen. Wir schliessen sofort, dass hier der Einfluss einer Correction der Knotenlänge demnach auch nicht über 1″ steigen könne.

In vielen der untersuchten Fälle zeigte mir die Rechnung, dass bei Annahme eines der Zeit proportionalen Gliedes in dem Ausdrucke der Knotenlänge sich sogar die Darstellung der Beobachtungen besserte. In keinem einzigen Falle, obwohl ich gerade die Bedingungsgleichungen, in welchen c_2 möglichst gross war, heranzog, stieg der Fehler auf einen solchen Betrag, dass die Annahme eines der Zeit proportionalen Gliedes in Θ als unzulässig bezeichnet werden könnte.

Die wenigen Bemerkungen, die ich zu dieser Frage hier mittheilte, beweisen zur Genüge, dass man bei Zugrundelegung des Beobachtungsmateriales, welches Le Verrier der Ermitt-

lung der Constanten der Mercursbahn zu Grunde legte, mit der Annahme einer der Perihelsbewegung adäquaten Bewegung des Knotens keineswegs auf derartige Schwierigkeiten stösst, dass man behaupten darf, die Beobachtungen schliessen eine derartige Annahme überhaupt aus. Ob bei Heranziehung des seither angewachsenen Beobachtungsmateriales sich nicht die Verhältnisse ungünstiger gestalten, lässt sich natürlich ohne eingehende Untersuchung nicht beurtheilen. Eine derartige Untersuchung liegt in meiner Absicht.

Vom theoretischen Standpunkte scheint sich mir, wie aus den vorstehenden Bemerkungen erhellt, wohl kein Argument deduciren zu lassen, das die Hypothese eines Mercursatelliten als unhaltbar erscheinen liesse. Wohl erübrigt es noch zu untersuchen, ob die aus der Anwesenheit eines Satelliten resultirenden periodischen Störungen kurzer Dauer nicht mit den Beobachtungen in Widerspruch gerathen. Diese Störung ist jedoch so geringfügig, dass es sehr eingehender Untersuchungen bedürfte, um hierüber ein Urtheil gewinnen zu können.

Vom Standpunkte der Beobachtung lässt sich aber gegen diese Hypothese ein sehr gewichtiger Einwand vorbringen, dem ich hier noch Platz geben will.

Die Existenz eines Satelliten ist bekanntlich nur dann möglich, wenn die Massen und Entfernungen des Satelliten wie des Planeten der Gleichung genügen:

$$\frac{m+m'}{r'^2} > \left(\frac{1}{r+r'}\right)^2 - \frac{1}{r^2}.$$

Mit Berücksichtigung einiger Vernachlässigungen, die wohl keiner näheren Rechtfertigung bedürfen, lässt sich diese Ungleichheit auf die folgende zurückführen:

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^3 < \frac{m}{2}.$$

Nehmen wir nun die Masse des Mercur zu 1 : 5,500.000 an, so wird erst

$$\frac{r}{r'} > 220,$$

und die Substitution dieses Werthes in die Bedingungsgleichung für die Perihelsbewegung ergibt für das Verhältniss der Massen die Bedingung

$$\frac{m'}{m} > 0\cdot 005.$$

Unter der Annahme, dass die Dichte des Satelliten gleich der Dichte des Mercurs sei, müssen die Oberflächen derselben Bedingung genügen und man ist sofort in der Lage, auch die Grössenclasse des Satelliten zu bestimmen. Legt man aber auch andere Annahmen über das Dichtenverhältniss zu Grunde, man gelangt durchwegs zu analogen Resultaten, dass nämlich der Satellit so hell wäre, dass es als nicht wahrscheinlich bezeichnet werden muss, dass der hypothetische Satellit bis heute sich der Beobachtung habe entziehen können. Um die Grössenclasse des Satelliten wesentlich unter die fünfte herabzudrücken, müsste man schon zu Annahmen greifen, die nicht mehr den Charakter der Ungezwungenheit an sich tragen.

Wohl könnte man durch die Annahme mehrerer Satelliten, durch entsprechend veränderte Annahme über die Masse des Mercurs, welche Constante ja heute noch keineswegs als vollkommen verbürgt angesehen werden kann, endlich durch eine Zugrundelegung eines etwas kleineren Werthes für die Differenz der Perihelsbewegung als jenen, von dem wir Gebrauch gemacht haben, es erreichen, dass die Sichtbarkeitsbedingungen merklich ungünstigere würden, doch glaube ich nicht, dass die Hypothese eines Satelliten durch solche Stützen auf schwankendem Boden an Haltbarkeit gewinne.

Ein Beitrag zur Kenntniss der 26tägigen Periode des Erdmagnetismus

von

J. Liznar.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1894.)

Die Existenz einer fast 26tägigen Periode der erdmagnetischen Kraft dürfte nach den vielfachen darüber angestellten Untersuchungen als vollkommen erwiesen betrachtet werden. Alle Forscher, welche sich mit dieser Frage beschäftigt haben, suchten zunächst die Dauer der Periode zu ermitteln, ohne auf deren weitere Eigenschaften näher einzugehen. Eine periodische Änderung ist aber durch ihre Dauer allein nicht hinreichend charakterisirt, es müssen vielmehr noch die Eintrittszeiten der Extreme, sowie die Grösse der Schwankung in Betracht gezogen werden. Hiezu wäre erforderlich, dass die 26tägige Periode für verschiedene Orte aus gleichzeitigen Beobachtungen abgeleitet werde. Dies ist nur für Wien und Kremsmünster und für die zwei Polarstationen Jan Mayen und Fort Rae geschehen.[1] Man kann aus der graphischen Darstellung der Periode ersehen, dass der Verlauf derselben an den beiden Stationen ein ganz gleichartiger ist. Obwohl sich dieses Resultat zunächst blos auf jene Änderungen bezieht, welche die tägliche Schwankung im Laufe der 26tägigen Periode zeigt, so ist es kaum zweifelhaft, dass auch die Richtungsänderungen an den beiden Polarstationen in ganz gleicher Weise erfolgen.

---

[1] Liznar, Über die 26tägige Periode der erdmagnetischen Elemente in hohen magnetischen Breiten. Diese Sitzungsberichte, XCV.

In einer im October-Heft 1893 der meteorologischen Zeitschrift veröffentlichten kleinen Abhandlung habe ich gezeigt, dass die tägliche Periode des Erdmagnetismus eine eigenthümliche Abhängigkeit von der geographischen Breite zeigt, wenn man nämlich die Bewegungen der Magnetnadel, welche sie unter dem Einflusse der die Variationen bedingenden Kraft im Raume ausführt, ins Auge fasst. Es hat sich unter Anderem ein vollkommener Gegensatz zwischen der Bewegung in mittleren und hohen Breiten ergeben, indem in mittleren Breiten die Magnetnadel im Laufe des Tages eine Kegelfläche im Sinne des Uhrzeigers, in hohen Breiten aber gegen denselben, beschreibt. Dieser Unterschied in der Bewegung gab mir Veranlassung, zu untersuchen, ob ein solcher Gegensatz auch bei der 26tägigen Periode anzutreffen sei, und wie sie sich überhaupt in mittleren und hohen Breiten zu gleicher Zeit abspielt.

Obwohl es sehr wünschenswerth gewesen wäre, Beobachtungen von mehreren Orten zu verwenden, wozu ich mich aber aus Mangel an Zeit nicht entschliessen konnte, so glaube ich doch, dass die im Nachfolgenden nur für zwei Orte dargestellte 26tägige Periode genug Interesse bietet, um eine Besprechung derselben zu rechtfertigen. Zur Berechnung der Periode habe ich die gleichzeitigen Beobachtungen von Pawlowsk und der österreichischen Polarstation Jan Mayen verwendet. Die einjährige Beobachtungsreihe der letzteren Station umfasst blos 12 Sonnenrotationen, ich hätte also eigentlich auch für Pawlowsk die Beobachtungsdaten derselben Zeit in Rechnung ziehen sollen. Um aber die Zahlen der 26tägigen Periode für Pawlowsk genauer zu erhalten, habe ich noch die zwölf nächsten Rotationen hinzugenommen, habe hiebei jedoch die Zählung der Tage an beiden Orten mit dem 8. September 1882 begonnen.

Zur graphischen Darstellung der Periode nach der von mir beschriebenen Methode[1] musste diese Periode sowohl für die Declination, als auch für die Inclination berechnet werden. Nachdem für Pawlowsk die Tagesmittel der Inclination nicht veröffentlicht werden, und ich dieselben für den vorliegenden

[1] Liznar, Eine Methode zur graphischen Darstellung der Richtungsänderungen des Erdmagnetismus. Diese Sitzungsberichte, C.

Zweck nicht eigens berechnen wollte, so habe ich zunächst die 26tägige Periode der Horizontal- und Verticalintensität ermittelt und aus derselben die der Inclination zukommende Periode abgeleitet.

In der nachfolgenden Tabelle findet man unter ΔD, ΔH und ΔV die 26tägige Periode der Declination, Horizontal- und Verticalintensität durch Differenzen gegen das Mittel dargestellt.[1] Unter C_s stehen die Correctionen, welche an die Zahlen wegen der säcularen Änderung angebracht werden müssen und welche aus den Jahresmitteln für 1882 und 1884 berechnet wurden. Nach diesen Mittelwerthen beträgt die säculare Änderung bei der

Declination	Horizontalintensität	Verticalintensität
4ʹ75	0·00080	0·00205

Pawlowsk.

	ΔD	C_s	d	ΔH	C_s	h	ΔV	C_s	v	i
0	0ʹ05	—0ʹ17	—0ʹ12	—3·7	+0·3	—3·4	4·4	+0·7	5·1	0ʹ34
1	—0·20	—0·16	—0·36	—4·6	+0·3	—4·3	1·1	+0·6	1·7	0·32
2	0·22	—0·15	0·07	—1·2	+0·2	—1·0	1·1	+0·6	1·7	0·10
3	0·28	—0·13	0·15	1·7	+0·2	1·9	—0·6	+0 5	—0·1	—0·12
4	0·30	—0·12	0 18	1·9	+0·2	2·1	—1·4	+0·5	—0·9	—0·14
5	0·28	—0·10	0·18	1·1	+0·2	1·3	—0·9	+0·4	—0·5	—0·10
6	0·33	—0·09	0·22	1·6	+0·1	1 7	—1·5	+0·4	—1·1	—0·11
7	0·28	—0·08	0·20	2·3	+0·1	2·4	—1·9	+0·3	—1·6	—0·19
8	0·32	—0 06	0·26	3·4	+0·1	3·5	—0·6	+0·3	—0·3	—0·24
9	0·18	—0·05	0·13	2·8	+0·1	2·9	—1·7	+0·2	—1·5	—0·22
10	0·22	—0·03	0·19	2·6	+0·1	2·7	—1·3	+0·1	—1·2	—0·22
11	0·27	—0·02	0·25	2·4	0·0	2·4	0·6	+0·1	0·7	—0·16
12	—0·15	—0·01	—0·16	—0·7	0·0	—0·7	—2·3	0·0	—2·3	—0 01
13	—0·12	+0·01	—0·11	1·1	0·0	1 1	—2·0	0·0	—2·0	—0 08
14	0·28	+0·02	0·30	0·3	0·0	0·3	—2·1	—0·1	—2·2	—0·07
15	0·41	+0·03	0·44	0·6	—0·1	0·5	—0·7	—0·1	—0·8	—0·05
16	—0·25	+0·05	—0·20	—0·6	—0·1	—0·7	—0·9	—0·2	—1·1	0·02
17	—0 43	+0·06	—0·37	—1·6	—0·1	—1·7	0·6	—0·3	0·3	0·12
18	—0·08	+0·08	0·00	0·8	—0·1	0·7	2·6	—0·3	2 3	0·01
19	—0·33	+0·09	—0·24	—3·9	—0·1	—4·0	—1·0	—0·4	—1·4	0·23
20	—0·02	+0·10	0·08	0·3	—0·2	0·1	2·0	—0·4	1·6	0·03
21	—0·19	+0·12	—0·07	—1·0	—0·2	—1·2	1·8	—0·5	1·3	0·11
22	—0·63	+0·13	—0·50	—4·0	—0·2	—4·2	—1·0	—0·5	—1·5	0·24
23	—0·29	+0.15	—0·14	0·1	—0·2	—0·1	0·4	—0·6	—0·2	0·00
24	—0·21	+0 16	—0·05	1·7	—0·3	1·3	3·1	—0·6	2·5	—0·03
25	—0·48	+0·17	—0·31	—2·3	—0·3	—2 6	2·0	—0·7	1·3	0·20

[1] Bei der Horizontal- und Vertical-Intensität bedeuten die Zahlen Einheiten der 5. Decimale (Mm., Mg., Sec.).

Die Zahlen unter d, h und v stellen demnach die von der säcularen Änderung befreite 26tägige Periode dar, und unter i ist die aus h und v abgeleitete Periode der Inclination ersichtlich.

Für Jan Mayen sind die Tagesmittel der Inclination publicirt worden, und ich konnte also die 26tägige Periode dieses Elementes direct ermitteln. Indem ich auch an die Daten dieser Station die früher erwähnte Correction wegen der säcularen Änderung (0'029 bei der Declination und 0'012 bei der Inclination pro Tag) anbrachte, erhielt ich die auf S. 731 unter »Beobachtung« stehenden Zahlen.

Wollte man diese Zahlen graphisch darstellen, so ergäben sich vielfach gebrochene Linien, aus welchen man eine Gesetzmässigkeit der Bewegung kaum entnehmen könnte; die Zahlen mussten daher einer Ausgleichung unterzogen werden. Um bei dieser Operation jede Willkür zu vermeiden, berechnete ich die zwei ersten Glieder der Bessel'schen Formel und erhielt:

Pawlowsk
$$\begin{cases} y_d = -0\cdot2098 \sin(148\cdot296+13\cdot846\,x)- \\ \qquad -0\cdot0587 \sin(124\cdot837+27\cdot692\,x) \\ y_i = 0\cdot1779 \sin(139\cdot743+13\cdot846\,x) \\ \qquad +0\cdot0723 \sin(\ 51\cdot414+27\cdot692\,x) \end{cases}$$

Jan Mayen
$$\begin{cases} y_d = -1\cdot0453 \sin(157\cdot378+13\cdot846\,x)+ \\ \qquad +0\cdot3547 \sin(\ 57\cdot373+27\cdot692\,x) \\ y_i = 0\cdot7602 \sin(145\cdot906+13\cdot846\,x) \\ \qquad -0\cdot0761 \sin(\ 49\cdot235+27\cdot692\,x) \end{cases}$$

wobei y den dem Tage x (vom 8. September gezählt) entsprechenden Werth der Differenz der Declination oder Inclination vorstellt, je nachdem es den Index d oder i trägt. Nach den vorstehenden Formeln habe ich die in den folgenden Tabellen unter d' und i' stehenden Werthe berechnet. Der vollkommen übereinstimmende Gang der für beide Stationen durch Rechnung erhaltenen Zahlen würde allein genügen, um das Vorhandensein einer 26tägigen Periode ersichtlich zu machen. Auch die Eintrittszeit der Extreme zeigt eine hinreichende Übereinstimmung, wenn man die verhältnissmässig kurze Beobachtungszeit berücksichtigt. Wir sehen aber einen

sehr bedeutenden Unterschied in den Amplituden. Dieselbe beträgt:

	Declination	Inclination
Pawlowsk	0'469	0'413
Jan Mayen	2·212	1·521

Die Amplitude ist demnach nicht nur grösser in Jan Mayen, sondern übereinstimmend auch grösser für die Declination an beiden Orten.

Pawlowsk.

Tag	Beobachtung		Rechnung		$d' \cos J$	$1' = 40\,cm$	
	d	*i*	*d'*	*i'*		*x*	*y*
0	—0'12	0'34	—0'158	0'171	—0'052	—2·1	6·8
1	—0·36	0·32	—0·091	0·150	—0·030	—1·2	6·0
2	0·07	0·10	—0·014	0·108	—0·005	—0·2	4·3
3	0·15	—0·12	0·063	0·048	0·021	0·8	1·9
4	0·18	—0·14	0·133	—0·024	0·044	1·8	—1·0
5	0·18	—0·10	0·186	—0·099	0·061	2·4	—4·0
6	0·22	—0·11	0·219	—0·165	0·072	2·9	—6·6
7	0·20	—0·19	**0·229**	—0·214	0·076	3·0	—8·6
8	0·26	—0·24	0·220	**—0·240**	0·073	2·9	—9·6
9	0·13	—0·22	0·195	—0·239	0·064	2·6	—9·6
10	0·19	—0·22	0·162	—0·214	0·053	2·1	—8·6
11	0·25	—0·16	0·126	—0·170	0·042	1·7	—6·8
12	—0·16	—0·01	0·091	—0·115	0·030	1·2	—4·6
13	—0·11	—0·08	0·062	—0·058	0·020	0·8	—2·3
14	0·30	—0·07	0·037	—0·008	0·012	0·5	—0·3
15	0·44	—0·05	0·015	0·030	0·005	0·2	1·2
16	—0·20	0·02	—0·008	0·056	—0·003	—0·1	2·2
17	—0·37	0·12	—0·036	0·068	—0·012	—0·5	2·7
18	0·00	0·01	—0·069	0·074	—0·023	—0·9	3·0
19	—0·24	0·23	—0·109	0·077	—0·036	—1·4	3·1
20	0·08	0·03	—0·152	0·083	—0·050	—2·0	3·3
21	—0·07	0·11	—0·192	0·095	—0·073	—2·5	3·8
22	—0·50	0·24	—0·224	0·115	—0·074	—3·0	4·6
23	—0·14	0·00	**—0·240**	0·138	—0·079	—3·2	5·5
24	—0·05	—0·03	—0·236	0·160	—0·078	—3·1	6·4
25	—0·31	0·20	—0·208	**0·178**	—0·069	—2·8	6·9

Jan Mayen.

Tag	Beobachtung		Rechnung		$d' \cos J$	1' = 10 *cm*	
	d	*i*	*d'*	*i'*		*x*	*y*
0	—0'26	1'01	—0'103	0'368	—0'020	—0·2	3·7
1	1·74	0·14	0·194	0·189	0·037	0·4	1·9
2	—1·71	0·68	0·420	0·011	0·080	0·8	0·1
3	0·90	—0·22	0·565	—0·155	0·107	1·1	—1·5
4	—0·80	—0·48	0·639	—0·302	0·121	1·2	—3·0
5	1·79	—0·59	0·657	—0·427	0·125	1·2	—4·3
6	0·77	—0·39	0·665	—0·529	0·126	1·3	—5·3
7	0·50	—0·98	0·671	—0·608	0·127	1·3	—6·1
8	0·64	—0·48	0·694	—0·664	0·132	1·3	—6·6
9	0·94	—0·86	0·738	—0·693	0·140	1·4	—6·9
10	1·62	—0·92	0·787	**—0·694**	0·150	1·5	—6·9
11	0·56	—0·55	**0·817**	—0·662	0·155	1·6	—6·6
12	0·63	—0·42	0·787	—0·592	0·150	1·5	—5·9
13	—0·58	—0·44	0·701	—0·484	0·133	1·3	—4·8
14	—0·88	1·41	0·513	—0·337	0·097	1·0	—3·4
15	0·84	—0·99	0·235	—0·158	0·045	0·4	—1·6
16	1·50	—1·29	—0·113	0·042	—0·021	—0·2	0·4
17	0·74	—0·69	—0·493	0·250	—0·094	—0·9	2·5
18	—1·21	1·33	—0·856	0·448	—0·163	—1·6	4·5
19	—2·86	0·95	—1·154	0·618	—0·215	—2·1	6·2
20	0·08	0·54	—1·342	0·744	—0·255	—2·5	7·4
21	—4·42	2·63	**—1·395**	0·816	—0·265	—2·6	8·2
22	0·08	1·17	—1·307	**0·827**	—0·248	—2·5	8·3
23	—1·52	—1·08	—1·095	0·779	—0·208	—2·1	7·8
24	0·18	—0·25	—0·792	0·678	—0·150	—1·5	6·8
25	—0·39	0·80	—0·436	0·536	—0·083	—0·8	5·4

Eine noch bessere Übersicht über den Verlauf der Periode erhalten wir durch die graphische Darstellung derselben. Um die Abscissen zu erhalten, müssen die Werthe d' mit dem Cosinus der Inclination multiplicirt werden. Für Pawlowsk beträgt $J = 70° 44'$ ($\cos J = 0·33$), für Jan Mayen ist $J = 79° 2'1$ ($\cos J = 0·19$). Um die Curven in entsprechendem Massstab zu erhalten, wurden die unter $d' \cos J$ und i' befindlichen Werthe bei Pawlowsk mit 40, bei Jan Mayen mit 10 multiplicirt, d. h. es wurde der Massstab für die Zeichnung so

gewählt, dass im ersten Falle $1' = 40\,cm$, im zweiten aber $1' = 10\,cm$. Diese so berechneten Coordinaten findet man unter der Überschrift x, y auf S. 733 und 734. Der Massstab entspricht bei Pawlowsk einer Entfernung der Zeichnungsfläche vom Schwerpunkte der Magnetnadel $= 1375\,m$, während er bei Jan Mayen auf ein Viertel reducirt ist und der Distanz $= 344\,m$ zukommt. Die Verschiedenheit des Massstabes beider Curven hat den Nachtheil, dass man das wirkliche Flächenverhältniss derselben nicht direct ersieht. Da ich die kleine Bewegung in Pawlowsk besser zur Anschauung bringen wollte, musste ein grösserer Massstab gewählt werden, nach welchem aber die Curve für Jan Mayen den Umfang des Formats überschritten hätte, und aus diesem Grunde eine Reduction des Massstabes erheischte. Aus dem unter $\delta' \cos J$ und i' stehenden Zahlen ist übrigens Jedermann in der Lage, die Curven in einem beliebigen Massstabe zu construiren, wenn ihn das wirkliche Flächenverhältniss interessiren sollte; ich habe durch die entworfenen Curven vornehmlich die Form derselben veranschaulichen wollen.

Die beigegebene Tafel enthält die diesen Coordinaten entsprechenden Curven. Wenn man die tägliche Bewegung der Magnetnadel an den beiden Orten graphisch darstellt, so ergeben sich Curven, welche ein gänzlich verschiedenes Aussehen haben. Während die für Pawlowsk erhaltene Curve einer Ellipse nicht unähnlich sieht, deren grössere Axe horizontal liegt, ist umgekehrt bei Jan Mayen die Curve mehr nach der Inclinationsrichtung gestreckt. Bei der 26tägigen Periode ist in der Form der beiden Curven kein wesentlicher Unterschied vorhanden, und die Formen würden vielleicht noch übereinstimmender sein, wenn ein reichhaltigeres Beobachtungsmaterial ihrer Construction zu Grunde gelegt werden könnte. Überraschend ist die vollkommen gleiche Lage der Curven gegen den mittleren magnetischen Meridian. Sieht man von dem kleinen oberen Theile der für Jan Mayen gezeichneten Curve ab, so ergibt sich auch die Richtung der Bewegung für beide Orte gleich, nämlich im Sinne des Uhrzeigers.

Die vorstehenden Darlegungen machen es höchst wahrscheinlich, dass die Bewegung der Magnetnadel wäh-

rend der 26tägigen Periode in mittleren und hohen Breiten eine vollkommen gleichartige ist.

Der ganz gleichartige Verlauf der Periode, sowie die Kleinheit ihrer Amplitude könnten die Vermuthung aufkommen lassen, dass diese periodische Änderung einem directen magnetischen Einflusse zuzuschreiben sei. In diesem Sinne äussert auch H. Wild seine diesbezügliche Ansicht in einer jüngst erschienenen Abhandlung[1] mit folgenden Worten: »Mit einem directen magnetischen Einfluss der Sonne auf die Erde lässt sich weiterhin wieder die von Braun und Hornstein ermittelte, der Dauer der Sonnenrotation entsprechende, circa 26tägige Periode der erdmagnetischen Elemente vereinen, die später mannigfache Bestätigungen erfahren hat. Dass deren Amplitude, die z. B. in Pawlowsk für die Declination nach Müller 0'52 beträgt, nach Liznar mit höherer Breite des Beobachtungsortes zunimmt, stimmt auch generell mit unserer Berechnung, doch weist auch da die relativ viel stärkere Zunahme auf weitere modificirende Umstände hin.«

Würden die im Verlauf der 26tägigen Periode auftretenden Abweichungen von der Mittellage von einer directen magnetischen Einwirkung der Sonne herrühren, so liesse sich die Grösse und Richtung der ablenkenden Kraft in sehr einfacher Weise berechnen. Die Richtung der ablenkenden Kraft, die ihren Sitz in der Sonne haben sollte, müsste dann stets nach der Sonne weisen.

Ich habe diese Berechnung für Pawlowsk durchgeführt und hiezu die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Daten verwendet. Unter D, H, V stehen die durch directe Berechnung der 26tägigen Periode erhaltenen Zahlen, aus denen die auf S. 728 mitgetheilten Differenzen abgeleitet worden sind.

Unter D_1, H_1, V_1 habe ich jene Zahlen eingetragen, welche durch eine Ausgleichung nach der Formel $\frac{w_{m-1}+w_m+w_{m+1}}{3}$ erhalten worden sind, wobei w_m den Werth eines der erdmagnetischen Elemente bedeutet, der dem m^{ten} Tage der Periode

[1] Magnetische Wirkung der Gestirne auf der Erde. Mélanges phys. et chim., tome XIII, p. 338.

Pawlowsk.

	D	H	V	D_1	H_1	V_1
0	0°41'01	1·63752	4·68639	0°40'97	1·63752	4·68615
1	40·77	743	605	40·99	757	606
2	41·20	776	605	41·08	775	599
3	41·28	805	587	41·26	796	590
4	41·31	807	579	41·30	803	583
5	41·31	799	583	41·33	803	580
6	41·37	803	577	41·34	803	577
7	41·33	810	572	41·36	811	578
8	41·39	821	585	41·33	815	577
9	41·26	815	573	41·32	816	578
10	41·32	813	576	41·32	813	581
11	41·38	810	595	41·22	801	579
12	40·97	779	565	41·12	795	576
13	41·02	797	568	41·14	788	566
14	41·43	789	566	41·31	792	571
15	41·57	791	580	41·31	786	574
16	40·93	778	577	41·09	779	583
17	40·76	769	591	40·94	780	593
18	41·13	793	611	40·93	769	592
19	40·89	746	574	41·08	775	596
20	41·21	787	604	41·05	769	593
21	41·06	774	601	40·97	778	593
22	40 63	744	573	40·89	768	587
23	40·99	785	586	40 90	776	591
24	41·08	799	613	40·96	781	600
25	40·82	760	601	40·97	770	617
	0°41'13	1·63786	4·68588	0°41'13	1·63786	4·68588

zukommt. Bezeichnet man die am Fusse der Tabelle stehenden Mittelwerthe mit D_0, H_0, V_0, jene aber, die einem beliebigen Tage der Periode entsprechen, mit D_m, H_m, V_m, so sind die drei Componenten der ablenkenden Kraft gegeben durch die Ausdrücke:

$$x = H_m \cos D_m - H_0 \cos D_0$$
$$y = H_m \sin D_m - H_0 \sin D_0$$
$$z = V_m - V_0$$

Die Componenten x und y wirken in der Ebene des Horizonts, und zwar erstere in der Meridianebene und positiv nach N, letztere senkrecht dazu und positiv nach W. Die Kraft z steht senkrecht gegen den Horizont und ist positiv, wenn sie nach abwärts wirkt. Aus den drei Componenten folgt die ablenkende Kraft $A = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Für das Azimut α und die Neigung n derselben gegen den Horizont hat man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}\,^{1}, \quad \operatorname{tg} n = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Die folgende Tabelle enthält die Werthe von x, y, z, A, α und n. Die Kraft ist in Einheiten der fünften Decimale des Mm. Mmg. Sec.-Systems ausgedrückt. Die Zählung des Azimuts erfolgt von N über W von 0°—360°; die Neigung n hat das positive Vorzeichen, wenn die Kraft unter den Horizont gerichtet ist.

Nachdem sämmtliche Zahlen für die 26tägige Periode aus den Tagesmitteln abgeleitet worden sind, also für den Mittag der einzelnen Tage gelten und ausserdem als Mittelwerthe von 24 Sonnenrotationen fast derselben Höhe der Sonne entsprechen, so müsste sich vor Allem der Werth von n stets gleich ergeben, oder er dürfte nur geringe Variationen zeigen. Das Azimut müsste den Werth 180° und 0° aufweisen. Wir sehen, dass die Daten der Tabelle diesen Forderungen nicht entsprechen und müssen daraus schliessen, dass die zur Berechnung der ablenkenden Kraft benützten Formeln auf unrichtigen Voraussetzungen basiren. Wir gelangen somit zu dem Endergebniss, dass auch die verhältnissmässig kleinen Variationen, welche die 26tägige Periode des Erdmagnetismus bilden, nicht von einer directen magnetischen Wirkung der Sonne herrühren können, sondern dass auch sie ihren Grund in einer indirecten Wirkung der Sonne haben müssen.

---

[1] In der in der meteorologischen Zeitschrift (October-Heft 1893) erschienenen Abhandlung steht infolge eines Druckfehlers $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{z}$.

Tag	x	y	z	A	α	n
0	—34	— 8	27	44	193°2	37°7
1	—29	— 7	18	35	193·6	31·1
2	—11	— 7	11	17	212·5	40·1
3	7	6	2	9	40·6	12·2
4	17	8	— 5	19	25·2	—14 9
5	17	10	— 8	21	30·5	—22·1
6	17	10	—11	23	30·5	—29·1
7	26	11	—10	30	22·9	—19 5
8	29	10	—11	33	19·0	—19·7
9	30	9	—10	33	16·7	—17·7
10	27	9	— 7	29	18·4	—13·8
11	16	4	— 9	19	14·0	—28·6
12	9	0	—12	15	0°0	—53°1
13	2	0	—22	22	0·0	—84·8
14	6	9	—17	20	56·3	—57·5
15	0	9	—14	17	90·0	—57·3
16	— 7	— 2	— 5	9	195·9	—34·5
17	— 6	— 9	5	12	236 3	24·8
18	—17	—10	4	20	210·5	11·5
19	—11	— 3	8	14	195·3	35·0
20	—17	— 4	5	15	193·2	16·0
21	—18	— 8	5	20	204·0	14·2
22	—18	—12	— 1	22	213·7	— 2·6
23	—10	—11	3	15	227·7	11·4
24	— 4	— 8	12	15	243·4	53·5
25	—16	— 8	29	34	206·6	62·9

Wenn man einmal das Wesen dieser indirecten Einwirkung erkannt haben wird, dürfte die Erklärung der bisher so räthselhaften Änderungen kaum grössere Schwierigkeiten darbieten. Da nach den bisherigen Untersuchungen die so ausgesprochen von der Sonne abhängigen Variationen eine directe magnetische Wirkung derselben nicht erkennen lassen, so dürfte es schon aus diesem Grunde schwer fallen, jene kleinen Variationen, welche Leyst für die verschiedene Stellung der Planeten zur Erde aus den Pawlowsker Beobachtungen abgeleitet hat,[1]

[1] Über den Magnetismus der Planeten. Repert. f. Met., XVII. Mir ist diese Arbeit noch nicht zugänglich gewesen, ich habe von ihr Kenntniss erhalten durch die oben angeführte Abhandlung von H. Wild.

auf eine magnetische Wirkung dieser Planeten zurückzuführen. Zu dieser Folgerung gelangt auch Wild in seiner früher citirten Abhandlung, und zwar auf einem ganz anderen Wege, als es der ist, den ich hier eingeschlagen habe. Die in früherer Zeit so häufig gehegte Vermuthung, dass die Sonne und möglicherweise auch die Planeten directe magnetische Wirkungen ausüben könnten, hat demnach keine Berechtigung.

Die Erkenntniss, dass alle beobachteten Variationen des Erdmagnetismus auf eine indirecte Wirkung zurückgeführt werden müssen, lässt es umso wünschenswerther erscheinen, dass auch über etwaige Verschiedenheiten der Variationen mit der Entfernung von der Erdoberfläche sorgfältige Beobachtungen angestellt werden. In dieser Beziehung ist noch fast gar nichts geschehen; denn, soviel mir bekannt, existiren aus grösseren Höhen nur die Variationsbeobachtungen der Declination vom Säntis, welche von Dr. F. Maurer und theilweise von Beyer im Herbst und Winter 1884 ausgeführt worden sind.[1] Aber selbst dieses spärliche Beobachtungsmaterial scheint auf eine nicht unbedeutende Verschiedenheit der Variationen in der Höhe gegen jene der Tiefe hinzudeuten. Ein Vergleich der gleichzeitigen Daten vom Säntis und von Wien ergibt für die Höhenstation eine um 0'5 grössere Amplitude, und zwar sowohl im November, als auch im December. Dieser Unterschied würde sich aber höchst wahrscheinlich für die Sommermonate noch grösser ergeben haben.

Um ein richtiges Bild der Variationen in der Höhe zu bekommen, genügt es aber durchaus nicht, nur etwa die Declinationsvariationen zu beobachten, es müssten vielmehr die drei Elemente: Declination, Horizontal- und Verticalintensität wenigstens durch ein volles Jahr regelmässig aufgezeichnet werden. Am einfachsten liesse sich das erforderliche Beobachtungsmaterial durch einen Magnetographen beschaffen, dessen Bedienung mit keinen besonderen Schwierigkeiten verbunden ist und der auch ohne Controle durch absolute Messungen ein zur Ableitung der täglichen Periode geeignetes Material liefern

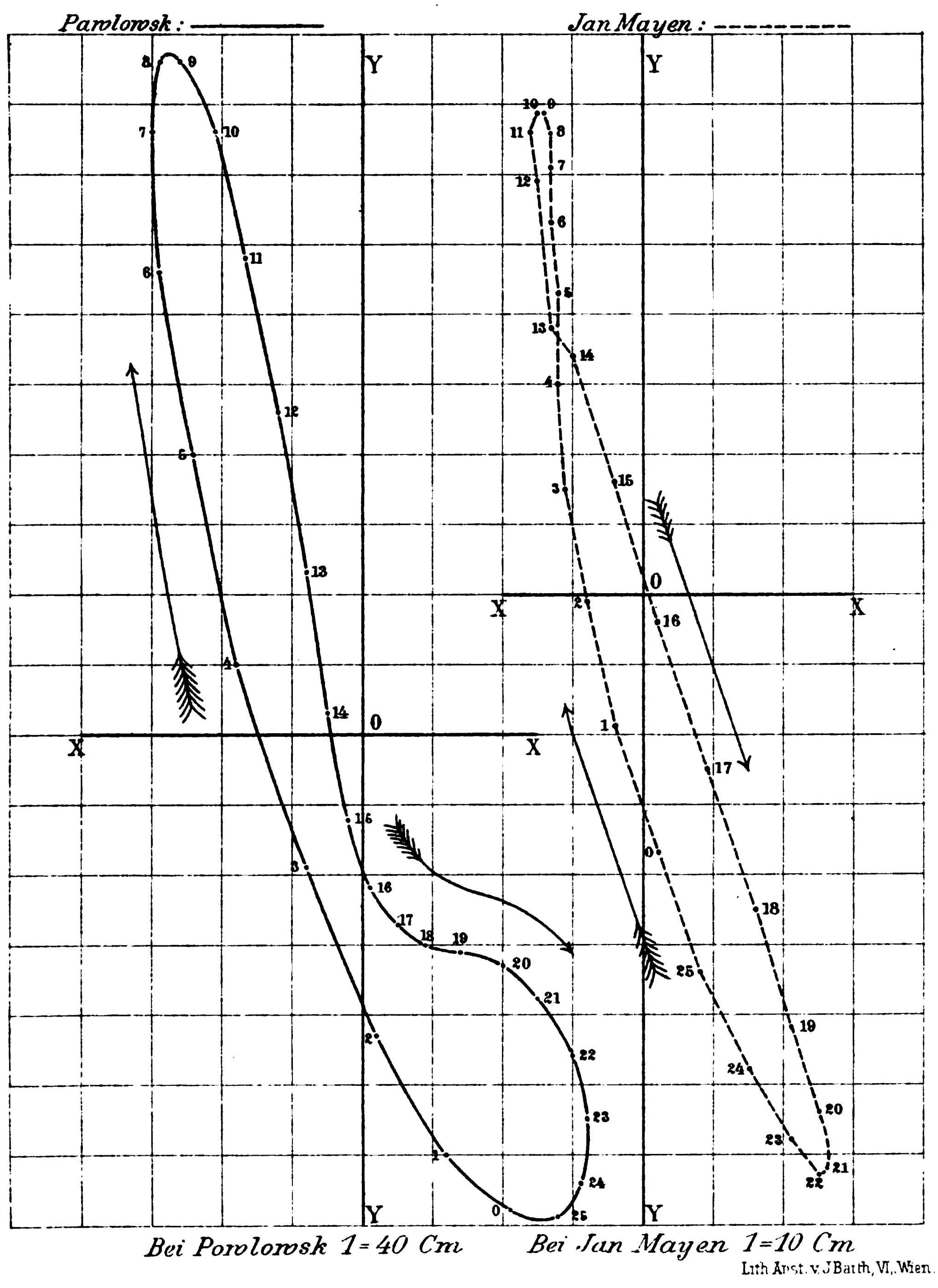
[1] Maurer, Einfluss der Höhe auf die täglichen Variationen der magnetischen Declination. Met. Zeitschr., XX, S. 180.

würde. Da meteorologische Observatorien auf Berggipfeln ohnehin bestehen, so kann es sich bei der hier angeregten Frage nur um jene Geldsummen handeln, welche zur Herstellung eines geeigneten Locales zur Unterbringung des Magnetographen und zur Anschaffung des letzteren nöthig sind.

Zur Aufstellung eines Magnetographen scheint mir unser höchstes Bergobservatorium am Sonnblick, dem die meteorologische Wissenschaft so manche Bereicherung verdankt, sehr geeignet zu sein, und es würde sich sehr empfehlen, an diesem Observatorium den ersten derartigen Versuch zu unternehmen. Es ist kaum zweifelhaft, dass, wenn sich hier eine Verschiedenheit der Bewegung der Magnetnadel ergeben sollte, dann auch andere Bergobservatorien dem Beispiele mit Eifer nachfolgen werden, und dass wir dann in nicht sehr langer Zeit ein hinreichendes Material besitzen werden, um uns über die Verschiedenheiten der Variationen ein richtiges Bild verschaffen zu können, während wir heute auf blosse Vermuthungen angewiesen sind, die selbstverständlich nie einer Erklärung der Variationen zur Grundlage dienen können.

Der Umstand, dass sich zur Erhaltung des Observatoriums am Sonnblick ein eigener Verein gebildet hat, der »Sonnblick-Verein«, lässt mich hoffen, dass die von mir gegebene Anregung auch bei diesem Vereine eine entsprechende Würdigung finden werde.

J. Liznar: 26 tägige Periode des Erdmagnetismus



Lith Anst. v. J Barth, VI., Wien.

Akustische Untersuchungen über die Elasticität weicher Körper

von

M. v. Smoluchowski.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1894.)

I.

Weiche Körper, z. B. Wachs, Paraffin, Kautschuk etc. sind für die Elasticitätstheorie hauptsächlich in zweifacher Hinsicht von Interesse. Erstens nimmt der Elasticitätsmodul derselben mit steigender Temperatur in unverhältnissmässig stärkerem Masse ab, als dies bei anderen Körpern, z. B. Metallen, der Fall ist; zweitens finden sich bei ihnen die grössten Werthe der Elasticitätszahl μ (Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation).

Bezüglich des ersten Punktes liegt bisher nur eine Beobachtung von Stefan[1] vor, welcher, anlässlich einer Untersuchung über die Schallgeschwindigkeit in Stäben von Wachs und Unschlitt, die er nach der im Folgenden beschriebenen Methode ausführte, die grosse Veränderlichkeit derselben — also auch des Elasticitätsmoduls — bemerkte.

Für Wachs ergeben seine Versuche:

Temperatur $\theta = 17°$,		Schallgeschwindigkeit $c' = 880\,m$,	
»	25	»	630
»	28	»	451

[1] Diese Sitzungsberichte, LVII, 1868.

Für Unschlitt machte er keine näheren Angaben.

Demnach würde sich bei Erhöhung der Temperatur von 17° auf 28° die Schallgeschwindigkeit $\left[= \sqrt{\frac{E}{\rho}}\right]$ fast auf die Hälfte, also der Elasticitätsmodul fast auf ein Viertel verringern, während bei den meisten Metallen die Abnahme des letzteren zwischen 0° und 100° nur circa 2—4% beträgt. Somit scheint hier wegen der Grösse der in Betracht kommenden Änderungen Aussicht vorhanden, jene Erscheinung genauer studiren zu können, als bei den Metallen und eher eine Beziehung zu den übrigen Eigenschaften der Körper finden zu können.

In dieser Hinsicht ist namentlich der Zusammenhang mit der Wärmeausdehnung bemerkenswerth; stellt man den Elasticitätsmodul als eine lineare Function der Temperatur dar

$$E = E_0[1-\gamma t], \tag{1}$$

so erweist sich nämlich — nach den Beobachtungen von Katzenelsohn[1] und Miller[2] — die Reihenfolge der Metalle nach γ als identisch mit derjenigen nach den Werthen des Wärmeausdehnungs-Coëfficienten und verkehrt jener der Schmelzpunkte. Auch die eben besprochene Beobachtung bezüglich des Wachses stimmt damit überein, da ja auch der Ausdehnungscoëfficient desselben bei mittlerer Temperatur circa 50—100mal grösser ist als jener Metalle. Dieser Punkt musste also bei einer Untersuchung der Elasticität solcher Stoffe besonders berücksichtigt werden.

Der zweite Punkt, die Grösse der Elasticitätszahl μ, ist namentlich im Hinblicke auf die Theorien der Elasticität von Interesse. Bekanntlich fordert die Poisson'sche Moleculartheorie, dass $\mu = 0 \cdot 25$ sei; dies ist durch zahlreiche Versuche wohl genügend widerlegt worden, so z. B. schon durch die Untersuchungen von Wertheim. Dieser zog aber aus denselben den Schluss, dass $\mu = \frac{1}{3}$ sei; in der That sind seine Zahlen für Messing, Eisen, Glas u. A. nicht weit von diesem Werthe

[1] Berl. In.-Diss., 1887, Winkelmann, Handb. I. S. 242.

[2] Münch. Ber., 1886, S. 707.

entfernt. Durch neuere genaue Beobachtungen scheint auch diese Hypothese, welche übrigens auch durch keine theoretischen Erwägungen gestützt wird, widerlegt zu sein; so fand z. B. Voigt für Glas 0·208—0·213, Kirchhoff für Stahl 0·293 bis 0·295; nach Katzenelsohn wären einige Zahlen noch kleiner, z. B. Aluminium 0·13, Platin 0·16, Gold 0·17.

Die grössten Abweichungen[1] aber, im entgegengesetzten Sinne, scheinen eben bei solchen weichen Körpern vorzukommen, allerdings sind die Angaben hierüber ziemlich schwankend, z. B. Kautschuk: Röntgen 0·37—0·64, Pulfrich 0·458; Amagat 0·500, Gallerte aus Leim 0·500 (Maurer), Ebonit 0·389 (Mallock), Paraffin 0·50 (Mallock). Auch hierüber waren also weitere Versuche wünschenswerth, umsomehr als, wie weiter unten erwähnt werden wird, diese letzteren Bestimmungen nicht ganz einwandfrei sind. Um nun zur Aufklärung dieser beiden Punkte beizutragen, unternahm ich die Versuche, welche im Folgenden beschrieben sind.

II.

Die Methoden zur Bestimmung der Elasticitätsmoduln sind entweder statische oder dynamische. Für weiche Körper ist die Anwendung der statischen nicht empfehlenswerth, denn gerade bei ihnen ist die elastische Nachwirkung sehr gross, so dass sich je nach der Dauer der Einwirkung sehr verschiedene Moduln ergeben würden; zudem ist der Bereich der elastischen Vollkommenheit so klein, dass es kaum möglich sein dürfte, denselben bei statischen Messungen nicht zu überschreiten. Namentlich bei höherer Temperatur beginnen diese Körper schon unter Einwirkung der Schwerkraft langsam continuirlich zu fliessen, was dann eine directe Bestimmung des E ganz fehlerhaft machen würde, für das μ aber den Werth 0·5 wie bei Flüssigkeiten ergeben müsste.

Dies ist auch der Einwand, welchen die Anhänger der Poisson'schen Theorie gegen die früher erwähnten Mes-

---

[1] Nur bei manchen Legirungen kommen auch so grosse Werthe vor, z. B. Messing 0·42 (Katzenelsohn). (Siehe auch den auf S. 15 angeführten Versuch). Vielleicht theilweise auf Äolotropie zurückzuführen.

sungen, welche auf statischen Methoden beruhen, erheben können.

Demgemäss sind hier die akustischen Methoden am Platze, welche die Schallgeschwindigkeit und hieraus den von der Nachwirkung unabhängigen Modul ergeben; allerdings ist dies nicht der isotherme, sondern der adiabatische Modul, doch ist nach den bisherigen Versuchen der Unterschied beider bei festen Körpern nur gering, und werden sich die Zahlen sehr angenähert auch auf jenen anwenden lassen.

Zur Messung der Schallgeschwindigkeiten stehen uns nur zwei Methoden zu Gebote: die Stefan'sche (l. c.) und jene von Warburg.[1] Erstere bildet eine Erweiterung des von Chladni eingeführten Verfahrens, nach welchem aus der Tonhöhe eines longitudinal schwingenden Stabes die Schallgeschwindigkeit berechnet wird; da nämlich Stäbe aus den besprochenen Materialien durch Reiben nicht zum Tönen gebracht werden können, befestigte Stefan ein Stück eines solchen an einen Holz- oder Glasstab; dies System gab einen Longitudinalton, der von den Schallgeschwindigkeiten beider Stücke abhängt und daher die Berechnung einer derselben ermöglicht, wenn die andere gegeben ist.

Warburg hingegen beobachtete die durch aufgestreuten Sand sichtbar gemachten Knoten bei einem auf einen Glasstreifen in der Mitte aufgesetzten, zusammen mit diesem transversal schwingenden Wachsstreifen; dann gilt die Gleichung

$$\frac{c}{c'} = \frac{l^2}{l'^2} \frac{h'}{h},$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit, l die Abstände der Knoten, h die Dicke des einen Streifens und die gestrichenen Buchstaben die analogen Grössen für den anderen bedeuten.

Obwohl letztere Methode insoweit bequemer ist, als sie bloss Längenmessungen erfordert, zog ich hier die Stefan'sche vor, da diese sich, wie weiter unten erläutert wird, sofort auch auf Torsionsschwingungen anwenden lässt; dies gestattet dann die Berechnung der Geschwindigkeit der Torsionswellen, somit

[1] Pogg. Ann., CXXXVI.

auch des Torsionsmoduls T, woraus sich dann auch die zweite gewünschte Grösse μ ergibt:

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{E}{T} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_L}{c_T}\right)^2 - 1. \tag{2}$$

Offenbar hat diese Art der Bestimmung des μ auch den Vortheil, dass die Versuche zur Messung des E und des T an demselben Stück und unter denselben Bedingungen stattfinden was namentlich in Bezug auf die Constanterhaltung der Temperatur von Wichtigkeit ist. Diese Vortheile theilt sie mit der analogen Methode der Bestimmung des μ aus Longitudinal- und Torsionston bei homogenen Glas- und Metallstäben, welche namentlich von Wertheim und Schneebeli angewendet wurde; ihr Nachtheil ist allen E und T benützenden Methoden gemeinsam: die Berechnung des μ als Differenz zweier Zahlen — wodurch die Genauigkeit verringert wird; dazu kommt noch, dass schon c_L und c_T aus der Abweichung des Tones des Systems von jenem des einen Stabes für sich, also aus einer ziemlich kleinen Grösse, bestimmt wird. Ob nun die Messung von c_L und c_T sich mit solcher Genauigkeit erzielen lässt, dass eine Berechnung des μ möglich ist, konnten nur genaue Versuche entscheiden.

III.

Zur Erläuterung der Theorie der Longitudinalschwingungen von Stäben, die aus zwei Stücken bestehen, möge kurz Folgendes erwähnt werden.

Die Fortpflanzung fortschreitender longitudinaler Wellen in einem aus zwei verschiedenartigen Stücken bestehenden, unendlich langen Stab lässt sich leicht analytisch darstellen, da man sofort die D'Alembert'sche Form der Lösung der Differentialgleichungen für die beiden Stücke anwenden kann. Bedeutet u die Verschiebung, c die Geschwindigkeit in dem von $-\infty$ bis 0 reichendem Stücke, die gestrichenen Buchstaben die analogen Grössen im anderen Stücke, so lauten die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = c'^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \tag{3}$$

wobei

$$c^2 = \frac{E}{\rho}, \qquad c'^2 = \frac{E'}{\rho'}.$$

Diese werden durch die Lösungen

$$\begin{aligned} u &= f(x+ct) + \varphi(x-ct) \quad \text{für } -\infty < x < 0 \\ u' &= g(x+c't) + \chi(x-c't) \quad \text{für } 0 < x < +\infty \end{aligned} \tag{4}$$

befriedigt, wobei die willkürlichen Functionen f und φ für negative Argumente, g und χ für positive, durch Einführung der Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$\begin{array}{ll|ll} x < 0 & u = U(x) & x > 0 & u' = U'(x) \\ & \dfrac{\partial u}{\partial t} = V(x) & & \dfrac{\partial u'}{\partial t} = V'(x) \end{array} \tag{5}$$

in folgender Weise bestimmt werden:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{U(x)}{2} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int V(x)\,dx \\ \varphi(x) = \dfrac{U(x)}{2} - \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int V(x)\,dx \end{array}\right\} \text{ für } x < 0, \\ \left.\begin{array}{l} g(x) = \dfrac{U'(x)}{2} + \dfrac{1}{2c'}\displaystyle\int V'(x)\,dx \\ \chi(x) = \dfrac{U'(x)}{2} - \dfrac{1}{2c'}\displaystyle\int V'(x)\,dx \end{array}\right\} \text{ für } x > 0. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Die Werthe der Functionen für andere Werthe des Arguments ergeben sich aus den Bedingungen, welche aus dem Principe der Continuität der Verschiebungen und Spannungen folgen:

für die Trennungsstelle $x = 0$: $u = u'$

$$[q = \text{Querschnitt}] \qquad Eq\frac{\partial u}{\partial x} = E'q'\frac{\partial u'}{\partial x}. \tag{7}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (4) in diese Gleichungen und Integration erhält man

$$
\begin{aligned}
f(ct) &= \frac{2E'q'c}{Eqc'+E'q'c}\,g(c't) + \frac{Eqc'-E'q'c}{Eqc'+E'q'c}\,\varphi(-ct) \\
\chi(-c't) &= \frac{E'q'c-Eqc'}{Eqc'+E'q'c}\,g(c't) + \frac{2Eqc'}{Eqc'+E'q'c}\,\varphi(-ct)
\end{aligned} \tag{8}
$$

Die Bedeutung dieser Formeln sieht man leicht in dem Falle, dass zur Zeit $t = 0$ der ganze Stab in Ruhe und in der Ruhelage sei, mit Ausnahme des Punktes $-b$, welcher eine Elongation U habe.

Die Durchführung der Rechnung zeigt dann, dass diese Verrückung zwei Wellen mit der Elongation $\frac{U}{2}$ erzeugt, von denen die eine in der Richtung $-\infty$ sich bewegt, während die andere gleich grosse bis zur Trennungsstelle geht und sich hier in eine gebrochene Welle von der Grösse

$$
\frac{Eqc'}{Eqc'+E'qc'}, \tag{9}
$$

welche in der Richtung der $+\infty$ mit der Geschwindigkeit c weiterbewegt und in eine reflectirte spaltet, welche mit der Amplitude

$$
\frac{1}{2}\,\frac{Eqc'-E'q'c}{Eqc'+E'q'c} \tag{10}
$$

nach $-\infty$ zurückkehrt.

Complicirter wird die Erscheinung, wenn der zusammengesetzte Körper eine endliche Ausdehnung von 0 bis λ und von hier bis $\lambda+\lambda'$ hat; man kann diesen Umstand durch die Annahme ersetzen, dass er an beiden Enden wieder an Stäbe mit unendlich kleinen q (oder E oder ρ) anstösst; dann werden an diesen nach (10) totale (positive) Reflexionen stattfinden, an der Trennungsstelle spalten sich wieder die Wellen u. s. w., es entsteht im Allgemeinen eine immer wachsende Zahl von Einzelwellen.

Zur Kenntniss der Schwingungszahl des Grundtons der so erzeugten stehenden Schwingungen gelangen wir jedoch auf diese Weise nicht. Diese ergibt sich am einfachsten aus der Betrachtung der particulären Lösungen (deren unendliche An-

zahl die allgemeine Lösung gibt), wie sie von Stefan[1] durchgeführt wurde.

Den Differentialgleichungen (3) und den Bedingungen für die freien Enden genügen die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} u &= A \cos \alpha t \cos \beta x \\ u' &= A' \cos \alpha' t \cos \beta' [\lambda + \lambda' - x], \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

wobei

$$\alpha^2 = c^2 \beta^2 = \frac{E}{\rho} \beta^2$$

$$\alpha'^2 = c'^2 \beta'^2 = \frac{E'}{\rho'} \beta'^2.$$

Aus dem Principe der Continuität der Verschiebungen und Spannungen[2] folgen für die Trennungsstelle $x = \lambda$ die Gleichungen (7). Diese erfordern

---

[1] Diese Sitzungsber., LV, 1867, LVII, 1868.

[2] Es ist bemerkenswerth, dass sich die zweite der Gleichungen (7), welche ausspricht, dass an der Trennungsstelle die Druckkräfte beiderseits gleich sein müssen, auch durch die Forderung, die bei unserem Stabe selbstverständlich erfüllt sein muss, dass nämlich der Schwerpunkt an derselben Stelle bleibe, ersetzen lässt. Es muss dann die Summe der Massen $\times$ Geschwindigkeiten $= 0$ sein, also

$$\int_0^{\lambda} q\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{\lambda}^{\lambda+\lambda'} q'\rho' \frac{\partial u'}{\partial t} dx = 0;$$

werden darin die Werthe aus (11) eingesetzt, so ist

$$\rho q A \alpha \sin \alpha t \int_0^{\lambda} \cos \beta x dx + \rho' q' A' \alpha' \sin \alpha' t \int_{\lambda}^{\lambda+\lambda'} \cos \beta'(\lambda+\lambda'-x) dx = 0;$$

da diese Gleichung von der Zeit unabhängig ist, muss $\alpha = \alpha'$ sein; durch Ausführung der Integrationen folgt dann

$$\rho q A \frac{\sin \beta \lambda}{\beta} + \rho' q' A' \frac{\sin \beta' \lambda'}{\beta'} = 0.$$

Mit Hilfe der aus der ersten Bedingung (7) folgenden zweiten der Gleichungen (12) erhält man dann direct die Formel (14).

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha' \\ A\cos\beta\lambda &= A'\cos\beta'\lambda' \\ Eq\beta A\sin\beta\lambda &= -E'q'\beta'A'\sin\beta'\lambda' \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

und daraus folgt durch Elimination von A die Gleichung

$$Eq\beta\sin\beta\lambda\cos\beta'\lambda' + E'q'\beta'\cos\beta\lambda\sin\beta'\lambda' = 0,$$

welche im Allgemeinen auch durch

$$qE\beta\,\mathrm{tg}\,\beta\lambda + q'E'\beta'\,\mathrm{tg}\,\beta'\lambda' = 0 \quad (13)$$

ersetzt werden kann.

Durch einige Transformationen erhält man, wenn statt $q\lambda\rho$ und $q'\lambda'\rho'$ die Gewichte p, p' gesetzt werden:

$$p\frac{\mathrm{tg}\,\beta\lambda}{\beta\lambda} + p'\frac{\mathrm{tg}\,\beta'\lambda'}{\beta'\lambda'} = 0. \quad (14)$$

Behufs Berechnung der Geschwindigkeit kann man diese Formel noch umgestalten, indem man die dem Tone des Systems entsprechende Monochord-Saitenlänge l und die dem Tone des Stabes λ allein (wenn es ohne das zweite Stück schwingt) entsprechende l_0 einführt.

Stimmt die Saitenlänge L mit einer Stimmgabel, die N Schwingungen in der Secunde macht, überein, so hat man schliesslich die Formel für die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwellen

$$c'_L = 2\pi NL\frac{\lambda'}{lz}, \quad (15)$$

wobei die Hilfsgrösse z ($= \beta'\lambda'$) aus der Gleichung

$$\frac{\mathrm{tg}\,z}{z} = -\frac{p}{p'}\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} \quad (16)$$

bestimmt werden muss.

Zur numerischen Ausrechnung des z ist es am bequemsten, sich für $\frac{\mathrm{tg}\,z}{z}$ eine Tafel von halben zu halben Graden zu entwerfen und dann dazwischen zu interpoliren.

Die Lage der Knotenpunkte der Schwingung erhält man nach Formel (11) durch Nullsetzen von $\cos \beta x$ und $\cos \beta'(\lambda + \lambda - x)$; im ersten Stücke sind ihre Abstände vom Nullpunkt

$$x_k = \frac{\pi}{2\beta}, \frac{3\pi}{2\beta} \ldots = \frac{l_0}{l}\frac{1}{2\lambda}, \frac{l_0}{l}\cdot\frac{3}{2\lambda} \ldots, \tag{17}$$

im zweiten Stücke die Abstände vom anderen Ende des zusammengesetzten Stabes

$$x'_k = \frac{\pi}{2\beta'}, \frac{3\pi}{2\beta'} \ldots = \frac{c'}{c} x_k. \tag{18}$$

Eine anschauliche Vorstellung von dem Zusammenhange zwischen c' und der Tonhöhe gewinnt man mittelst einer graphischen Methode.

Werden z. B. wie auf Fig. 1 die Curven $y = \operatorname{tg} x$ gezeichnet, und schneidet man diese durch eine Gerade

$$y = -\frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}},$$

so geben die Abscissen der Schnittpunkte die Werthe von z, welche, in Formel (15) eingesetzt, die Wurzeln der Geschwindigkeiten bestimmen, welche dem durch die Neigung der Geraden definirten Tone entsprechen. Der Schnittpunkt mit der durch 0 hindurchgehenden Tangentencurve gibt den kleinsten Werth von z, also die grösste Geschwindigkeit, welche bei der betreffenden Tonhöhe noch möglich ist; diese entspricht also dem Grundton des Stabes.

Dieselbe Tonhöhe kann auch durch eine geringere Geschwindigkeit erzeugt werden, wenn sie nämlich dem ersten Obertone eines Systemes entspricht; diese Geschwindigkeit ist dann gegeben durch den Schnittpunkt mit der zweiten Tangentencurve. Analog für die höheren Obertöne.

Wenn wir nun — bei constantem λ' und p' — die Geschwindigkeit c' und dementsprechend die Tonhöhe ändern, ergibt sich Folgendes.

Der höchste Werth, welchen der Grundton erreichen kann, also die geringste Neigung der Geraden, entspricht der Lösung $z = 0$, somit $c' = \infty$; da diese Neigung der Geraden gleich ist der Tangente im 0-Punkte, so hat man mithin

$$1 = -\frac{p}{p'} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} \tag{19}$$

zur Bestimmung des Tones, welchen das System in dem Falle gibt, wenn die Schallgeschwindigkeit in dem angesetzten Stücke unendlich ist; weil $\operatorname{tg}\frac{\pi l_0}{l} < 0$, also $l > l_0$, so ist dieser immer tiefer als jener, welchen der Stab ohne das angefügte Stück schwingt. (Die übrigen Wurzeln der Gleichung entsprechen den Obertönen.) Für jede endliche Geschwindigkeit ist der Ton aber noch tiefer, denn ein je kleineres c', also grösseres z man erhalten will, desto grösser muss man die Neigung der Geraden machen.

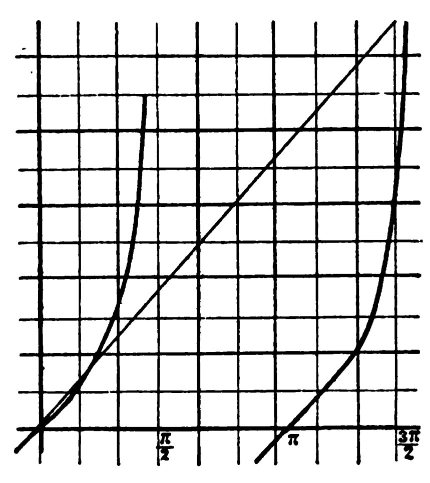


Fig. 1.

(Wenn $z > \frac{\pi}{2}$, also $c' < \frac{4NL\lambda'}{l}$ wird, so muss die Gerade entgegen dem Sinne des Uhrzeigers noch weiter gedreht werden, so dass sie die zweite Tangentenlinie, welche nun dem tiefsten Tone entspricht, schneidet u. s. w.)

Ähnliche Überlegungen gelten für die Obertöne; diese sind im Allgemeinen unharmonisch.

Um die günstigsten Versuchsbedingungen zu finden, muss man sich über den Einfluss von p' und λ', die man ja beliebig variiren kann, klar werden. Dazu dient die Figur 2. Hier sind

(immer bei constantem p und λ) für einige bestimmte Verhältnisse der Gewichte und Längen des angesetzten Stückes die Curven gezeichnet, welche die Abhängigkeit der berechneten

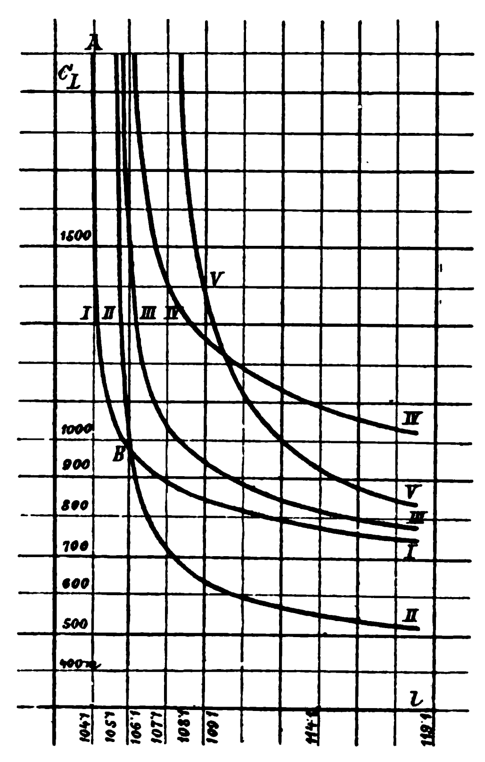


Fig. 2.

Geschwindigkeit c'_L (Ordinate) von der zugehörigen Länge der Monochordsaite (Abscisse) darstellen.

Für	ist $p' =$	$\lambda' =$
I	$8 \cdot 92\,g$,	$120\,mm$
II	$17 \cdot 83$	80
III	$17 \cdot 83$	120
IV	$17 \cdot 83$	160
V	$35 \cdot 66$	120

Dabei ist

$$p = 765 \cdot 5\,g, \quad \lambda = 1495 \cdot 5, \quad l_0 = 104 \cdot 1, \quad L = 417, \quad N = 435.$$

Daraus ergibt sich Folgendes:

Der Einfluss, welchen ein Fehler der Tonbestimmung auf die Zahl für die Geschwindigkeit hat, ist desto grösser, je grösser die Neigung der Curve in dem betreffenden Punkte ist; solange also z. B. der Punkt auf dem Stücke zwischen A und B der Linie liegt, wird die Messung sehr ungenau werden, dagegen ist in einiger Entfernung rechts von B eine ziemliche Genauigkeit erreichbar; man wird also trachten, die Dimensionen der Stäbe so zu wählen, dass die durch die Töne bestimmten Punkte auf diesen Theilen der Curven liegen.

Die Genauigkeit bei einer gegebenen Geschwindigkeit, z. B. 1000 *m*, ist durch die Neigung der Curven in den Punkten bestimmt, wo sie durch eine in der betreffenden Höhe gezogene Horizontale geschnitten werden. Aus dem Vergleiche von I, III, V ersieht man, dass es vortheilhaft ist, grössere Gewichte der zu messenden Stücke zu verwenden, aus dem Vergleiche von II, III und IV aber, dass insbesondere die Länge möglichst gross zu machen ist. Wie später ausgeführt werden wird, erfordert dies, damit überhaupt eine Tonerzeugung möglich werde, eine Vermehrung des Gewichtes. Anderseits aber ist bei grossen Tonvertiefungen, wie sich zeigte, der Klang merklich unreiner, so dass eine mittlere Lage die beste sein dürfte.

Die Gleichungen für die Torsionstöne ergeben sich nun aus dem Vorstehenden ganz leicht; die Differentialgleichung für drehende Schwingungen

(δ = Winkelverschiebung)

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} = \frac{E}{2(\mu+1)\rho}\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} \tag{20}$$

ist vollständig der Gleichung (3) analog, und die Gleichungen (7) sind durch die ähnlichen

$$\delta = \delta'$$

$$D\frac{\partial\delta}{\partial x} = D'\frac{\partial\delta'}{\partial x}$$

zu ersetzen, welche aussprechen, dass die Drehungswinkel δ und die Drehungsmomente D an der Trennungsstelle continuirlich in einander übergehen.

D haben wir gleichzusetzen

$$=\frac{E\theta}{2(\mu+1)}=T\theta,$$

wobei θ das Trägheitsmoment des Querschnittes mit der Flächendichte 1 bedeutet.

Mithin gelten auch für diesen Fall die früher abgeleiteten Formeln, wenn man E durch T und q durch θ ersetzt. Gleichung (14) wird demnach

$$\theta\lambda\rho\frac{\operatorname{tg}\beta\lambda}{\beta\lambda}+\theta'\lambda'\rho'\frac{\operatorname{tg}\beta'\lambda'}{\beta'\lambda'}=0.$$

Ist der Stab ein Hohlcylinder, also der Querschnitt ein Kreisring mit den Radien R, r, so ist

$$\theta=\frac{\pi}{2}(R^4-r^4)=\frac{\pi}{2}(R^2-r^2)(R^2+r^2); \tag{21}$$

wenn man wieder $(R^2-r^2)\pi\lambda\rho$ gleich dem Gewichte p setzt, so hat man endlich

$$p(R^2+r^2)\frac{\operatorname{tg}\beta\lambda}{\beta\lambda}+p'(R^{2\prime}+r^{2\prime})\frac{\operatorname{tg}\beta'\lambda'}{\beta'\lambda'}=0. \tag{22}$$

zur Bestimmung der Tonhöhe; die zur Berechnung der Geschwindigkeit der Torsionswellen geeignetste Formel ist analog (15) und (16)

$$c'_T=2\pi NL\frac{\lambda'}{l_T z_T}, \tag{23}$$

wobei das z_T aus der Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg} z_T}{z_T}=\frac{p(R^2+r^2)}{p'(R'^2+r'^2)}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi l_{0T}}{l_T}}{\frac{\pi l_{0T}}{l_T}}, \tag{24}$$

zu berechnen ist.[1]

---

[1] Hiebei ist also die Kenntniss von R und r nöthig; $2R$ wurde mit einem Dickenmesser bestimmt, r meistens aus dem Gewichte, dem specifischen Gewichte und dem R berechnet.

Kennt man c'_L und c'_T, so folgt daraus

$$E = \rho c'^2_L; \qquad T = \rho c'^2_T = 2(\mu + 1)E;$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{T}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_L}{c_T}\right)^2 - 1.$$

Da Torsionsschwingungen zusammengesetzter Stäbe noch nicht untersucht waren, so war eine experimentelle Bestätigung der Formeln wünschenswerth. Als solche will ich die Resultate eines Versuches anführen, wobei eine Messingröhre, mit den Rändern etwas übergreifend, an eine Glasröhre angesiegelt wurde.

Es waren

$$\begin{aligned} \lambda' &= 305\ mm \\ p' &= 150\ g \\ l_L &= 126 \cdot 6\ mm \\ l_T &= 218 \cdot 6\ \text{»} \\ R &= 14 \cdot 45\ mm \\ r &= 13 \cdot 79\ mm. \end{aligned}$$

(Die hiebei verwendete Glasröhre ist die auf S. 25 als B bezeichnete, daselbst sind auch N und L angeführt.)

Aus diesen Daten wurde berechnet

$$c'_L = 3144\ m, \quad c'_T = 1872\ m, \quad \mu = 0 \cdot 411,$$

während die directe Bestimmung aus Longitudinal- und Transversalton eines längeren Stückes derselben Messingröhre

$$c_L = 3180\ m, \quad c_T = 1881\ m, \quad \mu = 0 \cdot 429$$

ergab, was in Anbetracht dessen, dass gemäss dem früher Gesagten die Genauigkeit bei so grossen Geschwindigkeiten überhaupt geringer ist, als genügende Übereinstimmung angesehen werden kann.

IV.

Stefan hatte bei seinen Versuchen als tonerregenden Theil fast ausschliesslich Holzstäbe benützt. Für longitudinale Töne sind diese auch ganz gut anwendbar, nicht aber für Torsionstöne.

Infolge der verschiedenen Elasticität in der Richtung senkrecht und parallel zu den Faserflächen, sowie infolge der Inhomogeneität des Materials gibt ein solcher Stab je nach der Art des Anreibens ganz verschiedene Torsionstöne. (Bei einem Versuche gab ein 995 *mm* langer Stab aus weichem Holz einen Longitudinalton von 2669 Schwingungen und Torsionstöne, welche zwischen 709 und 762 schwankten, was für die Schallgeschwindigkeit der Longitudinalwellen $c_L = 5310\,m$ und für die Torsionswellen $c_T = 1410—1517\,m$ ergibt.) Am besten entsprach der Anforderung auf Reinheit und Gleichmässigkeit der Töne eine ziemlich dickwandige Glasröhre, welche daher bei den im Folgenden angeführten Versuchen ausschliesslich benützt wurde.

Auch der zu untersuchende Körper wurde in Röhrenform gegossen, einerseits weil die Theorie voraussetzt, dass die Kräfte auf den ganzen Querschnitt vertheilt sind, während sie, falls man an die Glasröhre ein massives Stück anfügt, bloss an der Mantelfläche des letzteren angreifen würden, anderseits weil in einem röhrenförmigen Stücke sich viel rascher eine gleichförmige Temperatur herstellen lässt, als in einem massiven, was in Anbetracht des schlechten Wärmeleitungsvermögens solcher Körper sehr wichtig ist.

Die Befestigung des Stückes geschah auf die Weise, dass die Glasröhre bis über die Schmelztemperatur des Materiales erwärmt und dann das Stück darangefügt wurde; beim Erkalten hielt es infolge der Adhäsion meist genügend fest.

Der Ton wurde durch Reiben des Glases mittelst eines weichen, mit Wasser gut durchfeuchteten, mit Flanell überzogenen Filzlappens erregt.

Das Hauptaugenmerk musste bei den Versuchen auf die Constanterhaltung auf einer beliebigen Temperatur gerichtet werden.

Stefan hatte einfach den Stab längere Zeit an einem Orte von wenig veränderlicher Temperatur neben einem Thermometer gelassen, bevor der Ton bestimmt wurde; um grössere Temperaturunterschiede zu ermöglichen und eine grössere Genauigkeit zu erzielen, wurde bei diesen Versuchen folgende Anordnung getroffen: es wurde ein doppelwandiger paral-

lelopipedischer Kasten aus Zinkblech hergestellt, der oben durch einen gut passenden Holzdeckel verschliessbar war, in welchem sich zwei Löcher zum Durchstecken der Thermometer befanden, während an einer der Schmalseiten des Kastens eine kreisförmige Öffnung ausgeschnitten war, durch welche das Ende der Glasröhre (bis zu einer Marke) mit dem daran befestigten (z. B. Wachs-) Stücke hineinragte. In den Raum zwischen den Doppelwänden konnte mittelst zweier Röhrenansätze Wasser eingeleitet werden. Damit das Innere des Kastens von der äusseren Luft möglichst abgesperrt werde, wurde der Zwischenraum zwischen der Glasröhre und der Wand der Öffnung mit Watta ausgefüllt, welche durch zwei eingeschobene Korkringe beiderseits festgehalten wurde. Ebenso wurde ein Wattapfropfen in die Röhre gesteckt. Dass dies auf die Tönhöhe keinen irgend merkbaren Einfluss habe, wurde durch Versuche constatirt. Mittelst Durchleiten von Eiswasser konnte die Temperatur erniedrigt werden, durch Erwärmen mit einem untergestellten Bunsen-Brenner beliebig erhöht werden; die Flammenhöhe konnte so regulirt werden, dass die Temperaturschwankung im Inneren während einer Stunde 0·2—0·3° nicht überstieg. So lange wurde auch jedesmal abgewartet, bevor der Versuch begonnen wurde, damit in dem (Wachs-) Stücke eine gleichmässige Temperaturvertheilung eintrete.

Diese Anordnung der Versuche hat zugleich den Vortheil, dass, falls die äussere Temperatur gleich bleibt, der Einfluss der thermischen Änderung der Elasticität des Glases auf die Tonhöhe des Systems nur sehr klein ist, da bloss das in den Kasten hineinragende Stück diesbezüglich in Betracht kommt. Wenn man die Rechnung ganz exact durchführen will, kann man die von Stefan abgeleitete Formel für einen aus drei Stücken bestehenden Stab anwenden.[1] Diese Stücke wären in diesem Falle:

I. Glasröhre auf Zimmertemperatur,
II. Glasröhre auf Temperatur des Kastens,
III. Wachsröhre.

Bei den im Folgenden angeführten Versuchen war aber die Länge des Stückes II nur $^1/_{30}$ von I, so dass in Anbetracht

[1] Diese Sitzungsber., LV, 1867.

des geringen Unterschiedes von c_1 und c_2 der Einfluss der Erwärmung desselben ganz vernachlässigt werden konnte.

Bei Anstellung der Experimente muss auch der Umstand berücksichtigt werden, dass der Knotenpunkt, in welchem der Stab festgeklemmt wird, von der jeweiligen Tonhöhe abhängt, dass daher seine Lage jedesmal aus der übereinstimmenden Saitenlänge am Monochord nach Formel (17) berechnet werden muss. Praktisch ist es, behufs Verschiebung des Einklemmungspunktes von vornherein eine Scala auf der Glasröhre einzuätzen. (Als Klemmbacken dienten zwei 1·5 *cm* breite, etwas ausgehöhlte Korkstücke, welche auf Brettchen aufgeleimt waren, die mit einer Schraubenzwinge zusammengedrückt wurden).

Man könnte sich von dieser Complication ganz befreien, indem man auch an der anderen Seite der Röhre ein Wachsstück befestigt, so dass das System symmetrisch wird. Dann hätte man die Rechnung für einen einseitig befestigten Stab von der halben Länge der Glasröhre mit angefügtem Wachsstück durchzuführen. Da aber in diesem Fall ein zweiter Kasten erforderlich ist, und auch die Herstellung gleicher Röhrenstücke nicht ganz leicht ist, zog ich es vor, bei der beschriebenen Anordnung zu bleiben.

Die Messung der Tonhöhe geschah, wie früher erwähnt wurde, mittelst eines Monochordes. Um bei der Abgrenzung des schwingenden Saitenstückes möglichste Genauigkeit zu erreichen, wurde die Kante des verschiebbaren Steges zugeschärft und auch eine Vorrichtung angebracht, dass die Saite von oben niedergedrückt wurde, so dass ein Schwanken derselben an den Endpunkten, welches eine Tonvertiefung zur Folge hat, vermieden wurde. Die Stahlsaite wurde durch Gewichte gespannt; die Tonhöhe blieb sehr constant; auch die Correction infolge der Steifheit der Saite war zu vernachlässigen, so dass die direct abgelesenen Saitenlängen den Schwingungszahlen verkehrt proportional gesetzt werden konnten.

Die Vergleichung der Tonhöhen der Saite und des Stabes geschah nach dem Gehör, Schwebungen konnten nicht wahrgenommen werden, aber trotzdem war eine ziemliche Genauig-

keit der Einstellung möglich, da Unterschiede von 0·1 *mm* = 1 Schwingung auf 1500 noch merklich waren. Allerdings war diese Fehlergrenze bei Unreinheit der Töne etwas höher.

V.

Bei der Durchführung der Messungen zeigten sich besonders zwei störende Umstände, und die dadurch hervorgerufenen Fehler waren die Ursache, dass namentlich die Bestimmung des μ nicht die gewünschte Genauigkeit erlangte. So zeigt es sich nämlich, dass nur wenn die Länge des angesetzten Stückes eine gewisse Grösse nicht überschreitet, der Grundton des Systems ertönt; will man den Ton noch vertiefen, indem man ein längeres Stück ansetzt oder die Temperatur erhöht, so spricht der Grundton nicht mehr an, meist aber tritt jetzt der erste Oberton hervor. Dies hat den Effect, dass die Tonvertiefung, mit welcher nach dem auf S. 751 Gesagten die Genauigkeit wächst, nur eine gewisse Grenze erreichen kann. Oft ist es nicht einmal vortheilhaft, so weit zu gehen, da zuweilen schon vorher die Klarheit des Tones merklich getrübt ist. Insbesondere ist die Beobachtung des Torsionstones erschwert, da die durch die ruckweisen drehenden Bewegungen der Hand hervorgebrachten Töne nicht so gut charakterisirt sind, als die Longitudinaltöne, bei denen es leichter ist, je nach der Art des Reibens den Grund- oder Oberton festzuhalten.

Da das Verschwinden des Grundtones bei der grössten erreichbaren Tonvertiefung einzutreten beginnt, also wenn der Knotenpunkt des Glasstabes am meisten gegen die Trennungsstelle zu verschoben ist, meint Stefan, welcher diese Erscheinung auch beobachtete, dass ihre Ursache in der Vertheilung der Verdünnungen und Verdichtungen im schwingenden Stabe liegen müsse, welche in der Nähe der Knoten am stärksten, in der Nähe der Schwingungsbäuche am geringsten seien.

Vielleicht bietet aber folgende Überlegung eine befriedigendere Erklärung.

Man kann die Schwingungen des Wachsstückes auch als eine Art von durch die Glasröhre erzwungenen Schwingungen betrachten; für sich allein tönt das Wachsstück nicht. Unter

sonst gleichen Verhältnissen werden sich diese leichter erzeugen lassen, wenn ihre Amplitude im Vergleich zur Amplitude der Glasschwingungen klein, als wenn sie gross ist. Nun ergeben die Gleichungen (12) für das Verhältniss der Amplituden

$$\frac{A'}{A} = \frac{\cos \beta\lambda}{\cos \beta'\lambda'} = -\frac{Eq\beta \sin \beta\lambda}{E'q'\beta' \sin \beta'\lambda'}$$

oder noch leichter Transformation, wenn wieder zur Abkürzung $\beta'\lambda' = z$ gesetzt wird

$$\frac{A'}{A} = \frac{\cos \frac{\pi l_0}{l}}{\cos z} = -\frac{p}{p'} \frac{\sin \frac{\pi l_0}{l}}{\frac{\pi l_0}{l}} \frac{z}{\sin z}.$$

Betrachten wir nun die Grenzfälle, wo

1. der Knoten der Mitte der Glasröhre am nächsten liegt, also der Ton der höchst mögliche wird, nämlich gemäss dem auf S. 749 Gesagten gleich jenem, welcher der Gleichung (19) entspricht; dann ist $z = 0$, also nach der ersten der obigen Formeln $\frac{A'}{A}$ dem absoluten Betrage nach höchstens gleich Eins, und zwar desto kleiner, je mehr $\frac{\pi l_0}{l}$ sich von 180 entfernt, also je grösser $\frac{p'}{p}$.

2. Wenn der Knoten an der Verbindungsstelle selbst liegt, ist nach Formel (17)

$$\lambda = \frac{\pi}{2\beta}, \quad \text{also } \beta\lambda = \frac{\pi l_0}{l} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{also auch } \beta'\lambda' = z = \frac{\pi}{2},$$

somit nach der zweiten der obigen Formeln

$$\frac{A'}{A} = -\frac{p}{p'}.$$

In der Regel wird nun p' bei weitem kleiner sein als p, mithin im zweiten Falle die Amplitude der Wachsschwingungen A' viel grösser sein müssen als jene der Glasschwingungen A, daher wird der Ton nur sehr schwer erzeugt werden können, während im Falle 1) das Gegentheil stattfindet.

Dies ist auch von vornherein ersichtlich, da wir im Anfange bewiesen haben, dass sich die Gleichung (14) auch aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes ableiten lässt, so dass also im Falle 2) die Amplituden der Wachsschwingungen unverhältnissmässig grösser sein müsssen als jene der erregenden Glasröhre, um diesen Gleichgewicht zu halten. Zugleich ergibt sich, dass tiefe Töne desto leichter ansprechen werden, je grösser $\frac{p'}{p}$ ist; dies stimmt mit der Erfahrung überein, z. B. ein Wachsstück vom Gewichte 58·97 *g*, welches an die später noch zu beschreibende Glasröhre *A* befestigt war, erzeugte noch einen Ton von 130 *mm* Saitenlänge, dagegen ein sehr dünnes vom Gewichte 17·83 *g* war schon bei 116 *mm* kaum zum Tönen zu bringen.

Es würde daraus hervorgehen, dass man p' möglichst gross machen soll, doch ist dann, wie schon früher bemerkt, die Klangreinheit beeinträchtigt. Will man dann doch Töne hervorbringen, so springen die Stücke ab — eben wegen der grossen Amplituden.

Der erste Oberton dagegen hat dann meist seinen Knoten in der Nähe der Mitte des Glasstückes, daher nach Formel (17)

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{2\beta}, \qquad \beta\lambda = \pi,$$

daher auch

$$\beta'\lambda' = \pi,$$

also

$$\frac{A'}{A} = +1,$$

er wird also gerade dann leicht ansprechen.

Der zweite störende Umstand ist der, dass die Tonhöhe nicht ganz unabhängig ist von der Art des Anreibens; wenn das Reibzeug ziemlich trocken ist, daher die Reibung gross, die Töne laut, so erscheinen sie meist tiefer, als wenn man, mit ganz nassem Reibzeug, mit geringer Reibung leisere Töne erregt. Dies bildet nicht eine Eigenthümlichkeit der zusammengesetzten Stäbe, es ist auch recht deutlich an Torsionstönen (weniger gut an Longitudinaltönen) von Metallröhren, nament-

lich wenn sie mit Colophoniumlappen gerieben werden und, wie früher erwähnt, an Holzstäben bemerkbar.

Eine diesbezügliche Bemerkung fand ich bei Wertheim (Ann. chim. et phys. III), welcher dies darauf zurückführt, dass bei lauteren Tönen, also grösseren Verschiebungen, die Elasticitätskräfte nicht mehr proportional denselben, sondern langsamer wachsen.

Es wäre ganz plausibel, dass dies bei Wachs etc., wo die Elasticitätsgrenze weit niedriger ist, mehr hervortritt als bei anderen Körpern. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass auch die Reibung selbst, welche in der einen frei schwingenden Stab voraussetzenden Theorie nicht berücksichtigt wird, einen Einfluss hat.

Eine analoge Erscheinung wäre die, dass gestrichene Saiten einen etwas tieferen Ton geben als gezupfte. Um diese Fehlerquelle möglichst zu verringern, wurde das Reibzeug möglichst nass gemacht, und wurden meist ziemlich leise Töne erregt. Die dabei vorkommenden Schwankungen blieben meist unter 0·1—0·2 *mm* Saitenlänge (bei geringer Tonvertiefung weniger).

Zur Untersuchung gelangten gelbes Bienenwachs, Paraffin, Spermacet, Kerzenstearin und weisser Schellack. Hiebei waren die Röhren durch Giessen in Formen erzeugt worden, nur jene aus Schellack musste, da dieses auch bei hoher Temperatur nicht ganz dünnflüssig wird, durch Überkleben eines geölten Messingstabes hergestellt werden.

Die Versuche konnten leider nicht bis in unmittelbare Nähe des Schmelzpunktes festgesetzt werden, denn entweder wurden die Körper schliesslich schon so weich, dass sie sich infolge der Schwerkraft zu rasch verbogen (Paraffin, Wachs, Schellack), oder sie wollten an der Glasröhre nicht mehr haften (Spermacet, Stearin).

VI.

Die Resultate der Messungen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Die Bezeichnungen sind übereinstimmend mit dem Früheren: t = Temperatur, λ' = Länge der angesetzten Stückes: p' = dessen Gewicht: R', r' = äusserer

und innerer Radius; l_L = die dem Longitudinalton des ganzen Systems entsprechende Saitenlänge; l_T = analog dem Torsionston; c'_L = die daraus berechnete Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in dem Versuchsstücke; c'_T = jene der Torsionswellen; μ = das hieraus sich ergebende Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation.

Bei allen Versuchen war

$$N = 435 \qquad R = 1\cdot 2306$$
$$L = 417\cdot 1 \qquad r = 0\cdot 9362.$$

(Gelbes) Wachs.

$l_{0L} = 104\cdot 0,\quad p = 765\cdot 5,\quad \lambda = 1495\cdot 5,\quad l_{0T} = 165\cdot 7.$

(Glasröhre A)

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
5·7	167	88·74	1·53025	0·7639	136·4		1032		
7·3	150·6	79 8			130·3	214·6	1010	615	0·356
16·4	151	79·73			135·98	225·8	922	552	0·394
16·6	130	68·0			126·75	209·5	900	540	0·389
25·7	111·5	58·97			127·6	210 9	737	443	0·381
26·1	95	50·19			119 08	196·05	735	438	0·408
30·6	130·9	68·0			98·95[1]		670		
30·7	152	79·73			101·42[1]		660		
31·6	95	50·19			123·1	205·4	662	388	0·454
36·6	78·5	41·8			120·6	199 9	556	329	0·424
							Mittel....		0·401

Paraffin.

$l_{0L} = 104\cdot 0,\quad \lambda = 1495\cdot 5,\quad p = 765\cdot 5,\quad l_{0T} = 165\cdot 7.$

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
6·1	204·4	54·75	1·244	0·77	121·26	194·0	1522	916	0·379
6·2	148·3	36·0	1·214	0·77	111·59	177·1	1501	886	0·434
6·5	117·7	28·9			109·1		1500		

[1] Erster Oberton.

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
17·3	205	54·75	1·244	0·77	124·5	199·55	1414	858	0·359
17·3	129	35·73	1·258	0·77	110·93	176·6	1414	828	0·459
17·3	159·3	38·05	1·214	0·77	113·34	180·46	1430	842	0·443
21·6	118·4	28·9	1·214	0·77	109·7	174·6	1300	733	0·574
21·7	129·4	35·73			111·3		1349		
24·6	160·1	38·25	1·214	0·77	116·0	185·05	1259	757	0·383
25·2	206·0	54·75			136·4		1194		
25·2	206·0	54·75			96·85 [1]		1189		
27·8	118·9	28·9			111·8		1035		
28·6	207	54·75			101·0 [1]		984		
29·3	103·3	25·4			111·9		851		
30·2	93·5	22·95			112·0		744		
30·8	159·3	38·05	1·214	0·77	101·9 [1]	163·75	751	437	0·473
32·9	56·0	14·15			108·6		470		
35·3	42·9	10·55			110·6		261		
35·3	42·9	10·55			102·4 [1]		240		
							Mittel....		0·438

Spermacet.

$l_{0L} = 104{\cdot}0,\ p = 765{\cdot}5,\ \lambda = 1495{\cdot}5\ \ l_{0T} = 165{\cdot}7.$

t	λ'	p'	R'	r'	l_L	l_T	c'_L	c'_T	μ
4·9	166·6	62·45	1·366	0·773	117·7	189 4	1517	909	0·394
14·5	166·9	62·45			118·8		1432		
18·9	167	62·45			118·9		1426		
19 9	167	62·45			119·25	191·45	1403	859	0·334
24·7	167·2	62·45			121·05		1311		
27·5	167·4	62·45			121·37	196 1	1298	782	0·378
28·4	167·4	62·45			122·4	197·9	1258	759	0·373
32·6	167·8	62·45			127·2	212·6	1129	645	0·533
32·9	167·8	62·45			129·1		1092		
33·1	149·7	55·40			122·2	201·6	1091	628	0·506
							Mittel....		0·420

[1] Erster Oberton.

Weisser Schellack.

$l_{0L} = 102 \cdot 2, \quad p' = 751 \cdot 0, \quad \lambda = 1468 \cdot 5.$
(Glasröhre B)

t	λ'	p'	l_L	c'_L
8·7	171·5	40·77	96·4[1]	1009
19·4	136·5	34·32	117·7	970
25·5	104	28·42	109·5	948
26·3	136·5	34·32	124	869
30·8	104	28·42	110·1	865
35·3	104	28·42	111·4	821
40·0	98	23·71	111·4	762

Stearin.

$l_{0L} = 104 \cdot 0, \quad \lambda = 1495 \cdot 5, \quad p = 765 \cdot 5.$

t	λ'	p'	l_L	c'_L
16·1	159·5	62·84	119·1	1354
17·3	188	56·9	120 8	1313
17·3	180·5	53·95	118·5	1396
18·1	185·3	78·18	126·16	1354
26·4	185·8	78·18	128·5	1284
33·6	186·2	78·18	133·25	1181
37·3	160·5	62·84	123·4	1177
38·5	186·5	78·18	135·4	1145
38 5	186·5	78·18	93·18[1]	1138
40·8	121·3	37·32	113·36	1076
41·5	160·6	62·84	127·5	1077
49·2	122·0	37·32	117·6	911

Der besseren Übersicht wegen sind die erhaltenen Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den Figuren 3, 4, 5 und 6 als Punkte graphisch eingetragen; man sieht sofort, dass eine

[1] Erster Oberton.

lineare Formel die Abhängigkeit derselben von der Temperatur nicht darstellen könne; man muss hiezu eine Function von der Form $c = a+bx+cx^2$ verwenden, bei Paraffin müsste sogar noch ein Glied $+dx^3$ hinzukommen.

Die Werthe dieser Constanten wurden für die Longitudinalwellen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; anstatt bei Paraffin die vierte Constante hinzuzunehmen, zog ich es vor, die Curve in drei Stücke zu theilen und für jedes

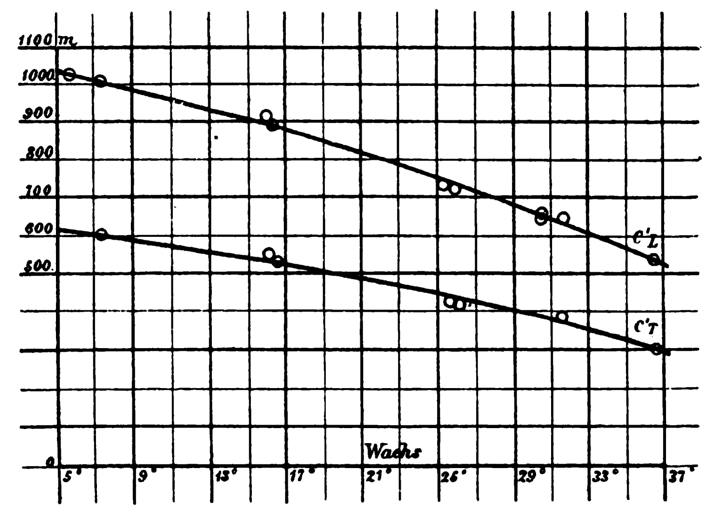


Fig. 3.

die quadratische Formel zu berechnen. Die durch diese Gleichungen dargestellten Curven sind in jenen Figuren eingetragen. Wo die Werthe des μ bestimmt waren,[1] wurde daraus das Mittel genommen, mit dieser Zahl die Torsionswellengeschwindigkeit berechnet und die so erhaltene Curve gleichfalls eingezeichnet. Hiebei ist allerdings die Änderung des μ

[1] Bei Stearin gelangte ich zu keinen brauchbaren Resultaten. Wahrscheinlich liegt der Grund in der stark krystallinischen Structur und der Sprödigkeit desselben; es wird leicht von kleinen Sprüngen durchzogen, welche kaum sichtbar sind und sich nur durch Änderung des Tones bemerkbar machen.

Ebenso war bei Schellack wegen der Ungleichmässigkeit der Röhre eine Berechnung des μ nicht möglich.

mit der Temperatur nicht berücksichtigt, doch sind dazu die Beobachtungen nicht genügend genau, ihre Zahl zu gering, und würden die Correcturen bei der Torsionsgeschwindigkeit überhaupt nicht sehr gross sein.

Die Werthe der Constanten sind:

	Longitudinal-wellengeschwindigkeit			Torsions-wellengeschwindigkeit		
	a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
Wachs 6—37°..	1092·9	—9·417	—0·1464	652·9	—5·626	—0·0874
Spermacet 5—33°..	1479·8	+7·526	—0·5675	878·1	+4·466	—0·3367
Stearin 16—49°..	1352·7	+4·9012	—0·2786			
Schellack 9—40°..	1022·4	+0·1455	—0·1673			
Paraffin 6—25°..	1465·8	+12·390	—0·8774	864·3	+7·306	—0·5174
25—30°..	—3816·7	+438·986	—9·4892	—2250·6	+258·86	—5·5955
30—35°..	9326·2	—434·826	+5·0347	5499·3	—256·40	+2·9688

Die mit Hilfe dieser Constanten für einige Temperaturen berechneten Schallgeschwindigkeiten und die daraus folgenden Elasticitätsmoduln sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Schallgeschwindigkeit					Elasticitätsmodul				
	Wachs	Spermacet	Paraffin	Stearin	Schellack	Wachs	Spermacet	Paraffin	Stearin	
10°	984	1498	1502		1007	95·8	214	207		Dehnungsm.
20	846	1403	1363	1339	958	70·2	187	168	181	
30	679	1195	813	1249	876	44·6	134	58·6	157	
40				1103	761				121	
50				901					87·8	
10	588	889	886			34·2	75·5	71·9		Tors.-M.
20	505	833	804			25·0	65·8	58·5		
30	405	709	479			15·9	47·2	20·4		

Wenden wir uns nun zur Discussion der Resultate.

In Betreff der Übereinstimmung der einzelnen Beobachtungen untereinander ergibt sich Folgendes.

Die Longitudinalgeschwindigkeiten stimmen untereinander ziemlich gut überein; die durchschnittlichen Abweichungen betragen $1—1^1/_2{}^0/_0$, also eine für derartige Versuche befriedigende Genauigkeit. Bei den Torsionsgeschwindigkeiten sind die Fehler etwas grösser. Bemerkenswerth ist, dass auch die

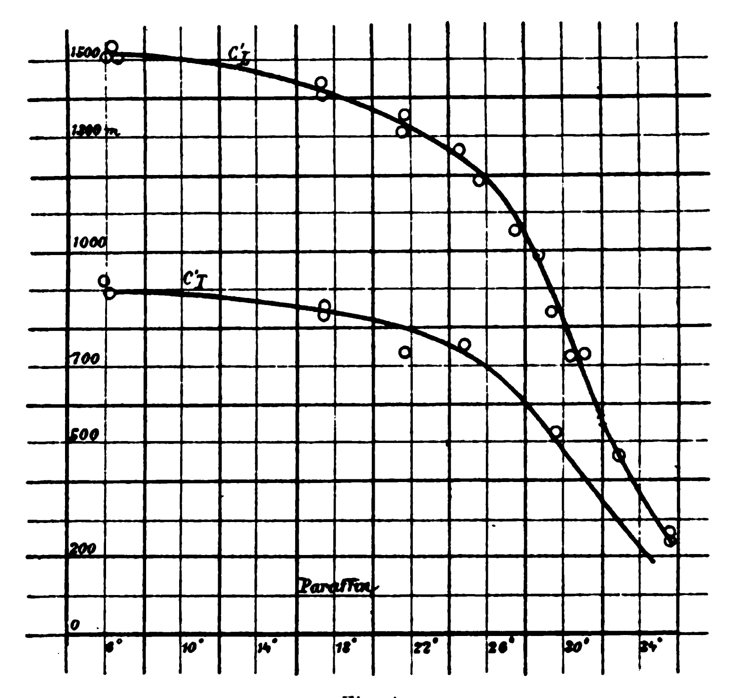


Fig. 4.

Beobachtungen bei verschiedenen Längen der Stücke und auch jene der Obertöne keine bedeutenden Differenzen zeigen — was auch als Bestätigung der Theorie gelten kann (vergl. z. B. Paraffin bei 17°3 oder bei 25°2).

Bezüglich des Wachses muss bemerkt werden, dass Stefan zu einem etwas anderen Resultate gelangte; den in der Einleitung erwähnten Zahlen zufolge fand er bei gewöhnlicher Temperatur die Geschwindigkeit allerdings fast gleich, aber die Abnahme derselben mit wachsender Temperatur ist nach seinen

Messungen noch bedeutend rascher. Vielleicht lässt sich dies dadurch erklären, dass hier gelbes Bienenwachs verwendet wurde, während er weisses Wachs gebrauchte, welches zumeist mit anderen Stoffen, namentlich Talg, versetzt wird. Auch die Differenz des Werthes für Stearin von der aus Warburg's Beobachtungen folgenden Zahl 1437 *m* wird sich auf eine kleine Verschiedenheit des Materials zurückführen lassen.

Allen zur Untersuchung gelangten Stoffen ist die bedeutende Abnahme der Elasticität mit wachsender Temperatur gemeinsam und bei allen erfolgt sie mit zunehmender Temperatur immer rascher, nur das Paraffin bildet hievon eine Ausnahme; seine Curve weist in der Nähe von 30° einen Wendepunkt auf und wird oberhalb dieser Abscisse wieder convex. Ob dies bloss eine Eigenthümlichkeit dieses Körpers ist, lässt sich nicht entscheiden; es wäre möglich, dass auch die anderen Stoffe bei noch höherer Temperatur eine solche Erscheinung zeigen; leider liess sich dies aus früher genannten Gründen nicht mehr untersuchen.

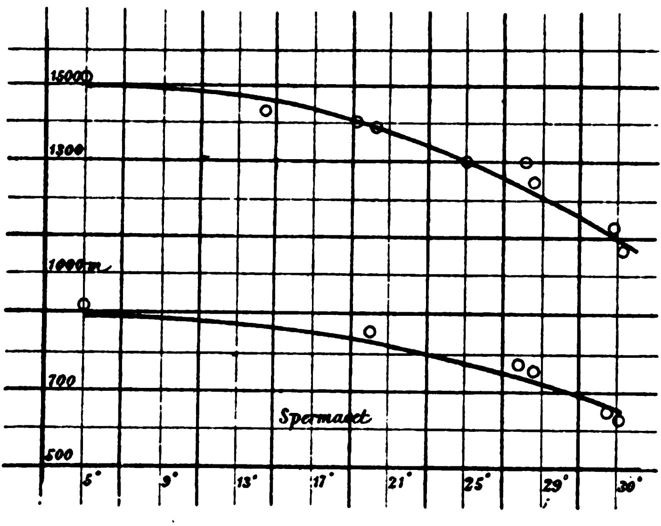


Fig. 5.

Es scheint ferner, dass, wenigstens beim Paraffin, die Curve sich continuirlich der Ordinate 0 nähert, um sie vielleicht beim Schmelzpunkte zu erreichen; auch bei den anderen

Stoffen ist dies nicht unwahrscheinlich, da bei den höchsten Temperaturen die Neigung besonders gross ist. Es wäre nun sehr merkwürdig, wenn die wirkliche Schallgeschwindigkeit bis 0 abnehmen würde, während sie ja in den meisten Flüssigkeiten Werthe zwischen 1000 und 1500 *m* hat. Diese Erscheinung wird aber durch den Umstand erklärt, auf welchen zuerst Wertheim aufmerksam gemacht hat, dass nämlich diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in

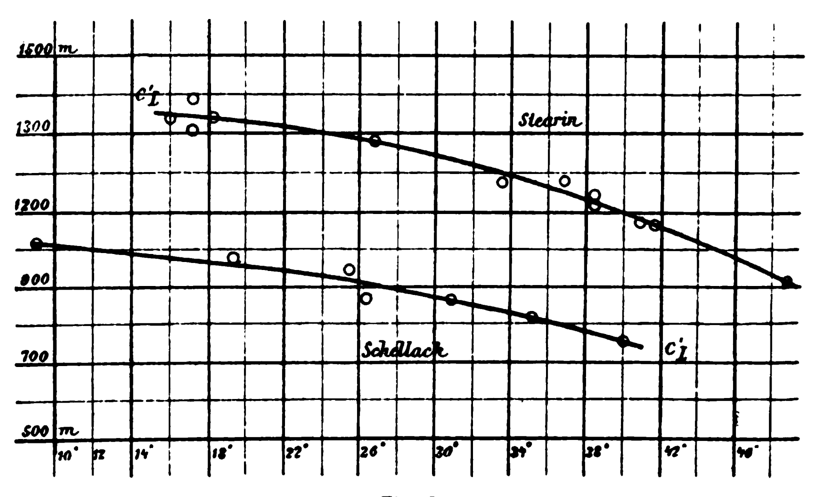


Fig. 6.

Stäben nicht identisch ist mit jener in Körpern, welche nach drei Dimensionen ausgedehnt sind.

Wird ein Stab gedehnt, so kann er sich ungehindert in der Quere zusammenziehen; in einem massiven, nach allen Richtungen des Raumes ausgedehnten Körper ist dies dagegen nicht möglich, daher ergibt sich auch hier als Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, sondern

$$(c') = \sqrt{\frac{1-\mu}{1-2\mu}\,\frac{E}{(1+\mu)\rho}} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\,\frac{T}{\rho}} =$$

$$= c'_L \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = c'_T \sqrt{\frac{2-2\mu}{1-2\mu}}.$$

Diese Geschwindigkeit braucht auch für c'_L oder $c'_T = 0$ nicht gleich Null zu sein, wenn nämlich $\mu = 0 \cdot 5$ wird — wie dies ja bei Flüssigkeiten der Fall ist. Diese Geschwindigkeit (c') ist es auch, welche bei flüssigen Körpern beobachtet wird; das c', welches den Longitudinalwellen eines Flüssigkeitsstabes (welcher seitlich durch keine festen Wände begrenzt ist) entspricht, ist gleich Null. Es folgt somit, dass unsere Curve, welche das c' in festen Körpern darstellt, bei der Schmelztemperatur die Abscissenaxe erreichen muss, und zwar scheint es eben nach dem Gesagten, dass sie hiebei keinen Sprung macht, sondern continuirlich verläuft. Um das (c') in ausgedehnten Körpern direct zu messen, haben wir bis jetzt kein Mittel; man könnte es bei Kenntniss von μ berechnen, doch ist dazu die Bestimmung dieser Grösse zu unsicher, da die kleine Differenz $1 - 2\mu$ im Nenner vorkommt.

Um die in der Einleitung berührte Frage des Zusammenhanges zwischen der thermischen Änderung der Elasticität und dem Ausdehnungscoëfficienten zu untersuchen, machte ich einige Messungen des specifischen Gewichtes der Körper bei verschiedenen Temperaturen. (Diese Zahlen wurden schon in den vorhergehenden Berechnungen theilweise benützt.) Diese Werthe, welche in Fig. 7 graphisch dargestellt sind, sind zugleich der Massstab für die Ausdehnung.

t	Wachs	t	Paraffin	t	Spermacet	t	Stearin
1·6	$\rho = 0 \cdot 9774$	0·7	$\rho = 0 \cdot 9055$	1·3	0·9423	1·0	1·0017
17·7	0·9646	17·9	0·8928	17·8	0·9322	17·7	0·9931
29·7	0·9500	29·6	0·8719	29·8	0·9213	29·6	0·9849
39·5	0·9193	39·4	0·8452	34·7	0·9148	39·3	0·9748
47·2	0·8778					47·2	0·9605

Der Anblick der Curven lehrt nun, dass allerdings Paraffin und Wachs, welche sich am meisten ausdehnen, auch ihre Elasticität am meisten ändern und dass ebenso beim Stearin die Kleinheit der thermischen Coëfficienten übereinstimmt,

doch fehlt in den Details die Ähnlichkeit; so hat namentlich die merkwürdige Curve der Schallgeschwindigkeit des Paraffins gar keine Analogie mit dessen Wärmeausdehnungscurve. Auch würde man beim Spermacet, welches seine Elasticität ziemlich rasch ändert, einen grösseren Ausdehnungscoëfficienten erwarten können. Es scheint somit, dass zwischen diesen Grössen nur ein mittelbarer Zusammenhang besteht. Von vornherein ist ja auch eher ein solcher zwischen dem Widerstande, welchen der Körper einer allseitigen Zusammendrückung entgegenstellt, also dem Volums-Elasticitätsmodul und der allseitigen thermischen Ausdehnung anzunehmen; man könnte

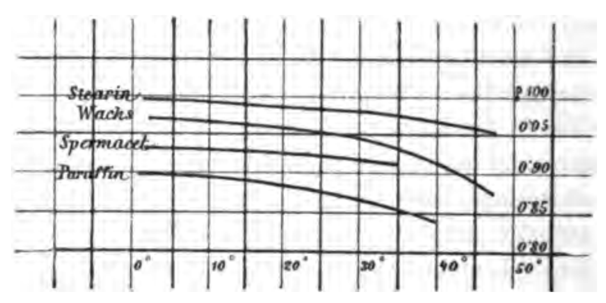


Fig. 7.

erwarten, dass nämlich die Änderung der elastischen Kräfte mit der Temperatur eben von der Vergrösserung der Distanzen zwischen den Molekülen herrührt. Der Längsmodul E folgt aus dem Volumsmodul k mit Hilfe der Formel

$$E = 3(1-2\mu)k,$$

also

$$\delta E = 3(1-2\mu)\delta k - 6k\delta\mu.$$

Da somit die Änderung des E auch durch die Änderung des μ beeinflusst wird, ist es immerhin noch nicht ausgeschlossen, dass zwischen k und dem Ausdehnungscoëfficienten eine directe Beziehung herrscht und die Abweichungen davon bei E bei Annäherung an die Schmelztemperatur auf Rechnung des μ zu setzen sind, welches sich dann gerade rasch ändert. Hierüber ist vorderhand eine Entscheidung nicht möglich.

In Betreff des zweiten, im Abschnitte I erwähnten Punktes, der Grösse des μ, ist zu bemerken: In der That zeigen sich bei diesen weichen Körpern die μ, auch nach der dynamischen Methode bestimmt, verhältnissmässig gross; allerdings bleiben sie immerhin beträchtlich unterhalb der Zahl 0·5 von Mallock für Paraffin und dürfte dieser Werth (welcher auch $(c) = \infty$ involviren würde) in den früher erwähnten Mängeln der statischen Methode begründet sein. Im Übrigen möchte ich den hier gefundenen Mittelwerthen auch keine sehr grosse Genauigkeit beimessen, da ja die einzelnen Messungen ziemlich grosse Abweichungen zeigen. Ein Theil von ihnen lässt sich — bei Spermacet und Wachs — wohl auf die Änderung des μ mit der Temperatur zurückführen, doch bleiben auch dann noch beträchtliche Differenzen — namentlich bei Paraffin. Dies ist bei der Grösse des Einflusses, welchen geringe Fehler bei der Tonbestimmung etc. haben, leicht begreiflich.

Immerhin ist die Anwendung dieser Methode bei weichen Körpern gerechtfertigt, da zu erwarten ist, dass sich die Fehler der Gewichtsbestimmung, Messung der Radien, Messung des Tones bei einem Mittelwerthe gegenseitig aufheben, und da eben eine andere dynamische Methode zur Bestimmung des μ in solchen Stoffen nicht vorhanden ist.

VII.

Die allgemeinen Ergebnisse der Untersuchung sind also — um sie zum Schlusse noch kurz zusammenzufassen:

1. Bezüglich der Anwendbarkeit der Methoden überhaupt:

Die Schwingungen zusammengesetzter Stäbe sind ein gutes Mittel zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinal- und Torsionswellen in Stäben von weichen Körpern (Paraffine, Schellack etc.) und somit auch des adiabatischen E; sie gestatten auch die Bestimmung des μ, allerdings wird sich dabei keine grosse Genauigkeit erzielen lassen.

2. Bezüglich der Änderung der Elasticität mit der Temperatur:

Die Geschwindigkeit c'_L und c'_T, somit auch E und T, nehmen mit wachsender Temperatur bei solchen Körpern sehr

rasch ab, und zwar nicht derselben proportional, sondern immer rascher; ob zum Schlusse immer wieder ein Wendepunkt eintritt — wie beim Paraffin — liess sich nicht entscheiden. Die Curven dürften bei der Schmelztemperatur die Abscissenaxe berühren. Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen dieser Abnahme und dem thermischen Ausdehnungscoëfficienten existirt nicht, doch ist damit noch nicht ausgeschlossen, dass ein solcher zwischen letzterem und dem Volumsmodul besteht, was dann die scheinbare Übereinstimmung zwischen den obigen Grössen bei Stoffen, die weit von ihrem Schmelzpunkte entfernt sind, erklären würde.

3. Bezüglich der Grösse des μ:

Dasselbe schwankt bei den untersuchten Stoffen (Wachs, Spermacet, Paraffin) — den Versuchen zufolge — zwischen 0·4 und 0·44, ist somit relativ gross, wenn auch nicht so, wie es die statischen Methoden zu ergeben scheinen. Bei Wachs und Spermacet war eine Zunahme mit steigender Temperatur bemerkbar.

XIX. SITZUNG VOM 12. JULI 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft IV und V (April und Mai 1894) des 103. Bandes, Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Herr Prof. Dr. Ign. Klemenčič in Graz dankt für die ihm zur Durchführung seiner Untersuchung über die Magnetisirung durch elektrische Oscillationen bewilligte Subvention.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht folgende zwei Arbeiten aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität zu Innsbruck:

1. »Eine Studie über unipolare Induction«, von Prof. Dr. Ernst Lecher.
2. »Experimentelle Darstellung von Magnetfeldern«, von Joh. Zuchristian.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine Arbeit der Herren k. u. k. Oberstabsarzt Prof. Dr. F. Kratschmer und k. u. k. Regimentsarzt Dr. E. Wiener in Wien, betitelt: »Grundzüge einer neuen Bestimmungsmethode der Kohlensäure in der Luft«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien: »Zur Kenntniss der Überwallungsharze« (II. Abhandlung), von Dr. Max Bamberger.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup überreicht folgende vier im chemischen Institut der k. k. Universität in Graz ausgeführte Arbeiten:

1. »Über die Constitution der Verbindungen von Chinaalkaloiden mit Äthyljodid«, von Zd. H. Skraup.

2. »Über das Verhalten von Hydrojodcinchonin zu Wasser«, von Dr. G. Pum.

3. »Mangantrichlorid und Chlorokupfersäure«, von G. Neumann.

4. »Quantitative Analyse von Schwermetallen durch Titriren mit Natriumsulfid«, von G. Neumann.

Das c. M. Prof. Franz Exner übersendet eine Arbeit, betitelt: »Elektrochemische Untersuchungen« (IV. Mittheilung).

Ferner übersendet derselbe eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn J. G. Garvanoff: »Über die innere Reibung in Ölen und deren Änderung mit der Temperatur.«

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Staatsgymnasium in Wien (IV. Bezirk), übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (10. Fortsetzung).

Herr Dr. Wilhelm Kaiser, k. k. Polizei-Commissär in Floridsdorf, übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, welches angeblich die Beschreibung einer in verhältnissmässig beschränktem Raume (bei grosser Stromstärke) untergebrachten transportablen Quellenbatterie enthält.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. G. Tschermak legt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung über gewundene Bergkrystalle vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von E. Bryk: »Über die Einwirkung von Jod und Kalilauge auf Harnsäure«;

ferner eine von Prof. R. Přibram aus Czernowitz eingesendete Abhandlung von G. Gregor: »Über die Einwirkung von Jodmethyl auf Resacetophenonkalium«.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun überreicht zwei weitere Berichte von Dr. Eugen v. Halácsy in Wien: III. »Beitrag zur Flora von Thessalien« und IV. »Beitrag zur Flora von Achaia und Arcadien«, welche den Schluss der botanischen Ergebnisse einer von demselben im Auftrage der kaiserl. Akademie der Wissenschaften unternommenen Forschungsreise nach Griechenland bilden.

Das w. M. Herr Prof. Friedr. Brauer überreicht den IV. Theil der in Verbindung mit Ed. Edl. v. Bergenstamm verfassten Vorarbeiten zu einer Monographie der *Muscaria Schizometopa,* welcher ein Verzeichniss der bis jetzt gezogenen Parasiten und ihrer Wirthe und eine ebensolche alphabetische Aufzählung der Wirthe und ihrer Parasiten, ferner Nachträge zu den früheren Theilen enthält.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitäts-Laboratorium von Herrn Fritz Pollak durchgeführte Untersuchung: »Studien über die synthetische Bildung von Mesoweinsäure und Traubensäure«.

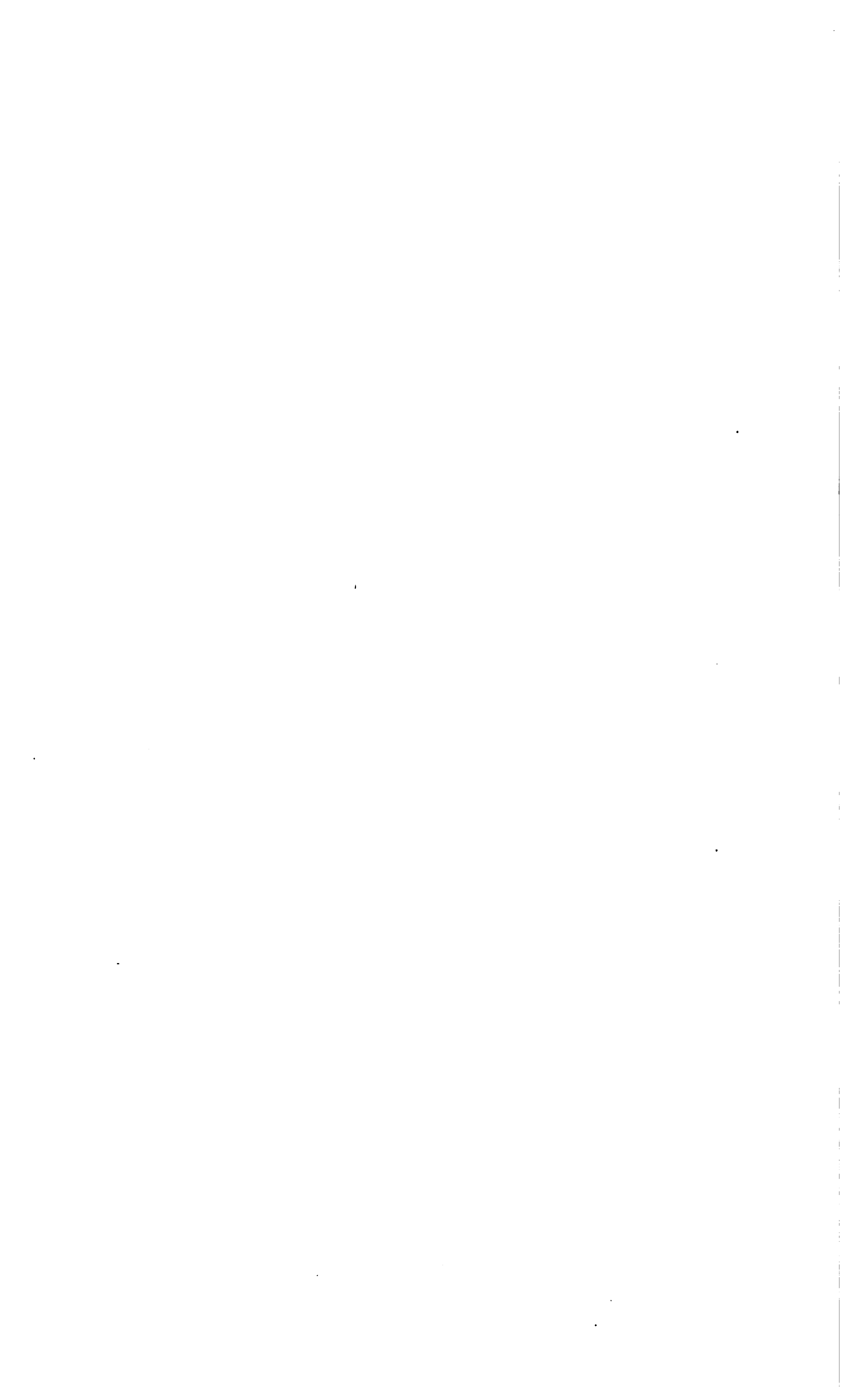
Das w. M. Herr Vicepräsident Prof. E. Suess übergibt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, betitelt »Beiträge zur Stratigraphie Centralasiens«.

Herr Dr. J. Sahulka, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Neue Untersuchungen über den elektrischen Lichtbogen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Kaiserliche Universität in Kasan, Jubiläumsschrift zur hundertjährigen Geburtstagsfeier N. Lobatschewski's. Kasan, 1894; 4°.

Wilde, H. Über den Ursprung der elementaren Körper und über einige neue Beziehungen ihrer Atomgewichte. London, 1892; 4°.



SITZUNGSBERICHTE

DER

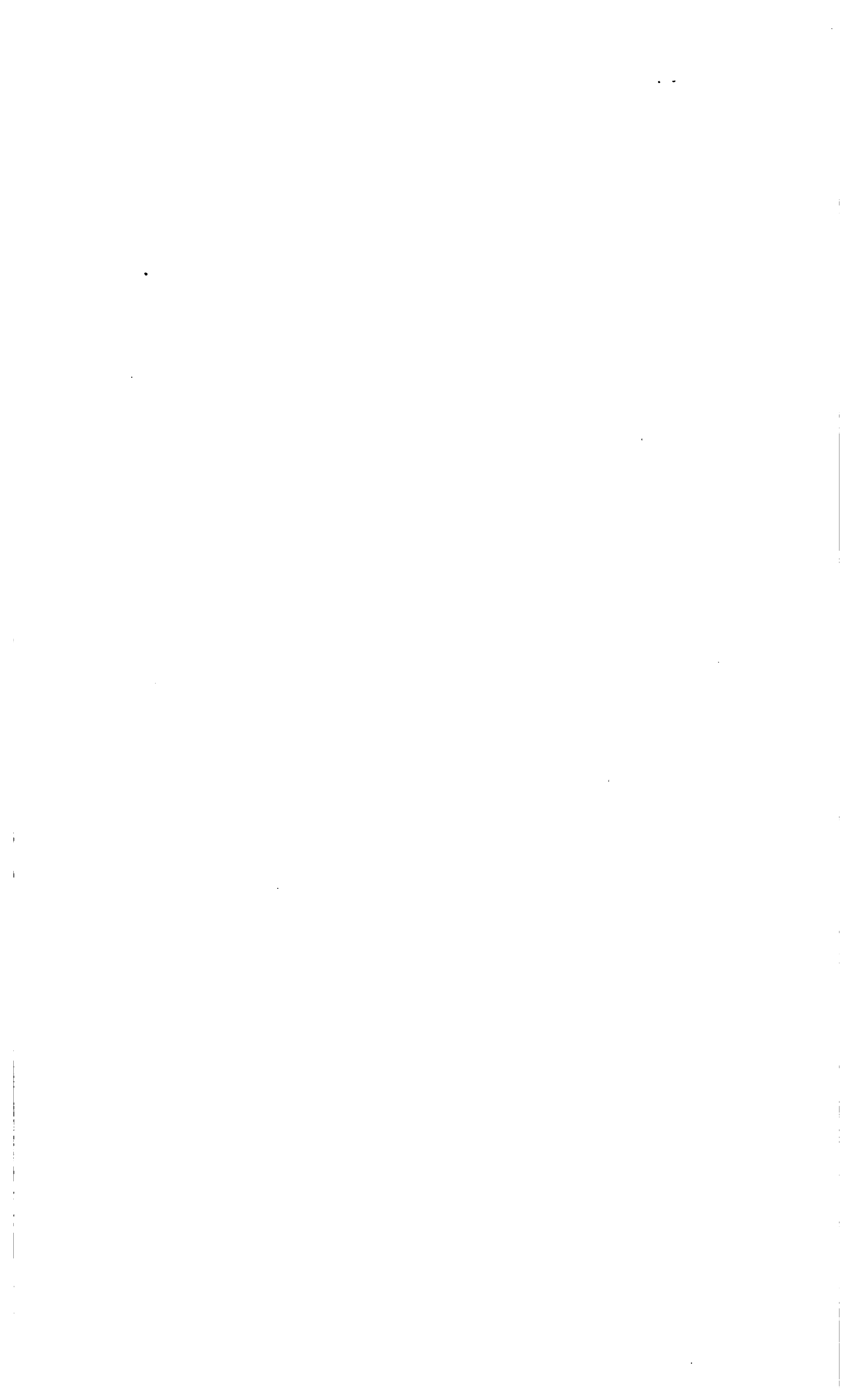
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XX. SITZUNG VOM 11. OCTOBER 1894.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, begrüsst die Classe bei Wiederaufnahme der Sitzungen nach den Ferien und heisst das neueingetretene Mitglied Herrn Prof. A. Weichselbaum herzlich willkommen.

Hierauf gedenkt der Vorsitzende der Verluste, welche die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe seit der letzten Sitzung durch den Tod zweier hervorragender Männer der Wissenschaft erlitten hat.

Am 17. Juli verschied in Perchtoldsdorf bei Wien der Senior der Akademie Hofrath Dr. Joseph Hyrtl, emerit. Professor der Wiener Universität, im 83. Lebensjahre. Hyrtl war das letzte noch lebende wirkliche Mitglied aus der Reihe der bei Gründung der Akademie (1847) von Sr. Majestät Kaiser Ferdinand I. ernannten vierzig Akademiker.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Am 8. September erfolgte zu Charlottenburg bei Berlin das Ableben des ausländischen Ehrenmitgliedes wirkl. geh. Rath und Universitätsprofessor Dr. Hermann von Helmholtz.

Die Mitglieder erheben sich gleichfalls zum Zeichen des Beileids von den Sitzen.

Ferner bringt der Vorsitzende folgende an Se. Excellenz den Herrn Präsidenten der Akademie gelangte Mittheilungen zur Kenntniss, und zwar:

Ein Schreiben Sr. Excellenz des w. M. Herrn Dr. Cajetan Freiherrn von Felder, worin derselbe der kaiserl. Akademie den

Dank ausspricht für die ihm zu seinem 80. Geburtstage am 19. September l. J. dargebrachten Glückwünsche.

Ein Schreiben von Dr. A. Friedlowsky in Kreisbach, in welchem derselbe im Namen der Frau Hofrathswitwe Auguste Hyrtl der kaiserl. Akademie für die Theilnahme an der Leichenfeier ihres verewigten Gatten und für die gleichzeitige Kranzspende herzlich dankt; — desgleichen ein Dankschreiben Ihrer Excellenz Frau von Helmholtz in Charlottenburg für das ihr aus Anlass des Ablebens ihres Gemals von der kaiserl. Akademie übersandte Beileidstelegramm.

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übersendete Werk: »Die Liparischen Inseln. III. Lipari« vor.

Im Laufe der Ferien sind folgende Publicationen der Classe erschienen:

Sitzungsberichte, Bd. 103. (1894), Abtheilung I, Heft IV bis V (April—Mai); Abtheilung II. a., Heft III—V (März—Mai), Heft VI (Juni) und VII (Juli); Abtheilung III, Heft I—IV (Jänner bis April).

Monatshefte für Chemie, Bd. 15. (1894), Heft VI (Juni), Heft VII (Juli) und Heft VIII (August); — ferner das General-Register zu den Bänden I—X dieser Monatshefte.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus, und zwar:

Die Herren Dr. J. Breuer in Wien, Prof. Dr. G. Goldschmiedt und Prof. Dr. H. Molisch in Prag für die Wahl zu inländischen correspondirenden Mitgliedern — und

Herr A. Auwers, ständiger Secretär der königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin für die Wanl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede.

Herr Dr. Sigm. Fuchs, Assistent am physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, dankt für die ihm zur Vollendung seiner Untersuchungen über den Erregungsvorgang in den marklosen Nervenfasern der Wirbellosen bewilligte Subvention.

Der Secretär berichtet, dass die im laufenden Jahre unter der wissenschaftlichen Leitung des Herrn k. und k. Hofrathes Director Steindachner auf S. M. Schiff »Pola« unternommenen geologischen Forschungen in den grossen Tiefen der Adria erfolgreich durchgeführt wurden und dass das Expeditionsschiff unter Commando des k. und k. Fregatten-Capitän Mörth nach neunwöchentlicher Fahrt am 1. August wieder glücklich in den Hafen von Pola eingelaufen ist; — ferner dass auch die im Monate Mai l. J. von Herrn Dr. K. Natterer auf S. M. Schiff »Taurus« ausgeführten chemischen Untersuchungen im Marmara-Meere ganz entsprechende Resultate ergeben haben.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Hans Molisch an der k. k. deutschen Universität in Prag übersendet eine Arbeit: »Die mineralische Nahrung der Pilze« (I. Abhandlung).

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über die allgemeinen Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in äolotropen und isotropen Substanzen« — und
2. »Über das Kriterion der Connexialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung«, beide vorgenannten Arbeiten von Prof. Dr. J. Finger an der k. k. technischen Hochschule in Wien.
3. »Bemerkungen über Wärmeleitung«, von P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten.
4. »Über die zeitweilig verloren gehende elektrische Durchlässigkeit (Leitungsfähigkeit) unserer Metalle für Ströme von ganz geringer Spannung«, von Dr. A. Vietrzycki, k. k. Bezirksarzt in Brzesko (Galizien).

Ferner legt der Secretär folgende behufs Wahrung der Priorität eingesendete versiegelte Schreiben vor:

1. Von Dr. Isidor Altschul, k. Bezirksarzt in Stretraia (Rumänien), mit der Aufschrift: »Zwei Abhandlungen. I. Über das chemische Verhältniss des schlagenden Wetters; II. Über constantes Licht durch Influenz-Elektricität«.

2. Von Herrn Gustav Hirsch in Wien, mit der Aufschrift: »Vindex«, angeblich ein Mittel gegen die Reblaus.
3. Von Herrn Franz Müller, Schulleiter in Siegenfeld (Niederösterreich), mit der Aufschrift: »Leseapparat«.
4. Von Herrn Oswald Liss, Bauingenieur in Wien, mit der Aufschrift: »Sempre avanti«. Der Inhalt betrifft angeblich einen neuen Eisenbahn-Oberbau.
5. Von Dr. Norbert Herz in Wien, mit der Aufschrift: »Physik 744«. Dasselbe enthält angeblich die Principien einer Lösung des Problems des lenkbaren Luftschiffes.
6. Von den Herren Franz B. Smolik und Emil Plechawski in Wien, mit der Aufschrift: »Karte der Eisenbahnrouten zur Ermittlung der Entfernungen beliebiger Stationsverbindungen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Czernowitz: »Über die Bildung von Naphtoldithiocarbonsäuren« von Prof. Dr. R. Přibram und C. Glücksmann.

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft in Österreich-Ungarn zur Epoche 1890·0 nach den in den Jahren 1889 bis 1894 im Auftrage der kaiserl. Akademie ausgeführten Messungen« (I. Theil).

Herr Dr. Sigm. Fuchs, Assistent am physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über den zeitlichen Verlauf des Erregungsvorganges im marklosen Nerven«.

Schliesslich überreicht der Secretär, Hofrath Director J. Hann, eine Abhandlung des Herrn Eduard Mazelle, Adjunct am astronomisch-meteorologischen Observatorium in Triest, unter dem Titel: »Beziehungen zwischen den mittleren und wahrscheinlichsten Werthen der Lufttemperatur«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. III. »Lipari«, Prag, 1894; Folio.

Le Prince Albert I[er], Prince de Monaco, Résultats des Campagnes Scientifiques accomplie sur Son Yacht »l'Hirondelle«. Publiés sous la direction avec le concours du Baron Jules de Guerne, chargé des Travaux zoologiques à bord. Fascicule VII. Crustacés décapodes provenant des Campagnes 1886, 1887, 1888 par A. Milne-Edwards et E. L. Bouvier. I[ère] Partie. »Brachyures et Anomoures«. Imprimerie de Monaco, 1894; Folio.

Instituto Agronomico do Estado de São Paulo (Brazil) em Campinas, Relatorio Annual 1893. S. Paulo, 1894; 4°.

Liverpool Biological Society, Report upon the Fauna of Liverpool Bay. Vol. I. (with 10 plantes and 2 maps). London 1886; 8°. — Vol. II. (with 12 plantes and 1 chart). Liverpool, 1892; 8°.

Prinz W., Agrandissements des Photographies Lunaires. Publié sous les Auspices de M. E. Solvay. Observatoire Royal de Belgique. Partie d'un cliché obtenu au foyer du grand Réfracteur de Lick Observatory. Planche I. Agrandissement à 8 diametres; Planche II. Agrandissement à 24 diametres; Planche III. Agrandissement à 33 diametres.

Änderungen des elektrischen Widerstandes wässeriger Lösungen und der galvanischen Polarisation mit dem Drucke

von

Bruno Piesch.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Mai 1894.)

Die Frage, inwiefern eine Änderung des Druckes einen Einfluss auf den elektrischen Leitungswiderstand einer Flüssigkeit ausübt, wurde bereits in mehrfacher Weise behandelt, aber die meisten dieser Untersuchungen, welche nur mit geringen Druckänderungen ausgeführt wurden, haben keine nennenswerthen Ergebnisse geliefert. Dieselben sind grösstentheils in der Abhandlung des Herrn Fink[1] angeführt, welcher sich bisher am eingehendsten in dieser Richtung beschäftigt hat. Er hat durch eine grössere Reihe von Versuchen mit Salzsäure, Chlornatrium- und Zinksulfatlösungen unter Anwendung hoher Drucke gezeigt, dass im Allgemeinen mit Zunahme des Druckes eine Abnahme des Leitungswiderstandes dieser Flüssigkeiten erfolgt. Ich werde wohl noch öfter Gelegenheit haben, auf diese Arbeit Fink's zurückzukommen. Von späteren Untersuchungen sind nur die von Fousserau[2] hervorzuheben, welcher fand, dass sich der Widerstand sehr verdünnter Lösungen von Eisenchlorid und Chloraluminium bei einer Druckzunahme von 175 Atm. um 5—6% des ursprünglichen Werthes verringert, aber

[1] Wied. Ann., XXVI, S. 481 (1888).

[2] Beibl., 11, S. 723.

nach tagelangem Stehenlassen diesen wieder erreicht. Die Stärke der Änderung nahm mit der Concentration der Lösung zu. Alle diese Versuche, vor Allem diejenigen Fink's haben gezeigt, dass nur bei Anwendung geeigneter Methoden und Apparate, welche grosse Druckänderungen zulassen, genaue und brauchbare Resultate zu erzielen sind.

Ich stellte mir nun die Aufgabe, die Untersuchungen, die Herr Fink an den drei Elektrolyten ausgeführt hat, mit wesentlich verschiedenen Versuchsanordnungen auf eine grössere Reihe wässeriger Lösungen auszudehnen, und ich will gleich hier erwähnen, dass die im Folgenden mitgetheilten Untersuchungsergebnisse mit dem oben angeführten allgemeinen Resultate Fink's vollkommen übereinstimmen.

Eine andere Frage war die, ob nicht eine Druckänderung auch auf die chemischen Erscheinungen, welche der elektrische Strom beim Durchgang durch einen Elektrolyten hervorruft, von Einfluss ist. Diese chemischen Erscheinungen bestehen bekanntlich erstens in der Zersetzung des Elektrolyten, anderseits in der Rückbildung desselben unter gleichzeitigem Verschwinden der ausgeschiedenen Jonen. Dieser zweite chemische Vorgang wird nach den neueren Theorien als die Ursache jener elektromotorischen Kraft angesehen, welche mit dem Namen galvanische Polarisation bezeichnet wird. Die obige Frage wird daher ihre Beantwortung erhalten, wenn wir untersuchen, ob sich die galvanische Polarisation mit dem Drucke ändert. Diese Frage hat Herr F. Exner[1] in seinen »Elektrochemischen Untersuchungen« aufgeworfen und daselbst auch die Vermuthung ausgesprochen, dass ähnlich wie die Temperatur auch der Druck auf die Polarisation von Einfluss sein müsse.

Methoden und Apparate.

Bei der Wahl der Methode der Widerstandsbestimmung hat es sich vor Allem darum gehandelt, eine möglichst grosse Genauigkeit der Messungen zu erzielen, da es ja aus den früheren Versuchen hervorgeht, dass die Widerstandsände-

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 100 (1891).

rungen oft nur geringe sind. Mit der Telephonmethode, welche bei Flüssigkeitswiderständen am häufigsten angewendet wird, konnte ich die gewünschte Genauigkeit nicht erreichen, denn die Versuche, die ich damit anstellte, ergaben eine solche von nur 2 %. Ich wendete daher eine Methode an, welche einerseits eine gleichzeitige Messung des Widerstandes und der Polarisation gestattet, anderseits auch einen Anspruch auf grosse Genauigkeit macht. Eine ähnliche Art, den Widerstand und Polarisation gleichzeitig zu bestimmen, ist auch bereits von Neumann (Wiedem. Galv.) angegeben worden.

Das Wesen dieser Methode besteht in Folgendem: Der Strom einer Batterie von der elektromotorischen Kraft E theilt sich in zwei Zweige; in den einen derselben wird der zu bestimmende Flüssigkeitswiderstand (x) eingeschaltet, ein Widerstandskasten und die eine Rolle eines Differentialgalvanometers, der andere Zweigstrom geht durch einen zweiten Stöpselrheostaten und in entgegengesetzter Richtung durch die andere Galvanometerrolle und vereinigt sich dann wieder mit dem ersten Zweig, um zur Batterie zurückzukehren. Sobald der Strom geschlossen wird, beginnt sich die Polarisation (p) zu entwickeln, und es wird nun im zweiten Rheostaten soviel Widerstand (w) eingeschaltet, bis die Stromintensität in beiden Zweigen dieselbe ist, die Nadel also dauernd auf Null einsteht. Dass dazu immer eine längere Zeit nöthig war, geht aus einigen Ursachen hervor, auf die ich noch später zu sprechen komme. Nun wird in den ersten Zweig ein Zusatzwiderstand (g) geschaltet und die Stromgleichheit durch Zuschalten eines Widerstandes g_1 in den anderen Zweig wiederhergestellt. Mache ich den Flüssigkeitswiderstand genügend gross, woraus sich auch für w ein entsprechend hoher Werth ergibt, so kann ich den Widerstand der Batterie und der Zuleitungsdrähte dagegen vernachlässigen. Bezeichnet nun i die Stromstärke eines Zweigstromes und a den Widerstand einer Galvanometerrolle (dass dieser Werth für beide Rollen derselbe ist, ist durch einen Versuch bestätigt worden), so folgt aus der ersten Einstellung nach den Gesetzen der Stromverzweigung: $E-p = i(x+a)$, $E = i(w+a)$ und daraus $\frac{E-p}{E} = \frac{a+x}{a+w}$.

Nach Einschaltung der Zusatzwiderstände erhält man auf dieselbe Weise: $\frac{E-p}{E} = \frac{a+x+g}{a+w+g_1}$. Daraus ergibt sich für den zu bestimmenden Widerstand $x = \frac{(a+w)g}{g'} - a$ und für den Werth der Polarisation $p = E\left(1 - \frac{g}{g_1}\right)$. Man kann also aus den zwei Einstellungen die gesuchten Grössen bestimmen. Jedoch eine Voraussetzung wurde bei dieser Methode gemacht, deren Richtigkeit man von vorneherein wohl nicht annehmen kann. Es ist dies die Voraussetzung, dass die Polarisation nach Zuschalten des Widerstandes g, also mit der Änderung der Stromstärke dieselbe bleibt. Im Allgemeinen wird dies auch gewiss nicht der Fall sein. Der Umstand jedoch, dass der Flüssigkeitswiderstand — schon aus oben angeführten Gründen — sehr gross gewählt wird und der Zusatzwiderstand im Verhältniss dazu genügend klein gemacht werden kann, lässt vermuthen, dass eine Änderung der Polarisation innerhalb so geringer Stromintensitätsunterschiede nicht eintreten wird. Dies wurde natürlich durch eine Reihe von Versuchen auch nachgewiesen, von denen ich hier einige anführen will. Als Flüssigkeit wurde eine verdünnte Kupfersulfatlösung verwendet, in welche Platinelektroden eintauchten. Der Widerstand w wurde nun regulirt, bis die Nadel sich auf Null einstellte, dann verschiedene Zusatzwiderstände $g, g', g'' \ldots$ eingeschaltet, welche wieder durch Widerstände $g_1 g_1' g_1'' \ldots$ compensirt wurden. Ändert sich die Polarisation nicht, so muss sich verhalten $g : g' : g'' = g_1 : g_1' : g_1''$.

g	$w+g_1$	g_1	g	$w+g_1$	g_1	g	$w+g_1$	g_1	g	$w+g_1$	g_1
0	541·5	0	0	1582	0	0	2260	0	0	3910	0
20	581·0	39·5	50	1647	65	50	2360	100	50	3980	70
40	622·0	80·5	100	1712	130	100	2460	200	100	4050	140
60	666·5	125·0	150	1772	190	150	2570	310	150	4120	210

Diese Resultate zeigen nun, dass bei genügend grossem w und geringen Zusatzwiderständen g die Proportionalität zwischen den g und g_1 besteht, also eine geringe Intensitätsände-

rung des Stromes keinen merkbaren Einfluss auf die Polarisation ausübt. Nehmen die Werthe des g zu, so sehen wir, dass sich die Werthe der g_1 nicht mehr proportional mit diesen ändern. Bei grösseren Widerständen w können wir natürlich auch entsprechend höhere Zusatzwiderstände einschalten, und dies ist ja auch für die Genauigkeit der Messungen von grossem Vortheil.

Eine Schwierigkeit, die sich bei dieser Methode darbietet, und welche auch die Ursache davon ist, dass einige Messungen nur näherungsweise ausgeführt werden konnten, muss hier noch erwähnt werden. Bekanntlich erreicht nach dem Schliessen des primären Stromes der Polarisationsstrom nicht momentan seinen vollen Werth, sondern es ist dazu immer eine längere Zeit nöthig. Man muss daher lange warten, bis die Galvanometernadel zur Ruhe kommt und die erste Einstellung gemacht werden kann. Die Erfahrung zeigte, dass bei grösseren Flüssigkeitswiderständen das Maximum der Polarisation schneller erreicht wurde. Bei einigen Flüssigkeiten konnte aber ein stationärer Zustand überhaupt nicht beobachtet werden; die Nadel bewegte sich entweder continuirlich nach einer Richtung oder war beständig in schwingender Bewegung begriffen. In diesem Falle musste man eben auf ein genaues Resultat verzichten und zufrieden sein, überhaupt eine Änderung des Widerstandes mit dem Druck feststellen zu können. Die Ursache dieser Erscheinung lag wahrscheinlich in grösseren Concentrationsänderungen der Flüssigkeit; denn die Zersetzung der Elektrolyten erfolgt ja immer rascher als die gleichzeitige Wiedervereinigung der ausgeschiedenen Jonen, sobald nur die elektromotorische Kraft des primären Stromes grösser ist als die der Polarisation. Und dies letztere war ja bei allen Messungen der Fall. Ich will noch erwähnen, dass zur Stromerzeugung eine Anzahl Accumulatoren diente, welche eine genügend constant bleibende elektromotorische Kraft hatten. Die Grösse derselben war natürlich bei den einzelnen Versuchen verschieden und richtete sich immer nach der Grösse des Flüssigkeitswiderstandes. Die Werthe wechselten zwischen 3—8 Volt. Da ja zur Berechnung der Polarisation die elektromotorische Kraft der Kette bekannt sein muss, so musste dieselbe nach jedem Versuche gemessen

werden, und zwar geschah dies vermittelst eines Siemens'-schen Torsionsgalvanometers, welches die Klemmen der Accumulatoren zu einem Nebenkreis verband. Dieses Instrument gestattete eine genaue Ablesung von Hunderteln Volt. Was die Genauigkeit der Messungen überhaupt anlangt, muss ich hervorheben, dass eine Änderung des Widerstandes w um $0 \cdot 03\, ^0/_0$ noch einen merkbaren Ausschlag der Galvanometernadel ergab.

Druckapparat und Widerstandsgefäss. Zur Erzeugung des Druckes diente ein Cailletet'scher Druckapparat (wie er auch von Fink bei seinen Untersuchungen verwendet wurde), den Herr Hofrath v. Lang in gütigster Weise zur Verfügung stellte, und wofür ich an dieser Stelle meinen besten Dank zum Ausdruck bringe. Auf die Beschreibung des Apparates will ich nicht näher eingehen, sondern nur bemerken, dass man mit demselben mit Leichtigkeit einen Druck von 700 Atmosphären erreichen konnte. Bei meinen Versuchen ging ich jedoch nur bis zu einem Druck von 500 und nur einmal bis 600 Atmosphären. Die Messung des Druckes geschah vermittelst eines an die Pumpe angebrachten Bourdon'schen Manometers.

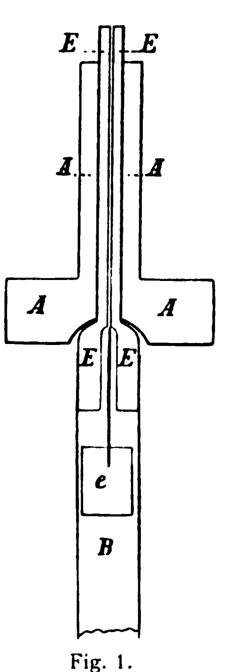


Fig. 1.

Die grössten Schwierigkeiten machte die Herstellung des Widerstandsgefässes, und zwar die luftdichte Abschliessung nach Aussen und die Einführung des Zuleitungsdrahtes. Meine anfänglichen Versuche, die Glasröhre, wie sie zur Verflüssigung von Gasen verwendet wird, als Widerstandsgefäss zu benützen, indem man den Zuleitungsdraht oben einschmilzt, missglückten insofern, als die Glasröhren oberhalb des Wulstes, der an die Metallhülse angepresst wird, sprangen. Ich traf daher eine wesentlich andere Anordnung, die sich äusserst vortheilhaft erwies. In die Metallhülse (A) (Fig. 1) wurde ein Ebonitcylinder (E) eingekittet, der sich gegen das untere Ende erweiterte, um dort einen Abschluss nach Aussen herzustellen. Der Cylinder war

in der Richtung seiner Axe durchbohrt, damit der Kupferdraht hindurchgeführt werden konnte. An denselben wurde ein Platindraht angelöthet, der dann die eine Elektrode (*e*) trug. Als Elektroden benützte ich rechteckige Platinbleche, die an die Platindrähte angenietet waren. Die Bohröffnung wurde ganz mit Kitt ausgefüllt, so dass auch die Löthstelle, die in dem unteren weiteren Theil der Bohrung lag, mit Kitt umgeben war und mit der Flüssigkeit keineswegs in Berührung kommen konnte. Ich muss bemerken, dass der Dubois'sche Kitt (eine Mischung von gleichen Theilen Colophonium und gelbem Wachs), welchen ich dabei verwendete, selbst bei den höchsten Drucken vollkommen dicht gehalten hat; erst nach einer längeren Reihe von Versuchen musste er wieder erneuert werden.

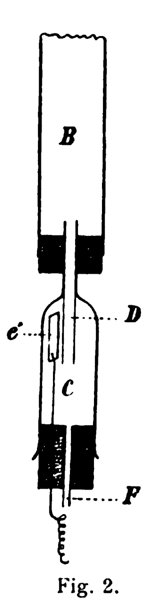


Fig. 2.

Zur Aufnahme der Flüssigkeit dienten zwei Glasröhren, von denen die eine (*B*) auf den unteren weiteren Theil des Ebonitcylinders aufgekittet war, wie es in Fig. 1 dargestellt ist. Sie ist durch einen Kautschukpfropfen nach unten geschlossen. Die zweite Glasröhre *C* (Fig. 2) hat einen engeren Theil, mit dem sie durch den Pfropfen in die erste Röhre hineinragt, und einen weiteren, der ebenfalls mit einem Kautschukstöpsel versehen ist. Durch den letzteren geht eine kurze Glasröhre *(F)*, welche die Verbindung nach Aussen herstellt. Ausserdem wurde durch diesen Pfropfen der Platindraht geführt, der die zweite Elektrode *(e')* trägt und unten in eine Spirale endigt. Zu erwähnen ist noch die kleine Röhre *D*, welche in den engeren Theil von *C* eingeschoben wurde und verhindern sollte, dass die Gasblasen, welche sich bei der Zersetzung an den Elektroden bilden, in diesen Theil der Röhre gelangen und dadurch eine Unterbrechung des Stromes verursachen. Diese Zusammenstellung des Widerstandsgefässes, besonders die Anwendung einer engen Verbindungsröhre hatte lediglich den Zweck, den Widerstand aus den oben angeführten Gründen zu vergrössern. Bei gut leitenden Flüssigkeiten war es nöthig, noch engere Röhren anzuwenden, bei einigen sehr schlecht

leitenden dagegen musste man den Pfropfen mit der zweiten Elektrode direct in die Röhre *B* einsetzen.

Sobald alle Theile des Widerstandsgefässes bis zum äussersten Rande der kleinen Röhre *F* gefüllt sind, wird dasselbe nun in den eisernen Cylinder des Druckapparates eingesetzt. Auf dem Boden desselben befindet sich eine Schichte Quecksilber, in welches die Platindrahtspirale hineintaucht, so dass dadurch eine leitende Verbindung zwischen der unteren Elektrode (e') und dem Eisencylinder hergestellt ist. Ein starker Kupferdraht, der um denselben gewunden ist, leitet den Strom weiter. Der Widerstand aller dieser Leitungen ist, wie die Versuche ergeben haben, ein so geringer im Vergleich mit dem Flüssigkeitswiderstand, dass er überhaupt nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Da das Quecksilber zur Leitung des Stromes benützt wurde, durfte dasselbe keineswegs mit dem Elektrolyten in Berührung kommen. Denn auf diese Weise würde es ebenfalls die Stelle einer Elektrode einnehmen, und ausserdem würde die Berührung des Quecksilbers mit dem Platindrahte einerseits und die Anwesenheit des Elektrolyten anderseits die Ursache zur Bildung eines störenden elektrischen Stromes sein. Es wurde daher die zu untersuchende Flüssigkeit unten durch eine nicht leitende Flüssigkeit, Schwefelkohlenstoff, abgeschlossen, dessen specifisches Gewicht grösser ist als das des Wassers und der untersuchten Flüssigkeiten. Der übrige Theil des Eisencylinders wurde mit Wasser angefüllt. Der Schwefelkohlenstoff musste natürlich nach einigen Versuchsreihen immer erneuert werden, da er durch die Berührung mit dem Quecksilber sehr rasch verunreinigt wurde.

Die untere Elektrode e' wurde in einer entsprechenden Höhe angebracht, so dass sie von dem Schwefelkohlenstoff, der etwa durch den hohen Druck in die Röhre *C* eingedrungen war, nicht bedeckt werden konnte. Anderseits durfte sie auch nicht zu hoch angebracht werden, da der obere Theil dieser Röhre zur Ansammlung der ausgeschiedenen Gase bestimmt war. Aus demselben Grunde musste auch zwischen der oberen Elektrode *e* und dem Ebonitcylinder ein freier Raum gelassen werden. Die Menge der ausgeschiedenen Gase war allerdings

eine sehr geringe, und durch den Druck wurde ihr Volumen noch bedeutend reducirt. Es wäre noch zu bemerken, dass die Stromrichtung bei allen Versuchen dieselbe blieb, und zwar wurde dieselbe so gewählt, dass die untere Elektrode *(e')* mit dem Zinkpol der Batterie in Verbindung stand, dass sich also das Metall des Elektrolyten immer auf dieser Elektrode absetzte. Diese Einrichtung wurde getroffen, weil die untere Elektrode mit grosser Leichtigkeit gereinigt werden konnte. Die Reinigung geschah durch Lösung des niedergeschlagenen Metalls in Salpetersäure und Abwaschen mit Soda und Wasser. Ausserdem wurden die Elektroden noch ausgeglüht, um sie auch von den absorbirten Gasen zu befreien. Trotzdem konnte ein gänzliches Verschwinden des Polarisationsstromes nicht erreicht werden, das sehr empfindliche Galvanometer zeigte stets einen wenn auch sehr schwachen Strom an.

Die Beobachtungen.

Wie ich schon eingangs erwähnt habe, war es mir darum zu thun, die Beobachtungen an einer grösseren Reihe von Flüssigkeiten anzustellen, und ich will daher an dieser Stelle vor Allem Einiges über die verwendeten Flüssigkeiten hervorheben. Es gelangten sowohl verdünnte Säuren, als auch Salzlösungen zur Untersuchung, und zwar von ersteren die Schwefelsäure, Salpetersäure, Chlorwasserstoffsäure und zwei organische, die Essig- und Oxalsäure. Anschliessend an jede derselben wurde dann eine Reihe von Salzen untersucht, und zwar die Kupfer-, Eisen-, Zink-, Nickel- und Magnesiumsalze, nur bei der Schwefelsäure an Stelle des letztgenannten das Natriumsulfat. Ausserdem konnte von den Salzen der beiden organischen Säuren das Eisenacetat, sowie sämmtliche eben genannten Salze der Oxalsäure infolge ihrer Unlöslichkeit in kaltem Wasser zur Untersuchung nicht verwendet werden.

Um auch einen gleichzeitigen Einfluss der Concentration auf die Widerstandsänderung der Lösung feststellen zu können, wurden die meisten der Flüssigkeiten bei zwei verschiedenen Concentrationen beobachtet. Dabei standen die Procentgehalte der Salzlösungen und der entsprechenden Säuren in einem ganz bestimmten Verhältniss, so dass in gleichen Mengen der

Lösungen auch gleiche Mengen der Säureradicale enthalten waren, oder mit anderen Worten, dass in der Gewichtseinheit der beiden Lösungen sich eine gleich grosse Anzahl elektrolytischer Molekeln befand. Weiter folgt daraus, dass sich die Anzahl der in der Volumeinheit enthaltenen elektrolytischen Molekeln der beiden Lösungen verhalten müssen wie die specifischen Gewichte derselben. Bezeichnet nämlich p das in der Gewichtseinheit enthaltene Gewicht der gelösten Substanz, A das Äquivalentgewicht der Lösung, d. h. das Moleculargewicht dividirt durch die Anzahl der Säureradicale, so ist die in der Gewichtseinheit enthaltene Molekelanzahl $g = \frac{p}{A}$, für eine zweite Lösung ist $g' = \frac{p'}{A'}$, soll nun $g = g'$ sein, so muss sich verhalten: $p : p' = A : A'$, wenn daher der Procentgehalt ($P = 100\,p$) der Säure gegeben ist, so folgt daraus $P' = \frac{PA'}{A}$ für den Procentgehalt der Salzlösung.

Ist ferner m die Anzahl der elektrolytischen Molekeln in der Volumeinheit und s das specifische Gewicht der Lösung, so ist $m = sg$ und für die zweite Lösung $m' = s'g'$, und da $g = g'$, so verhalten sich: $m : m' = s : s'$, was bereits oben ausgesprochen wurde.

Zwei Salze, Kupfer- und Magnesiumacetat, konnten infolge ihrer sehr geringen Löslichkeit in den entsprechenden Concentrationen nicht untersucht werden, sie wurden daher ebenso wie das Nickelacetat auch nur bei einer einzigen Concentration beobachtet. Die Herstellung der Lösungen von bestimmter Concentration geschah entweder auf die Weise, dass die nöthige Menge der Substanz abgewogen und in der dazu gehörigen Menge destillirten Wassers gelöst wurde, oder es wurde aus Tabellen das dem gewünschten Procentgehalt entsprechende specifische Gewicht entnommen und nach diesem die Lösung hergestellt. Im ersteren Falle wurde das specifische Gewicht nachträglich vermittelst eines Aräometers bestimmt.

Eine grosse Rolle sowohl bei Widerstands- als auch bei Polarisationsmessungen spielt auch die Temperatur, und es ist bekannt, dass die Flüssigkeiten bei Erhöhung der Temperatur

besser leiten, dass dagegen die Polarisation eine Abnahme der Werthe zeigt. Die Frage, ob der Druck bei verschiedenen Temperaturen auch den Widerstand oder die Polarisation in verschiedener Weise beeinflusst, habe ich bei der vorliegenden Arbeit gar nicht in Betracht gezogen, da es mir ja vor Allem nur darum zu thun war, festzustellen, ob überhaupt der Druck eine Änderung dieser Erscheinungen hervorruft.

Die Messungen wurden daher alle bei Zimmertemperatur vorgenommen, und die Hauptsache war, dass dieselbe während einer Versuchsreihe möglichst constant blieb. Den Eisencylinder, in welchen das Widerstandsgefäss eingeschlossen war, mit einem Wasserbad zu umgeben, schien mir überflüssig, da ja bei der grossen Wanddicke dieses Cylinders äussere Temperaturschwankungen, die während einer Versuchsreihe nur sehr gering sein konnten, nicht leicht in das Innere des Gefässes dringen konnten. Bei weitem grösser und störender sind die Temperaturunterschiede, welche durch die Zu- und Abnahme des Druckes hervorgerufen werden. Dadurch entstehende Fehler konnte man nur dadurch vermeiden, dass man nach der Erhöhung oder Erniedrigung des Druckes bis zur Ablesung am Galvanometer ungefähr 10—15 Minuten verstreichen liess. Übrigens zeigte das Galvanometer selbst den Rückgang der Temperatur an. Die Druck- und Temperaturerhöhung vermindert den Widerstand, es erfolgt ein starker Ausschlag in diesem Sinne, der aber bald mit der Temperatur zurückzugehen anfängt, bis die Nadel gänzlich zur Ruhe gelangt. Da auch die Beobachtungen bei abnehmendem Drucke gemacht wurden, so konnte ein Fehler durch die beiden entsprechenden Messungen ebenfalls ausgeglichen werden.

Ich will nun noch kurz den Gang einer Versuchsreihe beschreiben. Nachdem auf die oben angeführte Weise die zu untersuchende Lösung hergestellt war, was immer längere Zeit vor Beginn des Versuches geschah, wurde das Widerstandsgefäss gefüllt und in dem Eisencylinder des Druckapparates luftdicht verschraubt. (Die nöthigen Dichtungsleder mussten öfters erneuert werden.) Dann wurde der Strom geschlossen und so lange gewartet, bis die Nadel möglichst zur Ruhe gekommen war. Jetzt konnte erst die Nulleinstellung der Nadel

erfolgen, und es wurde nun die erste Ablesung gemacht, dann nach Einschalten des Zusatzwiderstandes die zweite und eine dritte Ablesung wieder ohne den Zusatzwiderstand. Aus der ersten und dritten Ablesung wurde dann immer das arithmetische Mittel genommen. Nun erhöhte ich den Druck auf 250 Atmosphären und liess wieder 10—15 Minuten verstreichen, bis ich die drei Ablesungen machen konnte. Dasselbe geschah dann bei 500 Atmosphären und bei den absteigenden Drucken. Es muss noch bemerkt werden, dass die Pumpe während einer Zeit von 15 Minuten selbst bei 500 Atmosphären in den meisten Fällen vollkommen dicht hielt.

Aus diesen Ablesungen berechnete ich nach den zu Beginn entwickelten Formeln die Werthe für die Widerstände und die Polarisation, welche ich nun in eine Tabelle zusammengestellt im Folgenden mittheilen will. Die erste Spalte der Tabelle enthält die fortlaufenden Nummern der Versuche, die zweite Spalte die Namen und chemischen Formeln der untersuchten Substanzen, dann ist weiters das specifische Gewicht (s) angegeben, der Procentgehalt (P), worunter die Anzahl der Gewichtstheile wasserfreien Salzes in 100 Gewichtstheilen Lösung verstanden ist, in der fünften Reihe stehen die Drucke (Π) und in der sechsten die berechneten Widerstände (W), dann sind die Mittelwerthe derselben für die gleichen Drucke angegeben und weiters die Änderungen des Widerstandes bei einer Druckerhöhung um Π Atmosphären, ausgedrückt in Procenten (q) des Anfangswiderstandes bei 0 Atmosphären. Die Widerstände sind in Siemens-Einheiten, die Polarisationswerthe in Volt ausgedrückt. Die drei letzten Colonnen enthalten die beobachteten Polarisationswerthe (p), die berechneten Mittelwerthe und die Quotienten aus den Polarisationsänderungen und den entsprechenden Drucken $\left(\frac{dp}{\Pi}\right)$.

Nr.	Substanz	s	P	Π	Widerstand beobachtet	Widerstand Mittelwerthe	$-q$	Polarisation beobachtet	Polarisation Mittelwerthe	$\frac{dp}{\Pi}$
					I. Schwefelsäure und Sulfate.					
1	Schwefelsäure H_2SO_4	1·040	5·96	0	415·5	421·3		2·11	2·12	
				250	373·7	361·8	14·12%	2·16	2·15	0·00012
				500	319·3	315·4	25·13	2·13	2·15	00
				500	311·5			2·17		
				250	350·0			2·14		
				0	427·1			2·13		
2	Schwefelsäure H_2SO_4	1·020	3·03	0	743·5	747·7		1·86	1·80	
				250	670·5	663·6	11·24%	1·83	1·83	0·00012
				500	622·0	623·7	16·57	1·83	1·83	00
				500	625·5			1·83		
				250	656·8			1·84		
				0	752·0			1·74		
3	Kupfersulfat $CuSO_4$	1·076	7·47	0	1114	1099		1·53	1·56	
				250	996	992	9·73%	1·62	1·62	0·00024
				500	910	914	16·87	1·66	1·65	12
				500	918			1·65		
				250	989			1·62		
				0	1084			1·60		
4	Kupfersulfat $CuSO_4$	1·032	3·24	0	3620	3575		1·54	1·54	
				250	3252	3222	9·87%	1·66	1·66	0·00048
				500	2996	2998	16·14	1·66	1·66	00
				500	3000			1·66		
				250	3192			1·66		
				0	3531			1·54		
5	Eisensulfat $FeSO_4$	1·100	9·88	0	2755	2742		1·08	1·07	
				250	2528	2528	7·80%	1·19	1·16	0·00036
				500	2376	2376	13·34	1·24	1·24	32
				250	2528			1·13		
				0	2729			1·07		
6	Eisensulfat $FeSO_4$	1·049	5·02	0	4863	4832		1·00	0·99	
				250	4189	4173	13·64%	1·16	1·07	0·00032
				500	3714	3716	23·10	1·16	1·16	36
				500	3718			1·16		
				250	4158			0·99		
				0	4802			0·98		

Nr.	Substanz	s	P	Π	Widerstand beobachtet	Widerstand Mittelwerthe	$-q$	Polarisation beobachtet	Polarisation Mittelwerthe	$\frac{dp}{\Pi}$
7	Zinksulfat $ZnSO_4$	1·107	9·79	0	2853	2849		2·43	2·40	
				250	2276	2268	20·39%	2·50	2·47	0·00028
				500	2025	2032	28 67	2·55	2·53	24
				500	2040			2·51		
				250	2260			2·44		
				0	2846			2·37		
8	Zinksulfat $ZnSO_4$	1·052	4·97	0	4594	4591		2·30	2·32	
				250	3487	3505	23·66%	2·46	2·46	0·00056
				500	3193	3170	30·96	2·51	2·51	20
				500	3147			2·51		
				250	3523			2·46		
				0	4589			2·34		
9	Nickelsulfat $NiSO_4$	1·128	9·40	0	2656	2668		1·95	1·94	
				250	1958	1972	26·08%	1·98	1·96	0·00008
				500	1805	1805	32·34	1 99	1·99	12
				500	1806			2·00		
				250	1986			1·95		
				0	2680			1·93		
10	Nickelsulfat $NiSO_4$	1·053	4·78	0	4405	4423		2·07	1·99	
				250	3864	3904	11·73%	2·07	2·06	0·00028
				500	3697	3712	16·05	2·12	2·12	24
				500	3729			2·12		
				250	3944			2·05		
				0	4442			1·91		
11	Natriumsulfat Na_2SO_4	1·080	8·63	0	1613	1594		2·31	2·34	
				250	1429	1443	9·47%	2·38	2·38	0·00016
				500	1405	1414	11·30	2·40	2·39	04
				500	1424			2·39		
				250	1457			2·38		
				0	1575			2·37		
12	Natriumsulfat Na_2SO_4	1·040	4·39	0	2690	2645		2·46	2·45	
				250	2400	2395	9·45%	2·51	2·50	0·00020
				500	2328	2328	11·98	2·53	2·53	12
				500	2328			2·53		
				250	2391			2·50		
				0	2600			2·45		

Nr.	Substanz	s	P	Π	Widerstand beobachtet	Widerstand Mittelwerthe	−q	Polarisation beobachtet	Polarisation Mittelwerthe	$\frac{dp}{\Pi}$
	II. Salpetersäure und Nitrate.									
13	Salpetersäure HNO_3	1·050	8·99	0	2097	2107		2·01	1·97	
				250	1244	1299	38·35%	2·17	2·11	0·00056
				500	1036	1020	51·59	2·01	2·06	— 20
				500	1005			2·11		
				250	1354			2·05		
				0	2117			1·93		
14	Kupfernitrat $Cu(NO_3)_2$	1·127	13·30	0	986	956		1·39	1·40	
				250	871	872	8·78%	1·45	1·44	0·00016
				500	868	859	10·14	1·43	1·45	04
				500	850			1·47		
				250	874			1·44		
				0	926			1·42		
15	Kupfernitrat $Cu(NO_3)_2$	1·064	6·92	0	1586	1518		1·35	1·39	
				250	1267	1241	18·25%	1·46	1·48	0·00036
				500	1242	1225	19·30	1·47	1·50	08
				500	1209			1·54		
				250	1216			1·51		
				0	1450			1·43		
16	Eisennitrat $Fe_2(NO_3)_6$	1·090	11·51	0	1317	1301		0·94	0·99	
				250	1036	1061	18·44%	1·29	1·25	0·00104
				500	914	906	30·35	1·43	1·46	084
				500	898			1·49		
				250	1086			1·21		
				0	1286			1·04		
17	Eisennitrat $Fe_2(NO_3)_6$	1·046	5·89	0	1935	1900		1·03	1·03	
				250	1727	1731	8·89%	1·15	1·15	0·00048
				500	1607	1612	15·05	1·26	1·26	44
				500	1617			1·26		
				250	1735			1·15		
				0	1865			1·03		
18	Zinknitrat $Zn(NO_3)_2$	1·131	13·42	0	1368	1367		2·55	2·55	
				250	1251	1256	8·12%	2·67	2·67	0·00048
				500	1185	1186	13·24	2·77	2·77	40
				500	1187			2·77		
				250	1261			2·67		
				0	1366			2·55		

Nr.	Substanz	s	P	Π	Widerstand beobachtet	Widerstand Mittelwerthe	$-q$	Polarisation beobachtet	Polarisation Mittelwerthe	$\frac{dp}{\Pi}$
19	Zinknitrat $Zn(NO_3)_2$	1·068	6 99	0	2483	2500		2·46	2·53	
				250	2162	2181	12·76%	2·73	2·73	0·00080
				500	2118	2109	15·64	2·73	2·79	24
				500	2100			2·86		
				250	2200			2·73		
				0	2517			2·60		
20	Nickelnitrat $Ni(NO_3)_2$	1·120	13·00	0	1116	1105		1·94	1·88	
				250	987	984	10·95%	2·01	2·00	0 00048
				500	955	956	13·48	2·01	2 01	04
				500	957			2·01		
				250	981			2·00		
				0	1094			1·83		
21	Nickelnitrat $Ni(NO_3)_2$	1·062	6·76	0	1580	1568		1·89	1·87	
				250	1445	1424	9·18%	1·89	1·87	0·00000
				500	1306	1303	16·89	1·89	1·89	08
				500	1301			1·89		
				250	1404			1·85		
				0	1556			1·85		
22	Magnesiumnitrat $Mg(NO_3)_2$	1·080	10·51	0	1405	1415		2·56	2·56	
				250	1246	1181	16·53%	2·56	2·56	0·00000
				500	1090	1091	22·89	2·56	2·56	00
				500	1092			2·56		
				250	1116			2·56		
				0	1426			2·56		
23	Magnesiumnitrat $Mg(NO_3)_2$	1·041	5·47	0	2649	2620		1·42	1·42	
				250	2333	2271	13·32%	1·42	1·42	0·00000
				500	2140	2142	18·24	1·42	1·42	00
				500	2144			1·42		
				250	2209			1·42		
				0	2592			1·42		
24	Ammonimnitrat NH_4NO_3	1·024	5·84	0	1776	1787		2·40	2·44	
				250	1642	1645	7·94%	2·50	2·50	0·00024
				500	1553	1555	12·97	2·54	2·54	16
				500	1557			2·54		
				250	1648			2·50		
				0	1798			2·48		

Nr.	Substanz	*s*	*P*	Π	Widerstand beobachtet	Widerstand Mittelwerthe	—*q*	Polarisation beobachtet	Polarisation Mittelwerthe	$\frac{dp}{\Pi}$
III. Chlorwasserstoffsäure und Chloride.										
25	Salzsäure HCl	1·050	10·17	0	1140	—	—	1·46	—	—
				250	335			1·45		
				500	291			1·40		
				250	385			1·38		
				0	1286			1·48		
26	Kupferchlorid $CuCl_2$	1·206	18·78	0	1351	1313		0·69	0·72	
				250	1233	1239	5·63%	0·75	0·75	0·00012
				500	1197	1204	8·29	0·77	0·76	04
				500	1212			0·75		
				250	1245			0·75		
				0	1275			0·75		
27	Kupferchlorid $CuCl_2$	1·066	7·20	0	2518	2500		0·80	0·80	
				250	2310	2314	7·44%	0·87	0·85	0·00020
				500	2270	2252	9·92	0·80(?)	0·83	—0·00008
				500	2234			0·87		
				250	2318			0·84		
				0	2482			0 80		
28	Eisenchlorid Fe_2Cl_6	1·133	15·16	0	1516	1505		0·52	0·52	
				250	1413	1427	5·18%	0·60	0·58	0·00024
				500	1342	1366	9·23	0·74	0·67	36
				500	1391			0·60		
				250	1441			0 56		
				0	1494			0·52		
29	Eisenchlorid Fe_2Cl_6	1·049	5·81	0	2211	2177		0·52	0·59	
				250	1706	1720	20·99%	0·88	0·88	0·00116
				500	1569	1536	28·54	0·88	0·91	012
				500	1543			0·94		
				250	1735			0·88		
				0	2143			0·67		
30	Zinkchlorid $ZnCl_2$	1·177	19·07	0	1433	1442		2·08	2·06	
				250	1320	1329	7·83%	2·05	2·04	—0·00008
				500	1263	1265	12·26	2·05	2·05	+0·00004
				500	1268			2·05		
				250	1338			2 04		
				0	1451			2·04		

Nr.	Substanz	s	P	Π	Widerstand beobachtet	Widerstand Mittelwerthe	$-q$	Polarisation beobachtet	Polarisation Mittelwerthe	$\frac{dp}{\Pi}$
31	Zinkchlorid $ZnCl_2$	1·066	7·31	0	1998	1995		2·08	2·06	
				250	1594	1565	21·55%	2·02	2·01	—0·00020
				500	1420	1420	28·82	1·98	1·98	—0·00012
				500	1420			1·98		
				250	1536			2·00		
				0	1992			2·05		
32	Nickelchlorid $NiCl_2$	1·200	18·16	0	1120	1116		1·55	1·56	
				250	1057	1060	5·02%	1·60	1·60	0·00016
				500	1031	1031	7·62	1·61	1·61	04
				500	—					
				250	1063			1·60		
				0	1113			1·58		
33	Nickelchlorid $NiCl_2$	1·069	7·00	0	2007	2025		1·69	1·72	
				250	1897	1916	5·38%	1·77	1·75	0·00012
				500	1887	1887	6·81	1 73	1 73	—0·00008
				250	1935			1·73		
				0	2043			1·75		
34	Magnesiumchlorid $MgCl_2$	1 100	13·27	0	1060	1020		1·81	1·89	
				250	934	933	8·53%	1·86	1·91	0 00008
				500	917	919	9·90	1·86	1·87	—0·00012
				500	921			1·89		
				250	932			1·96		
				0	980			1·97		
35	Magnesiumchlorid $MgCl_2$	1·038	5 09	0	2064	2026		2·00	2·07	
				250	1755	1703	15·94%	2·13	2·12	0·00020
				500	1538	1538	24·08	2·13	2·13	04
				500	1538			2·13		
				250	1652			2·12		
				0	1988			2·15		

IV. Essigsäure, Acetate und Oxalsäure.

Nr.	Substanz	s	P	Π	Widerstand beobachtet	Widerstand Mittelwerthe	$-q$	Polarisation beobachtet	Polarisation Mittelwerthe	$\frac{dp}{\Pi}$
36	Essigsäure $C_2H_4O_2$	1·014	10·00	0	915	918		2·09	2·10	
				250	758	779	15·14%	2·15	2·15	0 00020
				500	717	713	22·33	2·15	2·16	04
				500	709			2·17		
				250	801			2·15		
				0	921			2·11		

Nr.	Substanz	s	P	Π	Widerstand		$-q$	Polarisation		$\frac{dp}{\Pi}$
					beobachtet	Mittelwerthe		beobachtet	Mittelwerthe	
37	Essigsäure $C_2H_4O_2$	1·005	4·00	0	1136	1204		2·27	2·29	
				250	1040	1085	9·88%	2·39	2·39	0·00040
				500	906	998	17·10	2·39	2 39	00
				500	1001			2·39		
				250	1131			2·39		
				0	1273			2·32		
38	Kupferacetat $(Cu(C_2H_3O_2)_2$	1·028	5·02	0	2770	2695		0·90	1·08	
				250	2309	2312	14·21%	1·35	1·35	0·00108
				500	2107	2107	21·81	1·51	1·51	064
				500	2108			1·51		
				250	2316			1·35		
				0	2620			1 26		
39	Zinkacetat $Zn(C_2H_3O_2)_2$	1·115	15·25	0	4017	4100		2·37	2·31	
				250	3742	3756	8·39%	2·41	2·41	0·00040
				500	3467	3477	15·19	2·45	2·45	16
				500	3487			2·45		
				250	3770			2·41		
				0	4183			2·25		
40	Zinkacetat $Zn(C_2H_3O_2)_2$	1·050	6·10	0	1213	1209		2·22	2·23	
				250	1071	1084	10·33%	2·29	2·26	0·00012
				500	984	985	18·52	2·36	2·36	40
				500	986			2·36		
				250	1098			2·24		
				0	1205			2·24		
41	Nickelacetat $Ni(C_2H_3O_2)_2$	1·043	5·88	0	1844	1820		1 67	1·67	
				250	1690	1683	7·52%	1·80	1·80	0·00052
				500	1563	1564	14·05	1·91	1·91	44
				500	1565			1·91		
				250	1676			1·80		
				0	1796			1·67		
42	Magnesiumacetat $Mg(C_2H_3O_2)_2$	0·008	1·00	0	294·5	302·1		2·45	2 45	
				250	290·0	295·6	2·15%	2·45	2·45	0·00000
				500	287·1	287·5	4·83	2·45	2·45	00
				500	288·0			2·45		
				250	301·3			2·45		
				0	309·7			2·45		

Nr.	Substanz	s	P	Π	Widerstand beobachtet	Widerstand Mittelwerthe	$-q$	Polarisation beobachtet	Polarisation Mittelwerthe	$\frac{dp}{\Pi}$
43	Oxalsäure $C_2H_2O_4$	1·035	7·14	0	1495	1538		1·31	1·31	
				250	1303	1329	13·59%	1·31	1·31	0·00000
				500	1165	1166	24·18	1·31	1·31	00
				500	1167			1·31		
				250	1355			1·31		
				0	1581			1·31		
44	Oxalsäure $C_2H_2O_4$	1·014	2·86	0	2584	2586		1·36	1·36	
				250	2056	2094	19·03%	1·36	1·36	0·00000
				500	1900	1898	26·60	1·26	1·26	—0·00040
				500	1897			1·26		
				250	2132			1·36		
				0	2588			1·36		

In diesen Tabellen sind die Widerstandsänderungen in Procenten des Anfangswiderstandes bei 0 Atmosphären angegeben; schon aus diesen Zahlen ersieht man, dass, wenn man die Drucke als Abscissen und als zugehörige Ordinaten die Widerstände aufträgt, die Verbindungslinien der erhaltenen Punkte nicht linear verlaufen werden, sondern dass die Abhängigkeit des Widerstandes vom Druck durch eine Gleichung $w = w_0 + ax + bx^2 = w_0(1 + \alpha x + \beta x^2)$ ausgedrückt werden muss. Ich habe aus den drei Mittelwerthen die einzelnen Coëfficienten nach diesen Gleichungen berechnet und will dieselben für die verschiedenen Substanzen in der folgenden Tabelle angeben.

Nr.	Substanz	a	b	α	β
1	Schwefelsäure ..	—0·263	+0·000103	—0 0006242	+0·0000002445
2	Schwefelsäure ..	0·424	0353	05670	04721
3	Kupfersulfat	0·482	0224	04386	02038
4	Kupfersulfat	1·840	1370	05146	03831
5	Eisensulfat	0·980	0496	03574	01809
6	Eisensulfat	3·046	1624	06302	03360
7	Zinksulfat	3·019	2771	10594	09724
8	Zinksulfat	5·852	6017	12744	13103
9	Nickelsulfat	3 844	4240	14407	15892

Nr.	Substanz	a	b	α	β
10	Nickelsulfat	—2·735	+0·002629	—0·0006183	+0·0000005943
11	Natriumsulfat ...	0·849	0980	05326	06148
12	Natriumsulfat ...	1·362	1458	05153	05512
13	Salpetersäure ...	4 290	4232	20360	20085
14	Kupfernitrat	0·474	0560	04958	05858
15	Kupfernitrat	1·627	2084	10718	13730
16	Eisennitrat	1·133	0684	08705	05255
17	Eisennitrat	0 766	0400	04084	02105
18	Zinknitrat......	0·526	0328	03847	02399
19	Zinknitrat......	1·770	1976	07080	07904
20	Nickelnitrat	0·670	0744	06063	06733
21	Nickelnitrat ...	0·620	0184	03954	01173
22	Magnesiumnitrat	1·227	1156	08668	08166
23	Magnesiumnitrat	1·839	1764	07017	06731
24	Ammoniumnitrat	0·673	0416	03766	02328
25	Salzsäure	—	—	—	—
26	Kupferchlorid ...	0·375	0316	02856	02407
27	Kupferchlorid ...	0 992	0992	03968	03968
28	Eisenchlorid	0·347	0140	02305	00909
29	Eisenchlorid	2·410	2336	11070	10730
30	Zinkchlorid.....	0·551	0396	03821	02746
31	Zinkchlorid.....	2·290	2280	11478	11428
32	Nickelchlorid ...	0·281	0220	02517	01970
33	Nickelchlorid ...	0·596	0640	02943	03160
34	Magnesium-chlorid	0·494	0584	04843	05725
35	Magnesium-chlorid	1·604	1256	07917	06199
36	Essigsäure	0·698	0576	07603	06274
37	Essigsäure	0·540	0256	04483	02125
38	Kupferacetat....	1·885	1420	06994	05269
39	Zinkacetat	1·506	0520	03673	01268
40	Zinkacetat	0·548	0200	04532	01654
41	Nickelacetat	0·584	0144	03209	00791
42	Magnesiumacetat	0·023	—0·000013	00761	— 00430
43	Oxalsäure	0·928	+0·000368	06034	+ 02392
44	Oxalsäure	2·561	2372	09903	09172

Fasst man die erhaltenen Beobachtungsresultate zusammen, so lässt sich vor Allem feststellen, dass bei allen untersuchten Flüssigkeiten ohne Ausnahme mit zunehmendem Drucke eine

Verminderung des Widerstandes eintrat. Wie die Procentzahlen und ebenso die berechneten Coëfficienten ergeben, geht die Abnahme des Widerstandes nicht dem Drucke proportional vor sich, sondern wir finden, dass die Änderungen desselben zwischen 0 und 250 Atmosphären immer grösser sind als zwischen 250 und 500 Atmosphären. Eine Ausnahme davon scheint nur das Magnesiumacetat zu machen, welches bei höheren Drucken eine stärkere Änderung zeigte als bei niederen; jedoch kann ich gerade den Messungen dieser Substanz keine Genauigkeit zusprechen; sie gehört zu jenen Substanzen, bei welchen, wie schon früher erwähnt wurde, ein Stillstehen der Nadel nicht erwartet werden konnte. Ich will hier auch die übrigen Flüssigkeiten angeben, deren Messungen aus demselben Grunde keinen Anspruch auf Genauigkeit machen können; es sind dies die Salpeter- und Chlorwasserstoffsäure und das Natriumsulfat. Bei letzterem wirkte besonders die Bildung von NaOH störend, wesshalb nachher an Stelle der Natrium- die Magnesiumverbindungen untersucht wurden. Bei der Salzsäure habe ich nur die beobachteten Werthe angegeben. Man ersieht daraus, dass die anfängliche Änderung sehr bedeutend ist, die Änderung zwischen 250 und 500 Atmosphären dagegen sehr gering; eine Angabe der Procentzahlen und Coëfficienten schien mir überflüssig. Eine grössere Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit haben wohl die Messungen der Salpetersäure; auch sie zeigen grössere Änderungen des Widerstandes als alle anderen Substanzen. Im Allgemeinen kann ich sagen, dass die Elektrolyte, bei welchen an der Kathode eine Gasentwicklung stattfand, wie dies eben bei den genannten Substanzen und auch bei den anderen Säuren der Fall war, schwieriger zu untersuchen waren. Die Ursache hievon liegt wohl in complicirten secundären chemischen Vorgängen, die den Werth der Polarisation fortwährend ändern und dadurch ein Schwanken der Galvanometernadel hervorrufen.

Was den Einfluss der Concentration der Lösung betrifft, so haben die gemachten Beobachtungen kein einheitliches Resultat ergeben. Es zeigte sich nämlich, dass nur bei einem Theil, und zwar bei der Mehrzahl der untersuchten Flüssigkeiten die weniger concentrirte Lösung bei einer Druck-

erhöhung um 500 Atmosphären eine stärkere Abnahme des Leitungswiderstandes aufwies. Dieses Ergebniss hatte auch Fink bei den drei Substanzen gefunden, die er untersucht hat, nämlich bei der Salzsäure, dem Chlornatrium und dem Zinksulfat.

Ich habe zwar von diesen nur das letztere bei zwei verschiedenen Concentrationen beobachtet, aber ich glaube, meine weiteren Resultate lassen sich mit diesen theilweise ganz gut in Zusammenhang bringen.

Es hat sich nämlich ergeben, dass alle vier untersuchten Zinksalze diese Eigenschaft besitzen, ausserdem sämmtliche Chloride, nur mit Ausnahme des Chlornickels; aber auch dieses zeigte zwischen 0 und 250 Atmosphären in geringerer Concentration eine stärkere Änderung des Widerstandes, erst über 250 Atmosphären trat das Umgekehrte ein. Bei den anderen Substanzen kann eine gewisse Regelmässigkeit in ihrem Verhalten nicht gefunden werden; von den Kupfersalzen z. B. verhielten sich nur das Nitrat und Chlorid nach der obigen Regel, das Sulfat dagegen nur bis zu 250 Atmosphären. Bei höheren Drucken nahm der Widerstand der concentrirteren Lösung stärker ab als der der weniger concentrirten.

Ich muss hier noch hervorheben, dass ich im Allgemeinen bedeutend grössere Werthe für die Widerstandsänderungen erhielt als Fink. Die grössten von Fink gefundenen Werthe von q betrugen nicht ganz 7% (für $ZnSO_4$), während ich für diese Substanz eine Abnahme von $30 \cdot 96\%$ fand. Andere Flüssigkeiten ergaben noch grössere Werthe. Den kleinsten Werth von q erhielt ich beim Chlornickel, dessen Widerstandsänderung für 500 Atmosphären nur $6 \cdot 81\%$ betrug.

Wenn wir jetzt die Resultate, die sich aus den Polarisationsbeobachtungen ergeben haben, ins Auge fassen, so finden wir hier eine noch grössere Unregelmässigkeit in dem Verhalten der einzelnen Substanzen wie bei den Widerstandsmessungen. Am wichtigsten ist daher das allgemeine Ergebniss dieser Beobachtungen, dass nämlich eine Druckänderung auch eine Änderung der Polarisation zur Folge hat. Die vorhandenen Unregelmässigkeiten sind wohl erklärlich; denn abgesehen davon, dass Polarisationsmessungen

überhaupt schwer auszuführen sind (besonders bei einigen dieser Substanzen), so haben wir es doch hier in den meisten Fällen mit sehr geringen Änderungen der Polarisationswerthe zu thun, deren Bestimmung auch nur einen geringen Grad von Genauigkeit beanspruchen kann. Ja es ist wahrscheinlich, dass bei einigen Flüssigkeiten, die gar keine Änderung der Werthe zeigten, doch solche vorhanden waren, die sich jedoch infolge ihrer Kleinheit der Beobachtung am Galvanometer entzogen haben.

Wenn man die einzelnen beobachteten Polarisationswerthe betrachtet, so findet man, dass mit Ausnahme weniger Flüssigkeiten immer ein Steigen der Polarisation mit dem Drucke stattfindet. Ein regelmässiges Sinken wurde nur beim Zinkchlorid und bei der verdünnteren Oxalsäure bemerkt, ausserdem bei den ungenauen Beobachtungen der Salzsäure. Bei der weniger concentrirten Schwefelsäure ist ebenfalls ein Fallen der Polarisation zu verzeichnen, welches sich aber bei der darauffolgenden Druckerniedrigung fortsetzt. Das Entgegengesetzte davon trat beim Magnesiumchlorid ein: Die Werthe stiegen sowohl bei der Zunahme, als auch bei der Abnahme des Druckes continuirlich. Das Magnesiumnitrat zeigte gar keine Änderung, ebenso das Magnesiumacetat und die concentrirtere Oxalsäure. Bei einigen Flüssigkeiten wieder änderten sich die Polarisationswerthe nur bis 250 Atmosphären, weiterhin nicht mehr; im Allgemeinen kann gesagt werden, dass die Änderungen mit zunehmenden Drucken kleiner wurden; bei einigen Substanzen werden sie Null, bei einigen sogar negativ.

Die grössten Unregelmässigkeiten in den Änderungen der Polarisation wurden bei der Salpetersäure beobachtet. Es ist dies eine Substanz, deren elektrolytische Zersetzung von einer Reihe secundärer Reactionen begleitet ist, die vielleicht im Laufe der Zeit oder bei der Druckänderung wechseln und daher unregelmässige Änderungen der Polarisation hervorrufen. Dies wären die auffallendsten Erscheinungen, die sich bei den Beobachtungen ergeben haben.

Wenn wir die Einflüsse, welche die Temperatur und der Druck auf die Leitungsfähigkeit von Flüssigkeiten und die Polarisation ausüben, mit einander vergleichen, so lässt sich

Folgendes sagen: Sowohl Temperatur als Druck bewirken eine Vergrösserung der Leitungsfähigkeit, dagegen wirken sie beide in entgegengesetzter Weise auf die galvanische Polarisation. Wie die Messungen von Herrn Fr. Exner ergeben haben, hat eine Temperaturerhöhung ein Sinken der Polarisation zur Folge, während aus den vorliegenden Untersuchungen im Allgemeinen eine Zunahme der Polarisation mit dem Drucke ersichtlich ist.

Im ersteren Falle wurde die Erscheinung auf die im Elektrolyten vor sich gehenden chemischen Reactionen zurückgeführt, und auch im letzteren Falle ist dies wohl möglich. Aus den Beobachtungen lässt sich unmittelbar schliessen, dass der Wärmewerth, welcher der Rückbildung des zersetzten Elektrolyten entspricht, mit zunehmendem Drucke eine Änderung erfahren muss, denn durch die Grösse desselben ist ja die elektromotorische Kraft der Polarisation gegeben. Schon unter gewöhnlichen Umständen werden für manche Substanzen grössere Polarisationswerthe gefunden als die thermischen Werthe der einfachen chemischen Reactionen ergeben; dieselben lassen sich dann immer auf secundäre chemische Vorgänge zurückführen, bei welchen ein Wärmeverbrauch stattfindet. Ein solcher secundärer Process ist z. B. die Bildung von Wasserstoffsuperoxyd oder anderen Superoxyden.

Zum Schlusse will ich noch einen Versuch erwähnen, den ich mit einer vierprocentigen alkoholischen Lösung von Ammoniumnitrat ausgeführt habe. Die Beobachtungen waren aber infolge des stetigen Wachsens des Ausschlages der Nadel so schwierig, dass ich gar keine Zahlenwerthe angeben kann. Es liess sich nur feststellen, dass auch diese Lösung eine Änderung des Widerstandes in demselben Sinne, also eine Abnahme, zeigte. Dieselbe betrug bei einer Druckerhöhung um 500 Atmosphären ungefähr 5%, wie die beiläufigen Messungen ergeben haben. Eine wässerige Lösung desselben Salzes, die ich zum Vergleich untersuchte, verhielt sich ganz regelmässig, wie aus der Tabelle (Nr. 24) zu ersehen ist.

Aktinische Wärmetheorie und chemische Äquivalenz

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1894.)

§. 1. In einer kürzlich erschienenen Abhandlung von W. Wien[1] fand ich die Angabe, dass nach Maxwell's Lichttheorie eine ebene Ätherwelle auf die getroffene Flächeneinheit, welche sie zurückwirft, einen Druck ausübe, gleich dem doppelten Betrage der Energie in der Volumeinheit der einfallenden Welle. Dies gibt mir Veranlassung, auf die in früheren Publicationen erwähnte Vorstellung zurückzukommen, welche ich mir vom Wärmezustande der Körper überhaupt und insbesondere der Gase gebildet habe.

Ich nehme an, ein Körper bestehe aus unzähligen Atomen, welche durch Leere, d. h. nur mit Äther erfüllte Zwischenräume von einander getrennt sind. Ein Atom ist kein blosser Punkt, sondern nimmt einen Raum ein und hat eine gewisse Gestalt und innere Structur; dasselbe ist aus kleineren Theilen zusammengefügt, unterscheidet sich aber von einem Körper dadurch, dass es dem Äther gegenüber sich als ein Continuum verhält und nur an der Aussenfläche mit diesem in Contact steht. Ein Körper, dessen Atome unter sich gleich sind, ist ein Grundstoff. Die Atome können im Allgemeinen Licht- und Wärmestrahlen durch ihre Substanz hindurch, ähnlich wie es der Äther thut, mit einer durch ihre innere Structur bedingten Geschwindigkeit fortpflanzen; für den weitaus grössten Theil der bei gewöhnlicher Temperatur zwischen den Körpern aus-

[1] Wiedemann's Annalen, Bd. 52, S. 147.

getauschten Wärmestrahlen aber sind die Atome undurchlässig oder opak, d. h. sie reflectiren dieselben an ihren Aussenflächen fast vollständig.

Indem die in einen Körper eindringenden Wärmestrahlen durch zahllose Reflexionen an den Aussenflächen der getroffenen Atome nach allen Richtungen in demselben diffundirt werden, muss er in seinem Volumen beständig eine gewisse, zwischen seinen Atomen hin- und hergeworfene und hiedurch bis zu einem entsprechenden Betrage angesammelte Strahlenmenge enthalten, welche nach meiner Anschauung den wesentlichen Theil seiner Wärmemenge ausmacht.

Denkt man sich einen Körper in einem leeren Raume befindlich und gleichmässig von allen Seiten her Strahlen empfangend, für welche seine Atome opak sind, dann muss derselbe, sobald er bereits durch und durch mit Strahlen gesättigt ist, fortwährend ebensoviel davon nach aussen abgeben, als er gleichzeitig von aussen empfängt; er hat in diesem Falle eine constante Temperatur. Hienach wird die absolute Temperatur des Körpers durch die Strahlenmenge gemessen, welche in einer bestimmten Zeit normal durch die Einheit seiner Grenzfläche aus- und eintritt und welche daher auch in seinem Volumen in der gleichen Zeit normal durch jede darin angenommene Flächeneinheit gehen muss.

§. 2. Bei einer gegebenen Temperatur wird nach dem Gesagten die Volumeinheit eines Körpers eine desto grössere Strahlenmenge enthalten, je kleiner die Diffusionsgeschwindigkeit der dieselbe ausmachenden Strahlen ist. Diese Geschwindigkeit ist aber, nach einer der kinetischen Gastheorie entlehnten Bezeichnung, der mittleren Weglänge der hin- und hergeworfenen Strahlen proportional. Bedeutet r den mittleren Abstand der unter sich gleichen Atome und e die Aussenfläche eines solchen, so ist, die Atome als kugelförmig gedacht, die mittlere Weglänge und also die Diffusionsgeschwindigkeit der Strahlen proportional mit $\frac{r^3}{e}$, folglich die in der Volumeinheit angesammelte Strahlenmenge proportional mit $\frac{e}{r^3}$, und man kann für die absolute Temperatur T diese Menge

$$= \frac{CeT}{r^3}$$

setzen, wo C ein constanter Factor ist. Das Volumen v muss dann eine Strahlenmenge

$$= \frac{CevT}{r^3}$$

oder, wenn n die Zahl der Atome in v und daher $nr^3 = v$ ist,

$$= CneT$$

enthalten. Entspricht das Volumen v der Gewichtseinheit, so stellt Cne die specifische Strahlenwärme des bezüglichen Stoffes vor; bezeichnen wir diese mit c, so haben wir die Gleichung

$$c = Cne.$$

Ist c' die specifische Strahlenwärme eines zweiten Stoffes und haben n' und e' die entsprechende Bedeutung, so besteht die Proportion

$$c : c' = ne : n'e',$$

d. h. die specifischen Strahlenwärmen beider Stoffe verhalten sich wie die Summen der Aussenflächen der in der Gewichtseinheit vorhandenen Atome.

Hat ein Atom des einen Stoffes die Masse m, ein Atom des anderen die Masse m', so ist $nm = n'm'$ und daher

$$c : c' = \frac{e}{m} : \frac{e'}{m'}.$$

Nimmt man von beiden Stoffen solche Gewichtsmengen a und a', welche gleich viel Atomaussenfläche, also bei derselben Temperatur auch gleich viel Strahlenwärme enthalten und insofern thermisch äquivalent sind, so hat man

$$a : a' = \frac{m}{e} : \frac{m'}{e'}$$

und hiemit ergibt sich nach dem Vorigen:

$$c : c' = a' : a,$$

d. h. die specifischen Strahlenwärmen beider Stoffe verhalten sich wie umgekehrt ihre thermischen Äquivalentgewichte. Es ist daher

$$ac = a'c',$$

d. h. das Product aus dem thermischen Äquivalentgewichte und der specifischen Strahlenwärme hat für jeden den gleichen Stoff Werth.

§. 3. Wenn ein Wärmestrahl, wie Maxwell annimmt und andere Physiker für wahrscheinlich zu halten geneigt scheinen, an einem getroffenen und ihn reflectirenden Flächenstücke einen seiner Intensität proportionalen Druck erzeugt, so müssen die Atome eines warmen Körpers vermöge der zwischen ihnen diffundirten Strahlenmenge einen ihrer Intensität entsprechenden Druck auf einander ausüben, gerade so, als wären sie mit einer Repulsivkraft begabt. In einem gewöhnlichen Gase sind dann die Atome nicht mehr, wie man in der kinetischen Theorie postulirt, vollkommen frei beweglich; es erscheint denkbar, dass sie, anstatt wie hin- und hergeworfene elastische Kugeln unmittelbar auf einander oder auf die einschliessenden Wände zu stossen, unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Bestrahlung in mittleren Abständen von einander sich zu erhalten suchen, ähnlich wie man dies für die Atome flüssiger und fester Körper auf Grund der gangbaren Hypothesen allgemein annimmt.

Einen von Wärmestrahlen ausgeübten Druck kann man sich nun in der Art erzeugt denken, dass man sich vorstellt, sie seien die Wege sehr kleiner, von warmen Körpern ausgesendeter Theilchen, welche mit grosser constanter Geschwindigkeit geradlinig fortfliegen, bis sie auf ein Hinderniss treffen, von dem sie zurückprallen. Die in einem Körper bei der Temperatur T angesammelte Strahlenmenge cT ist dann nichts Anderes, als die Summe der lebendigen Kräfte solcher hypothetisch zwischen seinen Atomen hin- und hergeworfenen Theilchen. Nach den Grundsätzen der kinetischen Gastheorie muss in diesem Falle, wenn v das Körpervolumen, x den darin von der Substanz der Atome erfüllten Raum, also $v—x$ die Summe der leeren Zwischenräume und p den Strahlendruck bedeutet, die Gleichung

$$p(v-x) = \frac{2}{3} cT$$

bestehen; denkt man sich aber die Strahlenmenge cT in Wärmeeinheiten ausgedrückt und ist A der Verwandlungsfactor, so hat man

$$p(v-x) = \frac{2}{3} AcT.$$

Für die gewöhnlichen Gase kann der von der Substanz der Atome eingenommene Raum x gegen das Gesammtvolumen v als sehr klein vernachlässigt werden; für solche erhält man daher

$$pv = \frac{2}{3} AcT$$

und sonach lässt sich, wenn v die Gewichtseinheit enthält, die im gewöhnlichen Wärmemass ausgedrückte specifische Strahlenwärme auf die einfachste Weise aus der Formel

$$c = \frac{3pv}{2AT}$$

berechnen. Setzt man $A = 426$ und $T = 273$, so folgt für die atmosphärische Luft mit den bekannten Werthen von p und v:

$$c = 0 \cdot 1030;$$

wir werden von diesem Resultate in der Folge Gebrauch machen.

Unter dem Einflusse der gegenseitigen Bestrahlung können die Atome eines Körpers natürlich nicht in absoluter Ruhe sein, sondern müssen sich gleichfalls bewegen und daher eine entsprechende Summe lebendiger Kräfte besitzen; diese wird, wenn n die Zahl der Atome der Gewichtseinheit, m die Masse und γ^2 das maximale Geschwindigkeitsquadrat eines Atoms bedeutet, durch

$$\frac{nm\gamma^2}{2} = \frac{\gamma^2}{2g}$$

ausgedrückt, wo g die Beschleunigung der Schwere und folglich $nmg = 1$ ist.

Die Gesammtwärme w eines Körpers wird nach dem Gesagten neben seiner Strahlenwärme cT noch das thermische

Äquivalent der lebendigen Kräfte seiner Atome umfassen, und es ergibt sich daher die Gleichung[1]

$$w = cT + \frac{nm\gamma^2}{2A}.$$

Für ein ideales Gas kann man, wenn s dessen specifische Wärme bei constantem Volumen ist,

$$w = sT$$

setzen. Hiemit erhält man

$$s = c + \frac{nm\gamma^2}{2AT}$$

oder, wenn man für c den oben gefundenen Werth einsetzt:

$$s = \frac{3pv + nm\gamma^2}{2AT}.$$

Die specifische Wärme bei constantem Drucke ist für ein solches Gas

$$= s + \frac{pv}{AT};$$

bezeichnet k das Verhältniss beider specifischen Wärmen, so wird demnach:

$$k = \frac{5pv + nm\gamma^2}{3pv + nm\gamma^2}.$$

Für Luft, Stickstoff, Sauerstoff und Wasserstoff ist mit grosser und schwerlich zufälliger Annäherung

[1] Da die Atome ohne Zweifel nicht absolut starr sind, sondern unter der Einwirkung der zwischen ihnen diffundirten Strahlenmenge sich im Zustande einer inneren Erschütterung befinden, so müssen sie aus diesem Grunde eine absorbirte Summe lebendiger Kräfte in sich enthalten; diese scheint aber nach Allem immer sehr klein zu sein und ist in obiger Gleichung ausser Betracht gelassen. Übrigens ist anzunehmen, dass die Atome vermöge jener inneren Erschütterung ihrer Substanz selbständig Strahlen aussenden, also ein eigenes Emissionsvermögen besitzen, und es liegt dann nahe, zwischen dem eigenthümlichen Licht- und Wärmespectrum jedes Stoffes und der besonderen inneren Structur seiner Atome einen ursächlichen Zusammenhang zu vermuthen.

$$k = 1 \cdot 4 = \frac{7}{5},$$

und mit diesem Werthe ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung:

$$\frac{nm\gamma^2}{2} = pv;$$

der Druck p ist also für die genannten Gase gleichbedeutend mit der Dichte ihrer kinetischen Energie, und man hat für dieselben die einfachen Ausdrücke:

$$w = cT + \frac{pv}{A} = \frac{5pv}{2A},$$

$$s = c + \frac{pv}{AT} = \frac{5pv}{2AT},$$

und zur Bestimmung ihrer Atomgeschwindigkeit folgt nach dem Vorigen:

$$\gamma^2 = 2gpv.$$

Dass der Druck p eines idealen Gases identisch sei mit der Dichte seiner kinetischen Energie, erscheint mir bei der zu Grunde liegenden Anschauung als nothwendig. Wenn sie im Wesen richtig ist, kann das Verhältniss k für ein unmittelbar aus Atomen in dem oben bezeichneten Sinne gebildetes ideales Gas keinen anderen Werth als 1·4 haben,[1] und es muss dann

[1] Für den Quecksilberdampf haben zwar Kundt und Warburg durch Schallversuche $k = \frac{5}{3}$ gefunden, und man hat darin einen glänzenden Beweis der Richtigkeit der kinetischen Theorie erbicken zu können geglaubt. Allein diese Theorie verlangt bei diesem Werthe den Zustand eines idealen Gases, und als ein solches kann man einen schon ganz oder nahe gesättigten Dampf nicht ohne Beweis ansehen. Eine nahe Befolgung des Mariotte'schen Gesetzes ist in dieser Hinsicht für sich allein nicht entscheidend. Würde man in obiger Gleichung für k den Werth $\frac{5}{3}$ setzen, so ergäbe sich die kinetische Energie

$$\frac{nm\gamma^2}{2} = 0,$$

ein Resultat, welches sich von selbst ausschliesst.

die Constitution der vorhin genannten Gase jener Bedingung wirklich entsprechen. Wir werden eine Bestätigung dessen weiterhin in ihrer specifischen Wärme finden.

§. 4. Im Bisherigen war vorausgesetzt, dass die einen Körper constituirenden, durch leere Zwischenräume getrennten Partikeln eben schon seine Atome seien, und dies dürfte für die freien Grundstoffe im Allgemeinen zutreffen. Es ist aber auch und insbesondere bei Gasen der Fall denkbar, dass die nächsten constituirenden Bestandtheile eines Körpervolumens keine Atome, sondern selbst noch kleine Körperchen sind und als solche nicht nur an ihrer äusseren Begrenzung, sondern auch in ihrem Inneren dem Äther Berührungspunkte und also den eindringenden Strahlen Angriffspunkte darbieten. Derartige kleine Körperchen mögen Molekeln, die aus solchen aufgebauten Körper thermisch zusammengesetzte und dagegen jene, welche unmittelbar aus Atomen gebildet sind, thermisch einfache heissen.

Nach dem Gesagten hat jede Molekel eine bestrahlte Aussenfläche und eine Summe bestrahlter Innenflächen. Bezeichnen wir für einen Körper, dessen Temperatur T sei, mit cT die zwischen den Aussenflächen und mit $c_0 T$ die zwischen den Innenflächen seiner Molekeln hin- und hergeworfene Strahlenmenge, so enthält er im Ganzen eine Strahlenmenge

$$= (c+c_0)T,$$

und $c+c_0$ ist seine specifische Strahlenwärme.

Ist der gedachte Körper ein Gas und kann man dasselbe vermöge der gegenseitigen Abstände seiner Molekeln als ein ideales betrachten, so ist nach dem Vorigen die kinetische Energie der als Ganze bewegten Molekeln $= pv$ und daher die Gesammtwärme des Gases

$$w = (c+c_0)T + \frac{pv}{A},$$

wobei angenommen ist, dass die Summe der lebendigen Kräfte der Atome innerhalb der Molekeln gegen diejenige der als Ganze bewegten Molekeln als unbedeutend zu vernachlässigen sei. Diese Annahme erscheint als zulässig, weil in gegenwärtiger

Hypothese von heftigen Zusammenstössen der Molekeln ohnehin nicht die Rede sein kann.

Demnach ist jetzt die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen

$$s = c + c_0 + \frac{pv}{AT}$$

und das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen

$$k = \frac{A(c+c_0)+2pv}{A(c+c_0)+pv};$$

setzt man hier der Bedeutung von c gemäss wieder

$$c = \frac{3pv}{2AT},$$

so ergibt sich die bemerkenswerthe Gleichung

$$k = \frac{7+3\frac{c_0}{c}}{5+3\frac{c_0}{c}},$$

und sonach kann man, wenn k bekannt ist, den Werth des Quotienten

$$\frac{c_0}{c} = \frac{7-5k}{3(k-1)},$$

nämlich das Verhältniss der Summe der Aussenflächen zur Summe der Innenflächen aller Molekeln des Gases, folglich, wenn sie unter sich gleich sind, für eine Molekel bestimmen.

Zunächst möge hier die folgende Bemerkung Platz finden. Wenn ein ideales Gas unmittelbar aus Atomen besteht, so darf man erwarten, dass seine specifische Wärme und daher auch k von der Temperatur unabhängig sei. Dies haben die Versuche Regnault's und anderer Physiker für die oben genannten Gase, bei welchen $k = \frac{7}{5}$ und $c_0 = 0$ ist, in der That ergeben

Ist hingegen das Gas thermisch zusammengesetzt, d. h. besteht es aus Molekeln, die man als kleine feste Körperchen ansehen kann, so sind die Atome innerhalb einer Molekel

gegenseitig bewegt und insofern im Besitze einer Summe lebendiger Kräfte, welche vorhin vernachlässigt wurde; dieselbe ist aber nicht nothwendig verschwindend klein und wird jedenfalls mit der Temperatur zunehmen, die specifische Wärme und k werden daher nicht völlig constant, sondern mehr oder weniger mit der Temperatur veränderlich sein. Dies ist der Erfahrung gemäss bei Gasen, für welche k bedeutend kleiner als $\frac{7}{5}$ und folglich c_0 nicht Null ist, wirklich der Fall.

§. 5. Bezeichnet man für zwei thermisch zusammengesetzte Körper, analog wie für einfache, als thermisch äquivalent solche Gewichtsmengen a und a', in welchen die Summe der Aussenflächen der Molekeln gleich gross ist, so besteht für dieselben, wie für thermisch einfache Körper, die bereits aufgestellte Proportion:

$$a : a' = c' : c.$$

Sind beide Körper Gase, welche vom idealen Zustande nicht erheblich abweichen, so hat man für gleiche Temperatur und Spannung:

$$c : c' = v : v'$$

und somit ergibt sich für gewöhnliche Gase überhaupt, sie mögen thermisch einfach oder zusammengesetzt sein,

$$a : a' = \frac{1}{v} : \frac{1}{v'},$$

d. h. die thermischen Äquivalentgewichte der Gase verhalten sich allgemein wie ihre Dichten. In der Chemie gilt der Satz, dass die chemischen Äquivalentgewichte der Gase ihren Dichten proportional sind; man muss also schliessen: Thermisch äquivalente Gewichtsmengen verschiedener Stoffe sind auch chemisch äquivalent.

Die demnach thatsächlich bestehende Proportionalität zwischen thermischem Äquivalentgewicht und Dichte der Gase, welche sich hier unter der Annahme ergab, dass die lebendige Kraft der Atome innerhalb der Molekeln gegen diejenige der als Ganze bewegten Molekeln und um so mehr gegen die im Volumen diffundirte Strahlenmenge nur klein sei, kann als

Beweis gelten, dass diese an sich wahrscheinliche Annahme der Wirklichkeit entspricht. Dies führt aber zu dem Schlusse, dass auch für einen gewöhnlichen festen Körper die Summe der lebendigen Kräfte seiner Atome gegen die in ihm diffundirte Strahlenmenge, also der Überschuss der experimentellen specifischen Wärme, welche S heisse, über die specifische Strahlenwärme nur klein sei und dass man demnach für thermisch einfache feste Körper annähernd

$$S = c$$

setzen kann. Da das Product ac für alle Körper gleich gross sein muss, so ist hiermit die annähernde Gleichheit von aS für die festen Grundstoffe (durchschnittlich nahe $= 6$), nämlich das Gesetz von Dulong und Petit, hinreichend erklärt.

Für thermisch zusammengesetzte feste Körper ist annähernd

$$S = c + c_0 = c\left(1 + \frac{c_0}{c}\right),$$

wobei, wenn a das Äquivalentgewicht eines solchen bedeutet, ac für alle den gleichen Werth wie bei den festen Grundstoffen haben muss. Setzt man demnach $ac = 6$, so wird

$$aS = 6\left(1 + \frac{c_0}{c}\right);$$

der Werth von aS wird daher für thermisch zusammengesetzte Körper um so grösser ausfallen müssen, je grösser c_0 gegen c und also die Summe der Innenflächen der Molekeln des bezüglichen Körpers gegen die Summe ihrer Aussenflächen ist.

Da der Erfahrung gemäss aS für ähnlich constituirte Körper annähernd gleich gross ist, so folgt, dass die Ähnlichkeit der Constitution auf der Übereinstimmung in dem Werthe von $\frac{c_0}{c}$ beruht.

§. 6. Nach dem Vorigen kann die chemische Äquivalenz zweier Stoffmengen, welche miteinander eine chemische Verbindung bilden, nur durch die Gleichheit der strahlenden Flächensumme, welche beide gegen einander ins Spiel setzen, bedingt sein. Haben also zwei Grundstoffe die Äquivalent-

gewichte a und a' und sind sie im Verhältniss von $a:a'$ in einer Verbindung enthalten, so muss nach der in §. 2 aufgestellten Definition der thermischen Äquivalenz, mit der dort angegebenen Bedeutung der Buchstaben, die Proportion

$$a:a' = \frac{m}{e} : \frac{m'}{e'}$$

bestehen. Enthält die Verbindung N Atome des einen und N' Atome des anderen, und bezeichnet a_1 ihr Äquivalentgewicht, so hat man

$$a_1 : a : a' = \frac{Nm + N'm'}{Ne + N'e'} : \frac{m}{e} : \frac{m'}{e'};$$

da nun hier der Bedingung der Äquivalenz gemäss $Ne = N'e'$ sein muss, so wird

$$a_1 : a : a' = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{e} + \frac{m'}{e'}\right) : \frac{m}{e} : \frac{m'}{e'}$$

und hieraus folgt:

$$a_1 = \frac{a + a'}{2},$$

d. h. das Äquivalentgewicht der Verbindung ist die halbe Summe der Äquivalentgewichte der Bestandtheile.

So ist z. B. das Äqualentgewicht von Chlornatrium nicht die ganze, sondern die halbe Summe der Äquivalentgewichte von Chlor und Natrium, also $= 29 \cdot 25$; da dieser Werth, mit der specifischen Wärme der Verbindung multiplicirt, dem Gesetze von Dulong und Petit sich sehr gut anschliesst, so ist $c_0 = 0$, d. h. Chlornatrium ist, obwohl chemisch zusammengesetzt, thermisch einfach. Eine Zusammenlagerung von Atomen zu Molekeln findet also hier nicht statt.[1] Dies gilt in gleicher Weise für alle ähnlich construirten Verbindungen.

Sollen ν Äquivalente eines Stoffes mit 1 Äquivalent eines anderen sich chemisch verbinden, so muss hierzu die Summe

[1] Man könnte insofern sagen, dass Chlornatrium nicht nur, wie viele Chemiker bereits annehmen, in wässeriger Lösung, sondern auch in der festen Aggregatform dissociirt ist.

der strahlenden Aussenflächen für beide Stoffe gleich gross werden. Dies kann am einfachsten so geschehen, dass durch Zusammenlagerung seiner Atome zu Molekeln und entsprechende Bildung von Innenflächen die Summe der Aussenflächen des ersteren Stoffes sich im Verhältniss von $\nu : 1$ reducirt; dann sind beide Stoffmengen thermisch und chemisch äquivalent. Demnach hat die Verbindung das Äquivalentgewicht

$$a_1 = \frac{\nu a + a'}{2},$$

d. h. das Äquivalentgewicht der Verbindung ist die halbe Summe der verbundenen Äquivalentgewichte und als Verhältniss der Summe der Innenflächen zur Summe der Aussenflächen ergibt sich für dieselbe:

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\nu - 1}{2},$$

wo ν immer eine ganze Zahl ist.

So hat z. B. Wasser das Äquivalentgewicht

$$\frac{2+16}{2} = 9;$$

das Product dieser Zahl mit der specifischen Wärme ist

$$9 = 6\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

und folglich ist $c_0 = \frac{1}{2} c$, d. h. die Summe der strahlenden Innenflächen der im Wasser vorhandenen Molekeln verhält sich zur Summe der strahlenden Aussenflächen wie 1 : 2 und zur Gesammtsumme der strahlenden Flächen wie 1 : 3.

Wenn ν Äquivalente eines Stoffes mit ν' Äquivalenten eines anderen sich chemisch verbinden sollen, so muss wieder die Summe der Aussenflächen für beide gleich gross werden. Dies geschieht am einfachsten so, dass durch Zusammenlagerung der Atome zu Molekeln und Bildung von Innenflächen die Summe der Aussenflächen bei dem ersten Stoffe im Verhältniss von $\nu : 1$, bei dem anderen im Verhältniss von $\nu' : 1$ sich reducirt,

wodurch beide Stoffmengen thermisch und chemisch äquivalent werden. Die Verbindung hat sodann das Äquivalentgewicht

$$a_1 = \frac{\nu a + \nu' a'}{2},$$

während in derselben das Verhältniss der Summe der Innenflächen zur Summe der Aussenflächen:

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\nu + \nu' - 2}{2}$$

ist, wo ν und ν' immer ganze Zahlen bedeuten.

Wie man sieht, können hiernach die Werthe von $\frac{c_0}{c}$ mit der Zusammengesetztheit der Stoffe, von $c_0 = 0$ angefangen, nicht anders als die Zahlen der Reihe

$$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$$

fortschreiten, und es muss daher das Product aS aus Äquivalentgewicht und specifischer Wärme bei binären Verbindungen nach Verhältniss der Zahlen

$$6, 9, 12, 15, 18, \ldots$$

an Grösse zunehmen, wie es annähernd wirklich der Fall ist. Durch die in dieser Hinsicht thatsächlich herrschende Einfachheit der Verhältnisse erscheint die Annahme einer Zusammenlagerung von ungleichartigen Atomen zu Molekeln gänzlich ausgeschlossen.

§. 7. Wir kehren jetzt zu der in §. 4 erhaltenen Formel zurück, welche für Gase die Beziehung zwischen $\frac{c_0}{c}$ und k ausdrückt. Weil k meistens nicht hinreichend genau bekannt ist, um daraus mit Sicherheit auf das genannte Verhältniss schliessen zu können, wollen wir zu den einfachsten dafür möglichen Werthen die entsprechenden Werthe von k suchen.

Für $c_0 = 0$ wird $k = 1 \cdot 4$. Dieser Werth kommt bei den permanent gasförmigen Grundstoffen, aber auch bei Stickstoffoxyd, Kohlenoxyd und Chlorwasserstoff vor. Letztere drei Gase

sind daher, obwohl chemisch zusammengesetzt, thermisch einfach, d. h. eine Zusammenlagerung von Atomen zu Molekeln hat darin nicht statt. In dieser Hinsicht ist also z. B. zwischen Stickstoffoxyd und einem blossen Gemenge der gleichen Bestandtheile kein Unterschied, und es kann sonach der wirklich bestehende Unterschied nicht durch eine Verschiedenheit der Positionen der Atome bedingt sein.

Für $c_0 = \frac{1}{2} c$, der ersten Stufe thermischer Zusammensetzung entsprechend, wird

$$k = \frac{17}{13} = 1 \cdot 3077;$$

dieser oder ein nahe gleicher Werth kommt bei Wasserdampf, Ammoniak, Schwefelwasserstoff, Sumpfgas, Kohlensäure, Stickstoffoxydul, ferner bei den Elementen Chlor, Brom und Jod vor. Letztere drei Stoffe sind daher in ihrer Gasform, obwohl chemisch einfach, thermisch zusammengesetzt, d. h. sie enthalten Molekeln mit strahlenden Innenflächen.

Ich hebe zunächst hervor, dass der Werth von $\frac{c_0}{c}$ für den Wasserdampf genau denselben Werth hat wie für das Wasser, eine Übereinstimmung, welche, auf zwei ganz verschiedenen Wegen erhalten, nicht zufällig sein kann. Bei dem Übergange von Wasser in Dampf bleibt sonach das Verhältniss der Summe der strahlenden Innenflächen zur Summe der strahlenden Aussenflächen ganz unverändert.

Chlorgas betreffend, muss dasselbe zu gleichen Raumtheilen aus zwei verschiedenen gleich dichten Chlorarten bestehen; für die eine ist $c_0 = 0$, wie für den Sauerstoff des Wasserdampfes, für die andere ist $c_0 = c$, wie für den Wasserstoff dieses Dampfes, und daher wird für die Verbindung beider $c_0 = \frac{1}{2} c$. Bemerkenswerth ist, dass das Chlor durch die Verbindung mit Wasserstoff seine thermische Zusammensetzung verliert und, ohne seine Dichte zu ändern, thermisch einfach wird. Hier tritt also ein wirklicher Verlust an strahlender Fläche ein, indem einfach c_0 in der Summe

$c+c_0$ verschwindet. Derartige Vorgänge sind überhaupt sehr gewöhnlich und sollen weiter unten eine nähere Deutung finden.

Für $c_0 = c$, als zweite Stufe thermischer Zusammensetzung, wird

$$k = \frac{5}{4} = 1 \cdot 25;$$

dieser oder ein nahe gleicher Werth kommt bei einer Anzahl von Gasen und Dämpfen mit etwas mehr complicirter Zusammensetzung vor. Für $c_0 = \frac{3}{2} c$ ist bereits $k = 1 \cdot 211$.

Je grösser c_0 gegen c wird, desto mehr vermindert sich der Werth von k, bis endlich bei sehr complicirter Zusammensetzung oder sehr grossen Molekeln, ähnlich wie bei festen oder flüssigen Körpern, annähernd $k = 1$ wird.

§. 8. Fragt es sich nun, wie die allseitige Einfachheit der betrachteten chemisch-physikalischen Verhältnisse zu Stande kommen könne, so ist von vornherein klar, dass sie jedenfalls in einem eigenthümlichen und einfachen Gesetze der Zusammenlagerung der Atome ihren Grund haben muss. Meine Ansicht hierüber ist diese.

In §. 2 wurde Kürze halber vorausgesetzt, die Atome der Elemente seien kugelförmig. Es ist aber wahrscheinlicher, dass sie Polyeder sind, und man kann sich einfach vorstellen, sie seien Würfel. Tritt nun eine Anzahl Atome eines Grundstoffes zu einer Gruppe zusammen, so wird unter ihnen, wie man annehmen kann, das Bestreben herrschen, wieder einen Würfel zu bilden. Ein so entstandenes, eine Summe strahlender Innenflächen enthaltendes Körperchen — eine Molekel — ist wesentlich ein kleiner Krystall. Es ist dabei möglich, dass die Dicke der zwischen den Atomflächen übrig bleibenden und sie trennenden Ätherschichten gegen die Dicke der Atome nur klein ist. Die kleinste Zahl würfelförmiger Atome, welche sich zu einer gleichfalls würfelförmigen Molekel gruppiren können, ist 8. Die Masse einer solchen Molekel ist 8mal, die Summe ihrer Aussenflächen 4mal grösser als für ein Atom. Da nun nach §. 2 das Äquivalentgewicht eines Stoffes dem Quotienten

$\frac{m}{e}$ aus Masse und Aussenfläche proportional ist, so sieht man, dass, wenn alle Atome einer bestimmten Stoffmenge sich zu je acht in Molekeln zusammenlagern, das Äquivalentgewicht des bezüglichen Stoffes sich verdoppelt hat, d. h. zu einer gleichen Summe von Aussenflächen wird jetzt die doppelte Gewichtsmenge erfordert. Treten die so entstanden Molekeln wieder zu je acht zur Bildung grösserer Molekeln zusammen, so ist das Äquivalentgewicht vervierfacht, und so fort. Die möglichen Äquivalentgewichte eines Stoffes sind daher ganze Multipla des kleinsten derselben, und es hat die meiste Wahrscheinlichkeit für sich, dass ihre Grösse nach Verhältniss der Potenzen von zwei fortschreiten muss.

Bei der gedachten Zusammenlagerung der Atome bleibt, weil dabei nur eine Verwandlung strahlender Aussenflächen in strahlende Innenflächen eintritt, die specifische Strahlenwärme unverändert. Bei festen oder flüssigen Körpern wird daher durch eine solche Gruppirung der Atome die experimentelle specifische Wärme, wie auch das Volumen, nur wenig beeinflusst. Ist aber der Körper ein Gas, so wird dessen Volumen, weil es nur durch die Summe der Aussenflächen der Molekeln bedingt ist, durch Verdoppelung des Äquivalentgewichtes auf die Hälfte reducirt; Äquivalentgewicht und Dichte wechseln also proportional. Während die specifische Strahlenwärme des Gases constant bleibt, ändern sich mit seiner Dichte zugleich dessen specifische Wärmen bei constantem Volumen und bei constantem Drucke; beide (und mit ihnen k) werden kleiner, sind dann aber für ein gleiches Volumen grösser als bei einem thermisch einfachen Gase.

Bei der Bildung von Wasserdampf reduciren sich zwei Volume Wasserstoff durch Zusammenlagerung seiner Atome zu Molekeln und Verdoppelung seines Äquivalentgewichtes auf ein Volum, welches mit dem gleichen Volum Sauerstoff äquivalent ist und mit diesem zwei Volume Wasserdampf gibt. Eine Zusammenlagerung der ungleichartigen Atome ist bei der Einfachheit der Verhältnisse nicht annehmbar.

Die specifische Strahlenwärme des Knallgases, aus derjenigen der Bestandtheile nach der Formel in §. 3 berechnet,

ist 0·248. Als specifische Strahlenwärme des Wasserdampfes, dem Werthe von k gemäss $c_0 = \frac{1}{2} c$ gesetzt, ergibt sich nach der genannten Formel, mit vorigem Resultate fast zusammenfallend,

$$c + c_0 = 0 \cdot 249;$$

aus Regnault's Bestimmung der specifischen Wärme des Dampfes bei constantem Drucke folgt dieselbe $= 0 \cdot 254$.

§. 9. Die im vorigen beschriebene Art der Zusammenlagerung gleichartiger Atome lässt eine sehr einfache Modification zu. Es ist ohne Schwierigkeit denkbar, dass die zur Bildung eines grösseren Würfels zusammentretenden würfelförmigen Atome, anstatt zwischen sich noch dünne Ätherschichten übrigzulassen, sich unmittelbar, d. h. bei völligem Ausschluss des Äthers, mit ihren Würfelflächen aneinander legen. Ein so entstehendes Gebilde enthält nicht, wie ein festes Körperchen, eine Summe strahlender Innenflächen, dasselbe ist insoferne keine Molekel, sondern, indem es dem Äther gegenüber ein Continuum ausmacht, ein — nur grösseres — Atom; es mag ein Synatom heissen. Legen sich alle Atome einer Stoffmenge auf diese Weise zu je acht zusammen, so ist, wie im früheren Falle, das Äquivalentgewicht verdoppelt, aber es ist jetzt zugleich die strahlende Flächensumme der Atome und somit die specifische Strahlenwärme des Stoffes auf die Hälfte vermindert, das Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Strahlenwärme bleibt also unverändert. Dass Zusammenlagerungen dieser Art wirklich vorkommen, scheint nicht zweifelhaft.

Das schönste Beispiel bietet das Wasser in seinen drei Aggregatformen dar. Die specifische Wärme des Eises ist sehr nahe die Hälfte von der des Wassers; dies erklärt sich, wenn man annimmt, dass beim Erstarren der Flüssigkeit die gleichartigen Atome eines jeden ihrer zwei Elemente sich zur Bildung der nächst grösseren Synatome zusammenlegen, während das Verhältniss $c_0 : c$ und somit die Art der thermischen Zusammengesetztheit des Wasserstoffs und die thermische Einfachheit des Sauerstoffs bestehen bleibt. Das Äquivalentgewicht des

Eises ist dann = 18, dasjenige des Wasserstoffs ist darin im Ganzen vervierfacht, das des Sauerstoffs verdoppelt.

Die specifische Strahlenwärme des Wasserdampfes ist, wie gefunden wurde, nahe 0·250 oder $\frac{1}{4}$ von der des Wassers und die Hälfte von der des Eises. Man muss daher annehmen, dass beim Verdampfen das Äquivalentgewicht des Eises von neuem durch Bildung der nächst grösseren Synatome sich verdoppelt, das des Wassers aber sich sogleich vervierfacht, wobei wieder das Verhältniss $c_0 : c$ unverändert fortbesteht. Das Äquivalentgewicht des Dampfes ist dann = 36, dasjenige des thermisch zusammengesetzten Wasserstoffs in demselben ist im Ganzen verachtfacht und das des thermisch einfachen Sauerstoffs vervierfacht. Die specifischen Strahlenwärmen von Wasser, Eis und Dampf verhalten sich wie $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ und ihre Äquivalentgewichte wie 9 : 18 : 36, das Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Strahlenwärme bleibt daher in allen drei Aggregatformen unverändert = 9.

Aus der specifischen Wärme des Wassers berechnet sich diejenige des flüssigen Wasserstoffs = 6, die des flüssigen Sauerstoffs $= \frac{3}{8}$, welche Zahlen auch dem Gesetze von Dulong und Petit entsprechen. Nimmt man dies auch bei flüssigem Stickstoff an, so ist dessen specifische Wärme $= \frac{3}{7}$ und hieraus folgt diejenige der flüssigen Luft = 0·4161. Nun ist aber

$$\frac{0 \cdot 4161}{4} = 0 \cdot 1040$$

sehr nahe dem Werthe 0·1030 gleich, der sich in §. 3 für die specifische Strahlenwärme der atmosphärischen Luft ergab; man muss daher schliessen, dass Stickstoff, Sauerstoff und Wasserstoff bei dem Übergange aus der flüssigen in die Gasform ihr Äquivalentgewicht durch unmittelbare Aneinanderlagerung ihrer Atome vervierfachen, wobei ihre specifische Strahlenwärme sich auf den vierten Theil reducirt. Dann entspricht aber für die permanent gasförmigen Grundstoffe das

Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Strahlenwärme (mit welcher bei den festen Grundstoffen die experimentelle nahe zusammenfällt) dem Gesetze von Dulong und Petit vollkommen und die Ausnahme, welche man diesbezüglich bisher statuiren musste, verschwindet gänzlich.[1]

Da die Äquivalentgewichte der Gase allgemein ihren Dichten proportional sind, so müssen Quecksilber und Cadmium beim Verdampfen ihr Äquivalentgewicht verdoppeln, während Phosphor und Arsen es verachtfachen, und es gibt wahrscheinlich keinen einzigen Grundstoff, welcher ohne Vergrösserung seines Äquivalentgewichtes aus der festen oder flüssigen in die Gasform übergehen könnte. Die Existenz einatomiger Gase im Sinne der kinetischen Theorie erscheint hierdurch ausgeschlossen.

Schon oben wurde erwähnt, dass Chlorgas durch chemische Verbindung mit Wasserstoff einen Verlust an strahlender Fläche, $\frac{1}{3}$ der ganzen Summe betragend, erfährt; nach dem Vorigen ist dies leicht verständlich. Der wichtigste Fall solcher Art betrifft das Ammoniakgas. Dem Werthe von k gemäss ist für dasselbe, wie für Wasserdampf, $c_0 = \frac{1}{2} c$. Hieraus folgt aber, dass $\frac{1}{4}$ der ganzen strahlenden Flächensumme seiner Bestandtheile im freien Zustande durch ihre Verbindung verschwindet, und in der That verhält sich die specifische Strahlenwärme eines Gemenges der Bestandtheile zu derjenigen des Ammoniaks wie 4 : 3. Man kann sich von der Constitution dieses Gases, wie ich hier der Kürze wegen nur andeute, vollkommen Rechenschaft geben, wenn man annimmt, dass in demselben das Wasserstoffgas zu einem Drittel sein Äquivalentgewicht verdoppelt und zu zwei Dritteln es vervierfacht hat. Eine Verdreifachung des Äquivalentgewichtes scheint also nicht leicht zu Stande kommen zu können. Starre Verbindungen führen zu ähnlichen Schlüssen.

---

[1] Als Ausnahmen vom genannten Gesetze erscheinen dann nur noch einige, durch die Kleinheit der specifischen Wärme auffallende feste Grundstoffe (Kohlenstoff, Bor, Silicium); ihr Verhalten dürfte aber nach dem Obigen durch eine in denselben mit Abnahme der Temperatur fortschreitende Synatombildung vollständig erklärbar sein.

Der Nachweis, dass ein Grundstoff sein Äquivalentgewicht vervielfachen kann, ohne dass er deswegen aufhört, das Gesetz von Dulong und Petit zu erfüllen, ist auch für die Hypothese von Prout von grosser Bedeutung. In der gleichen Beziehung ist zu bemerken, dass das Äquivalentgewicht eines Stoffes, als Quotient aus Masse und Aussenfläche seiner Atome, nicht nothwendig unter allen Umständen völlig constant bleiben muss, und dass daher die Äquivalentgewichte, welche ein Stoff durch Zusammenlagerung seiner Atome annehmen kann, nicht nothwendig genau ganze Vielfache des kleinsten sind.

§. 10. Bei einem Überblicke der vorliegenden Abhandlung mag vielleicht am meisten die unerwartete Folgerung auffallen, dass in chemischen Verbindungen zwar sehr gewöhnlich die gleichartigen, aber in keinem Falle die ungleichartigen Atome zu engeren für sich bestehenden Systemen associirt sind, und dass es chemische Verbindungen gibt, welche sich bezüglich der Positionen der sie constituirenden Atome von einem blossen Gemenge der gleichen Bestandtheile durchaus nicht unterscheiden. Wenn diese Folgerung feststeht, so bleibt zur Erklärung des thatsächlich bestehenden Unterschiedes nur die Annahme übrig, dass der Übergang eines Gemenges zweier oder mehrerer Stoffe in den Zustand einer chemischen Verbindung wesentlich nicht durch eine Veränderung der Atompositionen, sondern durch eine Veränderung der Atome selbst bedingt sei, d. h. dass jedes Element, wenn es mit einem anderen sich chemisch verbindet, die innere Structur seiner Atome wechselt. Wirklich erklärt sich auf solche Weise am einfachsten der durch die Erfahrung bewiesene Satz, dass die Elemente, wenn sie in Verbindungen eingehen, ihr eigenthümliches Licht- und Wärmespectrum und ihr specifisches Refractionsvermögen in keinem Falle unverändert beibehalten. Man kann dabei sich die Vorstellung machen, dass die miteinander verbundenen Stoffe sich gegenseitig in einem die Substanz ihrer Atome betreffenden Zwangszustande erhalten, aus welchem nur die Lösung der Verbindung sie wieder befreit. Es ist dann auch voraus zu erwarten, dass, wenn ein Atom unter dem Zwange eines äusseren Einflusses seine Structur wechselt, dies nicht geschehen kann, ohne dass zugleich ein

Quantum Wärme entweder erzeugt oder verbraucht wird, und in der That gibt es keine chemische Verbindung, bei deren directer oder indirecter Herstellung nicht eine bestimmte charakteristische Wärmemenge entweder entwickelt oder verschluckt wird.

Die kaum zu bezweifelnde Identität der thermischen und der chemischen Äquivalenz dürfte beweisen, dass die chemisch wirksamen Kräfte der Atome ihre Ausgangs- und Angriffspunkte nicht in deren Massen, sondern an deren Aussenflächen haben, und dies würde zu der Vermuthung berechtigen, dass es andere chemisch wirksame Kräfte zwischen den Atomen, als die Strahlen, welche sie einander zusenden, nicht gibt. Für diese Auffassung spricht es auch, dass die chemischen Wechselwirkungen der Stoffe mit Abnahme der Temperatur im Allgemeinen schwächer werden und dass nach den diesbezüglich entscheidenden Versuchen von R. Pictet bei einer niedrigen Temperatur von ungefähr —125° selbst die gewöhnlich stärksten Reactionen ganz aufhören.

Schlussbemerkung.

Wie ich im Eingange dieser Darlegung erwähnte, hat mich zu derselben die Aufstellung und Verwerthung des Satzes veranlasst, dass eine Ätherwelle an einer sie auffangenden Fläche einen Druck erzeuge. Ich halte es nun zwar für zweifellos, dass eine solche Welle als fortbewegende Kraft wirken kann, dem aber, dass diese Kraft ein Druck sei, stimme ich keineswegs bei. Ich gestehe, mir nicht vorstellen zu können, wie in Wirklichkeit ein solcher Druck zu Stande kommen soll. Dagegen scheint mir nach naheliegenden Analogien die Anschauung begründet, dass transversale Ätherschwingungen in ihrer Fortpflanzungsrichtung naturgemäss einen Zug, d. h. eine ihrer Intensität proportionale Verminderung des Ätherdruckes erzeugen müssen. Dass man an die Möglichkeit eines Zuges nicht denkt, einen Druck aber für annehmbar hält, hat seinen Grund vielleicht in der Thatsache, dass Erwärmung der Körper fast immer deren Volumen auszudehnen strebt; ich glaube aber, dass diese Wirkung diffundirter Wärmestrahlen der Annahme einer

ziehenden Kraft derselben durchaus nicht widerspricht. Dies lässt sich leicht anschaulich machen.

Denkt man sich eine für Wärmestrahlen opake Platte beiderseits gleich stark bestrahlt, so halten die entsprechenden Ätherkräfte sich das Gleichgewicht. Bringt man aber neben diese Platte und zu ihr parallel eine zweite, so werfen beide einen Schatten aufeinander; beide sind dann auf den einander zugewendeten Seiten weniger stark bestrahlt als auf den Gegenseiten, sie werden folglich durch den an ersteren überwiegenden Ätherdruck auseinander, d. h. nach der Seite der stärkeren Bestrahlung getrieben.

In einem Gase gibt es für jedes Atom zwischen den übrigen eine Lage, in welcher es auf allen Seiten gleich stark bestrahlt ist; aus dieser verschoben, empfängt es auf Seite der momentan näheren Atome, welche ihm nun vermöge ihrer Opacität einen grösseren Theil der von weiterher kommenden Strahlen intercipiren, eine geringere Strahlenmenge als auf Seite der momentan ferneren Atome, dasselbe wird also durch die resultirende Kraft nach einer mittleren Lage zurückgetrieben, welche demgemäss eine Lage stabilen Gleichgewichtes ist. Alle Atome des Gases fliehen auf solche Weise einander; sie üben gegenseitig einen durch die allgemeine Strahlendiffusion und also durch den Äther vermittelten Druck aus, welcher mit Erhöhung der Temperatur und mit Verminderung des Gasvolumens an Stärke zunimmt.

Bezüglich der Resultate dieser Abhandlung scheint es mir zunächst und wesentlich auf den Fundamentalsatz, dass Wärmestrahlen als fortbewegende Kräfte wirken, nicht aber darauf anzukommen, ob diese Kräfte aus einer Vermehrung oder einer Verminderung des Ätherdruckes an ihren Angriffspunkten hervorgehen.

Die Apisperiode der alten Ägypter

von

Dr. **Eduard Mahler.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1894.)

Die Literatur, welche sich die Untersuchung der uns vom classischen Alterthume her überlieferten grösseren Zeitkreise der Ägypter zur Aufgabe macht, ist seit den enormen Fortschritten, welche die Entzifferung der Hieroglyphentexte gemacht, und insbesondere seit der Entdeckung des Serapeums durch den französischen Forscher Mariette zu einer sehr umfangreichen geworden. Eine eingehendere Untersuchung haben namentlich Brugsch und Lepsius diesem Gegenstande gewidmet, und es war gewiss erfreulich, dass auch diese hervorragenden Ägyptologen auf Grund der Denkmälerberichte zu den Resultaten gelangten, welche lange Zeit vordem schon Ideler aus rein astronomisch-chronologischen Gründen annehmen zu müssen glaubte. Die 25jährige Apisperiode soll nach Annahme dieser Forscher keine andere sein, als die Periode von 25 Jahren zu 365 Tagen, nach deren Ablauf die Mondphasen an den nämlichen Tagen des Jahres in gleicher Ordnung periodisch wiederkehren. Welch' hohen Grad von Wahrscheinlichkeit diese Hypothese hat, beweist der Umstand, dass $25 \times 365 = 9125$ Tage, und 309 synodische Monate $= 309 \times 29 \cdot 53059 = 9124 \cdot 952$ Tage sind.

Warum hiess aber dann diese 25jährige Periode die »Apisperiode«? Warum haben die Ägypter eine Periode, die einen rein astronomischen Charakter hatte, mit dem heiligen Apisstiere in Verbindung gebracht?

Diese Fragen blieben bisher noch unbeantwortet und auch die Hypothese selber ist noch von keiner Seite näher begründet

worden, wiewohl sie durch mehrere dieses Gebiet berührende Untersuchungen in die Ägyptologie aufgenommen wurde.

Ideler war von der Richtigkeit seiner Annahme, dass die von den Classikern des Alterthums berichtete 25jährige Lebensdauer des Apis sich nur auf die 25jährige Mondperiode von 9125 Tagen beziehe, so durchdrungen, dass er, ohne zu ahnen, dass er gerade damit der Wahrheit am nächsten kam, den heiligen Apisstier als ein lebendiges Symbol des Mondes und seiner Periode bezeichnete. Freilich haben die ägyptologischen Forschungen, die man zur Zeit Ideler's noch nicht kannte, ergeben, dass die Berichte der Griechen bezüglich der Lebensdauer des Apis der Wahrheit nicht entsprechen, denn wir haben z. B. Apise mit 7, 16, 17, 18, 23 und 26 Lebensjahren (siehe: Lepsius, Sitzungsber. der königl. Akad. Berlin, 1856, S. 316—317). Es kann sonach die Lebensdauer des Apis gewiss nicht der Grund gewesen sein für die Benennung der 25jährigen Mondperiode als »Apisperiode«. Woher also dieser Name?

Im Folgenden wird nun diese Frage beantwortet und zugleich der erste wissenschaftliche Nachweis für den rein astronomischen Charakter dieser Periode gegeben. Indem ich von dem festen Siriusjahre, welches ich auf Grund zahlreicher Belege als die alleinige Grundlage des im alten Ägypterreiche üblich gewesenen Kalenders annehme und welches selbst zur Zeit der Ptolemäer noch den Tempelinschriften und religiösen Datirungen als Normaljahr zu Grunde lag (siehe Decret von Kanopus), ausging, reconstruirte ich mehrere von Lepsius und Brugsch uns mitgetheilte Apisdaten derart, dass ich das für den Tag der Inthronisation der heiligen Apisthiere überlieferte ägyptische Datum auf das julianische reducirte; dabei ergibt sich die merkwürdige Erscheinung, dass diese heiligen Thiere stets am Vollmondstage inthronisirt wurden. Nachdem dann noch auf Grund des uns bekannten inschriftlichen Materials der Nachweis geführt wird, dass man den Gott Osiris, als dessen lebendiges Symbol der Apis erachtet wurde, mit dem Vollmond identificirt hat, und wir sonach zufolge der vorliegenden inschriftlichen Urkunden folgern müssen, Apis = Osiris = Vollmond, so war damit nicht nur die

schon von Ideler vermuthete Thatsache gefunden, dass die Apisperiode einen rein astronomischen Charakter hatte und die 25jährige Mondperiode von 9125 Tagen bezeichnete, sondern auch die Erklärung gefunden, warum man dieselbe »Apisperiode« genannt hatte.

Bei dem historischen Entwicklungsgange, welchen die Jahrform der alten Ägypter zufolge ihres scharfen Beobachtungstriebes in naturgemässer Weise befolgen musste (zuerst das reine Mondjahr, dann das Jahr mit 12 dreissigtägigen Monaten, später das Sonnenjahr mit 12 dreissigtägigen Monaten +5 Zusatztagen und endlich das Siriusjahr mit $365^1/_4$ Tagen), ist es wohl selbstverständlich, dass ihnen die Thatsache nicht entgehen konnte, dass nach je 25 Jahren in der Dauer von 365 Tagen die einzelnen Mondphasen wieder auf denselben Tag des Jahres periodisch wiederkehren. Denn es ist: $25 \times 365 = 9125$ Tagen und $309 \times 29 \cdot 53059 = 9124 \cdot 95231$ Tagen, so dass erst nach 20 solchen 25jährigen Perioden, d. i. nach 500 Jahren die Differenz 1 Tag ausmacht.[1] Es ist unter solchen Umständen leicht erklärlich, dass die Ägypter auch in der späteren Epoche ihrer Reichsgeschichte, wo schon die Dauer des festen Siriusjahres nicht nur gekannt, sondern auch praktisch verwerthet wurde, ihren astronomischen Rechnungen diese Periode und ein Jahr von 365 Tagen zu Grunde legten.

Besonders gute Dienste leistete diese 25jährige Periode zur Berechnung und Controlirung der einzelnen Mondtage und namentlich des Vollmondtages, an dem nach ägyptischer Auffassung der Mond sich erneute oder verjüngte.

So lesen wir (Brugsch, Thesaurus, I. Abth.):

1. (S. 30): »Leben und Erneuerung findet in Ewigkeit hin statt; der Mond kehrt zurück an seine Stelle und das Vollmondauge ist ausgestattet mit seiner Herrlichkeit«.

2. (S. 34): »das sind die Götter, welche verherrlichen das Mondauge, wenn es erneut seinen Kreislauf am 15. Tage des Mondmonates«.

---

[1] Es ist daher die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass gerade dieser 500jährige Zeitraum die sogenannte »Phönixperiode« bildete.

3. (S. 35): »das Mondauge (der Vollmond) ist unversehrt und es ist ausgestattet mit seinen Herrlichkeiten zum Segen; es ist gefeit und es verjüngt sich allmonatlich.

4. (S. 38): »Der Himmel ist in Festesfreude, indem er die Gestalt des Vollmondes trägt«.

5. (S. 45): »Ausgefüllt ist das Vollmondauge am 15. Tage des Mondmonates« u. s. w.

Der Vollmondtag war aber auch einem anderen religiösen Feste gewidmet. Die Einführung des heiligen Apisstieres in das Apieum zu Memphis, also die Inthronisation dieses heiligen Thieres als lebendes Symbol der Seele des Gottes Osiris auf Erden, fand stets am Vollmondtage statt. Diese Thatsache, welche trotz der bezüglichen Berichte der Denkmäler bisher noch nicht erkannt wurde, findet ihre Bestätigung durch Belege, welche sich vermöge der uns erhaltenen Apisdaten durch die Rechnung leicht reconstruiren und prüfen lassen.

A. Das erste Datum, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen, ist das der Einführung des Apisstieres im 31. Regierungsjahre Königs Ptolemäus Euergetes II. Seine näheren Daten sind:[1]

Jahr	Monat	Tag	König
		Geburt:	
XXVIII	Tybi	24	Ptol. Euergetes II.
		Einführung in Memphis:	
XXXI	Thoth	23	Ptol. Euergetes II.

Es war also:

24. Tybi d. J. XXVIII bis 24. Tybi d. J. XXIX = Jahr I des Apis
24. Tybi d. J. XXIX bis 24. Tybi d. J. XXX = Jahr II des Apis
24. Tybi d. J. XXX bis 24. Tybi d. J. XXXI = Jahr III des Apis
. . . .

[1] Diese sowie die folgenden hier erörterten Apisdaten sind entnommen der Arbeit von Lepsius in den Abhandlungen der königl. preuss. Akad. der Wissensch. zu Berlin vom Jahre 1856, betitelt: »Über die XXII. ägyptische Königsdynastie...«.

Nachdem aber selbst in der Ptolemäerzeit noch den Tempelinschriften und religiösen Datirungen das Sothisjahr als Normaljahr zu Grunde lag, so erhält man als entsprechende Daten im julianischen Kalender:

10. December d. J. 143 v. Chr. bis 10. December 142 v. Chr. =
= Jahr I des Apis = Jahr 28/29 Ptol. Euergetes II.

10. December d. J. 142 v. Chr. bis 10. December 141 v. Chr. =
= Jahr II des Apis = Jahr 29/30 Ptol. Euergetes II.

10. December d. J. 141 v. Chr. bis 10. December 140 v. Chr. =
= Jahr III des Apis = Jahr 30/31 Ptol. Euergetes II.

Es ist daher das Datum der Einführung des Apisthieres in Memphis:

23. Thoth d. J. XXXI Ptol. Euergetes II. = 11. August 140 v. Chr.

Nun wissen wir, dass zur Zeit der Ptolemäerherrschaft der graeco-macedonische Einfluss in Ägypten so mächtig war, dass sogar die Könige, um sich beim Volke verständlich zu machen. in ihren Decreten nach dem graeco-macedonischen Kalender datiren mussten. Daher auch die Doppeldaten aus dieser Epoche. (Siehe z. B. Decret von Kanopus).

Diesem Kalender zufolge fiel im Jahre 140 v. Chr. der 29. Juli julianisch auf den {1. Metageitnon = 1. Lous} Ol. 160, I, und daher entsprach der 11. August (= 42. Juli) dieses Jahres dem 14. Metageitnion = 14. Lous. Da aber der Metageitnion dieses Jahres ein hohler Monat, d. i. 29tägig war, so fiel die Dichomenie auf den 14. Tag, d. h. »der 11. August des Jahres 140 v. Chr. = 23. Thoth des Jahres XXXI Ptol. Euerg. II., der Tag der Einführung des Apis in das Apieum zu Memphis, war ein Vollmondtag«.

B. Eine andere Stele berichtet von der Inthronisation eines Apis im:

Jahr	Monat	Tag	des Königs
V	Payni	18	Amasis

Amasis regierte bekanntlich 570—526 v. Chr. Es ist daher Jahr V = 566/5 v. Chr. und sonach

Jahr V, Payni 18 (im Normaljahr) = 565 v. Chr., Mai 3.

Am 2. Mai 565 v. Chr., um $14^h\ 9\cdot6^m$ mittlere bürgerliche Greenwicher Zeit, d. i. etwa $4^1/_4{}^h$ Nachmittag mittlere Memphiser Zeit trat die Vollmondsphase ein; es war also am Abend dieses 2. Mai die Vollmondscheibe sichtbar, und der mit diesem Abende beginnende Mondtag, welcher dem julianischen 3. Mai, dem Tage der Einführung des heiligen Apis in den Tempel zu Memphis entsprach, war sonach in der That ein Vollmondtag.

C. Eine dritte Stele erzählt uns die Inthronisation eines Apis im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
I	Epiphi	9	Psametik II.

Jahr I des Königs Psametik II ist das Jahr 595/4 v. Chr. Es ist daher

Jahr I, Epiphi 9 Königs Psam. II. = 594 v. Chr., Mai 24.

Nun zeigt die Rechnung, dass am 23. Mai des Jahres 594 v. Chr. um $19^h\ 26\cdot4^m$ mittlere bürgerliche Greenwicher Zeit, d. i. in der Nacht vom 23. Mai auf den 24. Mai, etwa $2^1/_2$ Stunden vor der mittleren Memphiser Mitternacht die Vollmondsphase eingetreten war; es war somit der 24. Mai des Jahres 594 v. Chr. in der That der Vollmondtag.

D. Eine andere Stele berichtet von der Einführung eines Apis in das Heiligthum zu Memphis im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXIV	Pharmuthi	9	Taharka.

Wir wissen bereits, dass

das Jahr 595/4 v. Chr. = Jahr I Psametik II.,
also ist das Jahr 596/5 v. Chr. = Jahr XVI Nekau II.,
und daher das Jahr 611/0 v. Chr. = { Jahr I Nekau II., Jahr LIV Psametik I.

Dann war aber:[1]

das Jahr 664/3 v. Chr. = Jahr I Psametik I.
das Jahr 665/4 v. Chr. = Regierungsjahr Königs Rut-Amunmi.
das Jahr 666/5 v. Chr. = Jahr XXVIII oder letztes Jahr von Taharka

und daher

das Jahr 668/7 v. Chr. = Jahr XXVI Taharka.

Der 1. Thoth des in diesem Jahre (668 v. Chr.) beginnenden Siriusjahres fiel (siehe weiter unten, Anhang S. 844) auf den 19. Juli julianisch. Auch war das betreffende Siriusjahr ein Schaltjahr von 12 dreissigtägigen Monaten +6 Ergänzungstagen. Dem 9. Pharmuthi des XXVI. Regierungsjahres Königs Taharka entsprach daher der 22. Februar des Jahres 667 v. Chr

Um 8^h 24^m mittlere bürgerliche Greenwicher Zeit, d. h. etwa 10^h 30^m Vormittag Memphiser Zeit des 21. Februar 667 v. Chr. traf die Vollmondsphase ein, am Abende dieses Tages zeigte sich daher die Vollmondscheibe und es war sonach der folgende Tag, d. i. der 22. Februar, der Tag der Inthronisation des Apis, der Vollmondtag.

E. Besondere Beachtung verdient die folgende Thatsache. Der Apis, welcher im Jahre XXXI Königs Ptol. Euergetes II. zu Memphis inthronisirt wurde, ist nach dem Zeugnisse mehrerer Steleninschriften in Memphis geboren worden. Mit dem Tempel des heiligen Apisstieres war bekanntlich auch ein »Zeugungshaus«, [hieroglyphs] genannt, verbunden. Aus diesem war der im Jahre XXXI Königs Ptol. Euergetes II. gekrönte Apis als Sohn der Kuh Kerka (siehe Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1884) hervorgegangen, und zwar im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXVIII	Tybi	24	Ptol. Euergetes II.

Selbstverständlich musste die Geburt eines Apis im Tempel zu Memphis den Ägyptern als ein besonderes glückliches

[1] Diese Angaben stimmen auch vollkommen mit Haigh (Egyptian genealogis, Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1869, S. 47).

Ereigniss erscheinen, und es ist nur natürlich, wenn sie in einem solchen Falle die Geburt dieses Apis als seine erste Einführung in den Tempel erachteten. Dann aber musste das vermerkte Datum der Geburt einem Vollmondtage entsprechen, und dies ist auch wirklich der Fall. Das XXVIII. Regierungsjahr Ptol. Euergetes II. ist das Jahr 143/2 v. Chr., der 24. Tybi (Normaljahr) ist der 10. December, es ist also

Jahr XXVIII, Tybi 24 = 143 v. Chr., December 10,

und in der That ein Tag der Vollmondsphase.

F. Es wird ferner von der Inthronisation eines Stieres berichtet, welche statthatte in Memphis im[1]

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXI	Thoth	20	Ptol. V. Epiphanes.

Wird auch diesem Datum das feste Siriusjahr zu Grunde gelegt, dann ist

1. Thoth d. J. I Königs Epiphanes = 20. Juli 203 v. Chr.,
1. Thoth d. J. XXI Königs Epiphanes = 20. Juli 183 v. Chr.,

und daher

20. Thoth d. J. XXI Königs Epiphanes = 8. August 183 v. Chr.

Da aber der 23. August dieses Jahres dem graeco-macedonischen 1. Gorpiäus (1. Boëdromion Ol. 149 II) entsprach, so war der 8. August, der Tag der Inthronisation des heiligen Apis, 15 Tage vor der Numenie des Monates Gorpiäus, und daher ein Vollmondtag.

(Damit findet eine höchst scharfsinnige Correctur Prof. Brugsch's ihre Bestätigung. Auf S. 136 des 22. Jahrganges der Zeitschrift für ägyptische Sprache, woselbst Brugsch den »Apiskreis aus der Zeit der Ptolemäer« eingehend erörtert, macht unser Grossmeister auf dem Gebiete ägyptologischer Forschung folgende Bemerkung: »In dem Datum vom Jahre XXI (Lin. 8) ist die Zahl des Monatstages 𓇳𓏻𓎇 incorrect geschrieben.

---

[1] Siehe Brugsch's »Der Apiskreis unter den Ptolemäern«, Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1884, S. 136.

Wir ergänzen die beiden Striche wiederum zu einem I und lesen [hieroglyph] »Tag 20«).

G. Eine andere Stele berichtet von der Einführung eines Apis in das Heiligthum von Memphis im

Jahr	Monat	Tag	des Königs
XXIX	Paophi	1	Šešonk III.

Šešonk III. war der Nachfolger von Thakelat II. Am 25. Mesori des Jahres XV dieses Königs fand eine in Ägypten sichtbare totale Mondfinsterniss statt; es ist dies (siehe des Verfassers Untersuchungen in den Denkschriften der Wiener Akad., 1887) die Finsterniss vom 9. Juli des Jahres 829 v. Chr. Thakelat II. regierte 15 Jahre; Šešonk III. kam sonach im Jahre 828 v. Chr. zur Regierung.[1] Es ist also

1. Paophi d. J. XXIX Šešonk III. = 1. Paophi d. J. 800 v. Chr.

Der 1. Thoth des in diesem Jahre beginnenden Siriusjahres fiel (siehe Seite 844) auf den 19. Juli. Dann war aber der 1. Paophi dieses Jahres, d. i. der Tag der Inthronisation des Apis = 18. August des Jahres 800 v. Chr. Und nachdem am Abende des 17. August dieses Jahres die Vollmondscheibe sichtbar war, so musste der mit diesem Abende beginnende Mondtag als Vollmondtag bezeichnet werden. Es war daher in der That der 1. Paophi des Jahres XXIX Königs Šešonk III., entsprechend dem 18. August des Jahres 800 v. Chr., ein Vollmondtag.

Aber auch den Denkmälerberichten ist diese für die Culturgeschichte Altägyptens gewiss bedeutungsvolle Thatsache direct zu entnehmen.

Es ist ja bekannt, dass der Apis allenthalben in Ägypten als das lebende Symbol des Osiris aufgefasst wurde und dass der Cult der Osirisseele mit dem des Apis eng verknüpft war.

[1] Zum gleichen Resultate kommt auf anderem Wege Dr. Haigh (siehe dessen Aufsatz: »Egyptian genealogies« in Zeitschr. für ägypt. Sprache, 1869, S. 46, Zeile 2 von unten).

Plutarch (de Iside C. 29) sagt:

»Die meisten der Priester sagen übereinstimmend aus, dass der Osiris und der Apis eng verbunden seien, indem sie ausführen und lehren, dass wir den Apis als das Ebenbild der Seele des Osiris halten müssen«.

Eine zehnzeilige Hieroglypheninschrift (die bilingue Stele des Châhap im ägyptischen Museum zu Berlin, Zeitschrift für ägyptische Sprache, 1884, S. 102) beginnt also:

»Die königliche Opfergabe, wohlgefällig dem Ptah-Sokaris-Osiris, dem grossen Gotte, dem Herrn der Krypte, dem Apis-Osiris, dem Xent der Amenthes, dem Herrn der Ewigkeit...«

Nun bezeugen aber die astronomischen Inschriften, die wir in der vortrefflichsten Übersicht in Brugsch's »Thesaurus inscriptionum aegypticarum« zusammengestellt finden, dass der »Osiris« mit dem »Vollmond« in innigster Verbindung war.

Wir lesen daselbst (p. 30):

»In einer anderen Barke (an der Nordseite der Decke im Pronaos des Tempels von Dendera), welche unmittelbar dem Sonnenschiffe folgt, zeigt sich das Auge des Vollmondes in der Gestalt , dem der ibisköpfige Thuti-Thot seine Huldigung auszudrücken scheint. Vor dem Schiffe des Mondes befindet sich folgende Inschrift: ‚Leben und Erneuerung findet in Ewigkeit hin statt; der Mond kehrt zurück an seine Stelle und das Vollmondauge ist ausgestattet mit seiner Herrlichkeit'. Ein drittes Schiff zeigt das Bild des thronenden Osiris mit Krone und Scepter. Vor ihm fünf Sterne. Ein vierzeiliger Text belehrt darüber: ‚Osiris-Onnophris, der Triumphator, er hat sich vereint mit dem Vollmondauge'«.

Ein anderer Text (p. 38 daselbst) lautet in Übersetzung also:

»Der Himmel ist in Festesfreude, indem er die Gestalt des Vollmondes trägt. Die Seelen der Götter treten in ihm zum Vorschein und Osiris geht leuchtend auf in ihm als Mondgott«.

Eine andere Stelle (p. 40 in Thesaurus von Brugsch) erzählt uns, dass die Stadt Tentyra sich der Freude hingibt

wenn »die herrliche Seele des Gottes Osiris sich allmonatlich verjüngt, um den Vollmond in Besitz zu nehmen«.

Gleichfalls an der Nordseite der Decke im Pronaos des Tempels von Dendera zeigt ein Bild eine Apotheose des Osiris als Mondgott. Osiris thront in einem Schiffe und über ihm ist folgende Inschrift:

»Osiris-Onnophris, der Triumphator, ist eingetreten in das Mondauge am 15. Tage des Mondmonates« u. s. f.

Es ist also nicht erst die Rechnung, welche uns das wichtige Resultat verkündet, dass die Krönungsfeierlichkeit des heiligen Apisstieres in Memphis zur Zeit des Vollmondes erfolgte, schon die monumental beglaubigten Inschriften weisen in beredter Sprache darauf hin.

Es ist wohl bekannt, dass die Ägypter mit besonderer Vorliebe nicht nur ihre religiösen Satzungen, sondern auch ihre wissenschaftlichen Thesen, mögen diese die Mathematik, Medicin oder Astronomie betroffen haben, in gewisse mysteriöse Formeln zu fassen beliebten, die nicht für jedermann verständlich waren. Wer nicht mit den Eigenheiten der ägyptischen Denk- und Sprachweise vollkommen vertraut war, konnte da sehr leicht auf Irrwege gerathen. Und daher kommt es auch, dass selbst ein Herodot uns über Dinge zu berichten weiss, die in den uns erhaltenen Denkmälerinschriften nirgends Bestätigung finden. Die Priester haben den nach Ägypten gekommenen Fremden zweifellos Einiges vom Apiscult berichtet, ihre Aussagen aber in wohlerwogene Formeln gekleidet, die dann, in wörtlicher Bedeutung genommen, für den mit ägyptischer Cultur und ägyptischen Sitten völlig Unvertrauten noch immer unverständlich waren. Gar Vieles ist also über den Apiscult in den Schriften der Griechen und Römer überliefert worden, was mit den Berichten der Denkmäler in directem Widerspruche ist. Nirgends finden wir die 25-jährige Apisperiode als solche chronologisch verwerthet, denn Niemand hat nach Jahren einer solchen Periode datirt. Und wenn Ideler in ihr eine astronomische Periode erblickte, so hat er wohl das Richtige getroffen; aber auch er

irrte noch, indem er meinte, der Name »Apisperiode« käme daher, weil man die Lebensdauer des Apisstieres nach ihr festsetzte. Die ganze Periode ist einfach eine rein astronomische, welche 25 damals in der rechnenden Astronomie gebräuchliche 365tägige Jahre umfasste, nach deren Ablauf in periodischer Wiederkehr mehrere Jahrhunderte hindurch die einzelnen Mondphasen auf denselben Tag dieses 365tägigen astronomischen Jahres trafen.

Diese Thatsache haben die alten Ägypter, welche den Himmel mit peinlichster Sorgfalt beobachteten, frühzeitig wahrgenommen und haben die so entstandene Periode von 25 × 365 Tagen dazu benutzt, um nach ihr die Apisvollmonde, an denen — wie oben gezeigt wurde — die Inthronisation der Apisstiere statthaben sollte, zu regeln und zu bestimmen. Daher also der Name »Apisperiode« = »Mondperiode.«

Anhang.

Zur näheren Erläuterung einiger hier vorgebrachten Daten sehe ich mich veranlasst, auf die schon anderweitig (Transactions of the IX. Congress of the Orientalist's, vol. II, p. 323) angedeutete Thatsache hinzuweisen, dass zufolge unserer heutigen astronomischen Anschauungen innerhalb der im Jahre 1318 v. Chr. beginnenden Sothisperiode eine viermalige Reorganisation des Sothiskalenders nöthig war und wir daher innerhalb dieser Zeit fünf verschiedene Kalender in Betracht ziehen müssen.

I.

Von —1317 bis —893 inclusive.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Sothisjahres
$-4n$	Juli 19	Gemeinjahr
$-(4n+3)$	19	Gemeinjahr
$-(4n+2)$	19	Schaltjahr
$-(4n+1)$	20	Gemeinjahr

II.

Von —892 bis —537 inclusive.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Siriusjahres
$-4n$	Juli 19	Gemeinjahr
$-(4n+3)$	19	Schaltjahr
$-(4n+2)$	20	Gemeinjahr
$-(4n+1)$	20	Gemeinjahr

III.

Von —536 bis —236 inclusive.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Siriusjahres
$-4n$	Juli 19	Schaltjahr
$-(4n+3)$	20	Gemeinjahr
$-(4n+2)$	20	Gemeinjahr
$-(4n+1)$	20	Gemeinjahr

IV.

Von —235 bis +36.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Siriusjahres
$-4n$ und $+4n$	Juli 20	Gemeinjahr
$-(4n+3)$ u. $+(4n+1)$	20	Gemeinjahr
$-(4n+2)$ u. $+(4n+2)$	20	Gemeinjahr
$-(4n+1)$ u. $+(4n+3)$	20	Schaltjahr

V.

In den Jahren	Datum des heliak. Siriusaufganges	Gattung des eben beginnenden Sothisjahres
$4n$	Juli 20	Gemeinjahr
$4n+1$	20	Gemeinjahr
$4n+2$	20	Schaltjahr
$4n+3$	21	Gemeinjahr

Elektrochemische Untersuchungen

(IV. Mittheilung)

von

Prof. **Franz Exner,**
c. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

§. 14. Über Concentrationsströme.

Aus den Tabellen der vorangegangenen Mittheilungen,[1] welche sich auf die Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Lösungen einerseits und zwischen verschieden concentrirten Lösungen anderseits beziehen, lassen sich alle jene Werthe entnehmen, die zur Charakteristik der sogenannten Concentrationselemente nöthig sind; unter letzteren sind im Allgemeinen solche Combinationen verstanden, bei welchen zwei Elektroden aus dem gleichen Metall in verschieden concentrirte Lösungen ein und desselben Salzes tauchen, abgesehen davon, ob letzteres das Elektrodenmetall, oder ein anderes als Kation enthält. Bezeichnen F_1 und F_2 die beiden Lösungen, so ist die ganze elektromotorische Kraft eines solchen Elementes durch die Summe $M|F_1+F_1|F_2+F_2|M$ gegeben und diese Summe lässt sich aus den oben erwähnten Tabellen entnehmen.

Dabei zeigt sich, dass diese Summe sehr wesentlich durch die Grössen $M|F_1$, respective $F_2|M$ bedingt ist, d. h. dass die Kraft einer solchen Combination keineswegs, wie dies häufig angenommen wird,[2] in erster Linie oder gar ausschliesslich vom Werthe $F_1|F_2$ abhängt; ändert man die Concentration

[1] Diese Sitzber., Bd. C, S. 607, und CI, S. 627 und 1436.

[2] Vergl. z. B. J. Moser, Monatshefte für Chemie, Bd. VI.

von F_1, so ändert man damit nicht nur die Grösse $F_1|F_2$, sondern auch $M|F_1$. Aus der beobachteten Gesammtkraft eines solchen Elementes kann man somit durchaus keinen Schluss auf den Werth $F_1|F_2$ ziehen, und es ist klar, dass eine Berechnung dieses Werthes sich durch Beobachtung der Gesammtkraft nicht controliren lässt. Es kann vorkommen, dass der Werth $F_1|F_2$ kleiner, oder dass er grösser ist als letzterer; auch kann das Vorzeichen ein entgegengesetztes sein, so dass durch eine derartige Bestimmung selbst der Sinn des Concentrationsstromes falsch ermittelt wird.

Ich gebe im Folgenden drei typische Beispiele dieses Verhaltens, für welche die Zahlen aus §. 8 der II. Mittheilung entnommen sind.

1. **Zn in $ZnSO_4$**. Die beiden Lösungen waren die an obiger Stelle mit I und III bezeichneten und enthielten $18 \cdot 4^0/_0$, resp.

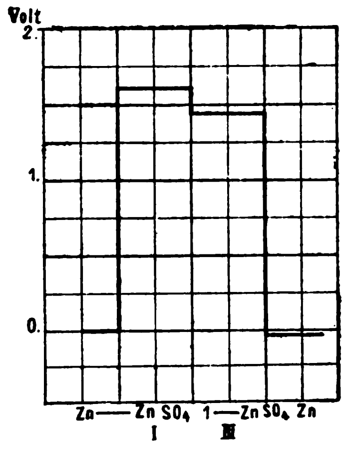


Fig. 1.

$1^0/_0$ des negativen Jons (SO_4). Fig. 1 stellt das Diagramm des offenen Elementes dar; es wirkte hier die Kraft $F_1|F_2$ in gleichem Sinne, wie die Gesammtkraft E, doch ist letztere sehr viel kleiner als erstere.

In Zahlen ausgedrückt ergibt sich Folgendes:

$$E = \mathrm{Zn}|\mathrm{I} + \mathrm{I}|\mathrm{III} + \mathrm{III}|\mathrm{Zn}$$

und da nach dem Früheren in Volt

$$\begin{aligned} Zn|I &= 1\cdot61 \\ I|III &= -0\cdot15 \\ III|Zn &= -1\cdot48 \end{aligned}$$

ist, so folgt $E = -0\cdot02$ Volt; die thatsächliche Kraft $F_1|F_2$ ist also hier siebenmal so gross als die beobachtete Gesammtkraft des Elementes.

Ein aus zwei Gefässen *a* und *b*, die mit den Lösungen I und III gefüllt und durch einen capillaren Bügel verbunden waren, zusammengestelltes Element wurde zum Vergleiche mit obigen untersucht, und zwar sowohl im offenen, wie im geschlossenen Zustande; in letzterem Falle wurden die beiden Zn-Elektroden direct mit einander metallisch verbunden. Es ergab sich offen (am Elektrometer) $E = -0\cdot025$, in genügender Übereinstimmung mit obigem Werthe.

Um das Element auch in geschlossenem Zustande zu untersuchen, wurde der die Elektroden verbindende Bügel an's Elektrometer, und die Flüssigkeiten in *a* und *b* durch das System $Cu|CuSO_4|H_2O$ (wie bei vielen früheren Messungen) zur Erde geleitet.

Es ergaben sich so die Werthe

wenn *a* abgeleitet .... —1·065
wenn *b* abgeleitet .... —1·091.

Die Differenz — also in diesem Falle die ganz in den capillaren Bügel fallende Gesammtkraft E — betrug —0·026.

Berechnet man diese Einzelwerthe nach den früher gefundenen Zahlen, so ergibt sich für *a*:

$$\left.\begin{aligned} Cu|CuSO_4|H_2O|I &= 0\cdot54 \\ I|Zn &= -1\cdot61 \end{aligned}\right\} = -1\cdot07$$

und für das Gefäss *b*:

$$\left.\begin{aligned} Cu|CuSO_4|H_2O|III &= 0\cdot39 \\ III|Zn &= -1\cdot48 \end{aligned}\right\} = -1\cdot09,$$

also wieder in Übereinstimmung mit den für *a* und *b* direct beobachteten Werthen; die Gesammtdifferenz beträgt auch hier wieder —0·02 Volt.

2. **Mg in $MgSO_4$** (Fig. 2). Die hier verwendeten Lösungen I und III enthielten denselben Procentgehalt an SO_4, wie die früheren; wie Fig. 2 zeigt, ist aber jetzt die Kraft $F_1|F_2$ der Gesammtkraft E entgegengesetzt gerichtet, so dass man aus Beobachtung der letzteren allein einen ganz falschen Schluss auf die Richtung der ersteren ziehen würde.

Bei directer Messung des offenen Elementes wurde gefunden:

$$E = 0\cdot221.$$

Die Berechnung nach den Zahlen des §. 8 ergibt dafür:

$$\begin{aligned} Mg|I &= 2\cdot44 \\ I|III &= -0\cdot08 \\ III|Mg &= -2\cdot12 \end{aligned}$$

oder $E = 0\cdot24$, was mit obigem Werth in Anbetracht des Umstandes genügend übereinstimmt, dass einzelne dieser Werthe

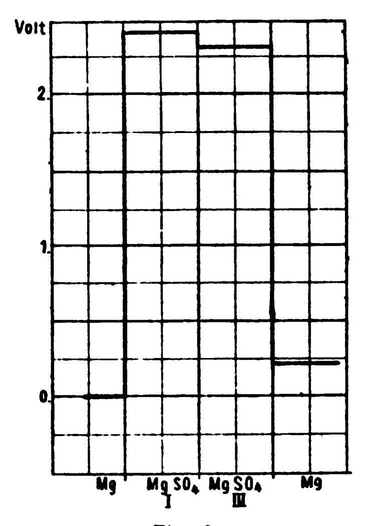


Fig. 2.

nur durch Beobachtung mit einer frei tropfenden Quecksilberelektrode gewonnen werden können, bei welcher Methode Fehler von einigen Hunderteln Volt kaum zu vermeiden sind.

Für den Fall des geschlossenen Elementes wurde nach derselben Methode wie beim $ZnSO_4$, gefunden:

wenn das Gefäss *a* abgeleitet war —1·868,
wenn das Gefäss *b* abgeleitet war —1·657.

Die Differenz von 0·211 Volt steht mit dem direct beobachteten Werth 0·221 und dem berechneten $E = 0 \cdot 24$ zwar nicht in guter, aber immerhin in genügender Übereinstimmung.

Die Einzelpotentiale bei Ableitung der Gefässe *a* und *b* berechnen sich nach den Zahlen des §. 8 wie folgt.

Für *a*:

$$\left.\begin{array}{r} Cu|CuSO_4|H_2O|I = 0 \cdot 47 \\ I|Mg = -2 \cdot 44 \end{array}\right\} = -1 \cdot 97.$$

Für *b*:

$$\left.\begin{array}{r} Cu|CuSO_4|H_2O|III = 0 \cdot 39 \\ III|Mg = -2 \cdot 12 \end{array}\right\} = -1 \cdot 73$$

oder $E = 0 \cdot 24$ wie oben; es stimmen diese Einzelwerthe hier weniger gut mit den beobachteten, als bei $ZnSO_4$.

Dass der Hauptgrund dieser Fehler wie schon erwähnt in der schwierigen, mit der freien Tropfelektrode ausgeführten Messung der Werthe I|III zu suchen sei, das beweist die viel bessere Übereinstimmung in Fällen, wo die Werthe $F_1|F_2$ gegen die anderen verschwindend sind, wie aus den folgenden Zahlen erhellt, die sich auf die Lösungen II (8% SO_4) und III des $MgSO_4$ mit Mg-Elektroden beziehen.

In diesem Falle gab das offene Element direct 0·191 Volt, während die Berechnung aus den Zahlen des §. 8 dafür liefert:

$$\begin{array}{r} Mg|II = 2 \cdot 32 \\ II|III = 0 \cdot 00 \\ III|Mg = -2 \cdot 12 \end{array}$$

oder $E = 0 \cdot 20$.

Für das geschlossene Element wurde gefunden:

bei Ableitung in *a* —1·914,
bei Ableitung in *b* —1·716.

Die Differenz ist 0·198. Für die Einzelwerthe von *a* und *b* berechnet sich:

$$\left.\begin{array}{r} Cu|CuSO_4|H_2O|II = 0\cdot39 \\ II|Mg = -2\cdot32 \end{array}\right\} = -1\cdot93$$

und

$$\left.\begin{array}{r} Cu|CuSO_4|H_2O|III = 0\cdot39 \\ III|Mg = -2\cdot12 \end{array}\right\} = -1\cdot73$$

und daraus der obige Werth $E = 0\cdot20$.

3. **Zn in Na_2CO_3** (Fig. 3). Als dritten Typus endlich wähle ich Zn in verschieden concentrirten Lösungen von Na_2CO_3; hier stimmt die Richtung des eigentlichen Concentrationsstromes $F_1|F_2$ mit der des Gesammtstromes E überein, aber an

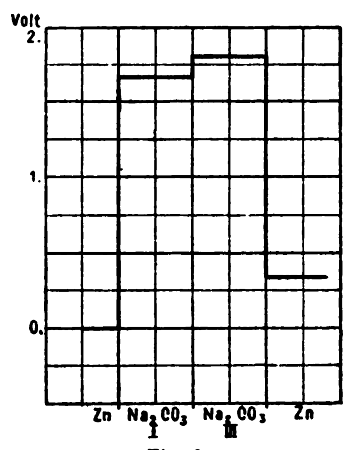


Fig. 3.

Grösse bleibt derselbe wesentlich hinter letzterem zurück. Die Lösungen I und III enthielten 5%, beziehungsweise 0·02% CO_3 Das offene Element gab $E = 0\cdot30$ Volt. Berechnet man E aus den Einzelwerthen, so erhält man:

$$\begin{array}{r} Zn|I = 1\cdot68 \\ I|III = 0\cdot12 \\ III|Zn = -1\cdot46 \end{array}$$

oder $E = 0\cdot34$.

Als Einzelwerthe im geschlossenen Elemente wurde gefunden:

bei Ableitung in *a* ...... —1·350
bei Ableitung in *b* ...... —1·070,

was einen Werth $E = 0 \cdot 28$ ergeben würde.

Die Berechnung obiger Einzelwerthe ergibt:

$$\left.\begin{array}{r} Cu|CuSO_4|H_2O|I = 0\cdot 27 \\ I|Zn = -1\cdot 68 \end{array}\right\} = -1\cdot 41$$

und

$$\left.\begin{array}{r} Cu|CuSO_4|H_2O|III = 0\cdot 39 \\ III|Zn = -1\cdot 46 \end{array}\right\} = -1\cdot 07,$$

welche Werthe mit den direct beobachteten Potentialen bei Ableitung in *a* und *b* genügend übereinstimmen.

Aus dem Vorstehenden ersieht man, dass aus der Gesammtkraft eines Concentrationselementes durchaus kein Schluss, nicht einmal ein qualitativer, auf die Potentialdifferenz der beiden Flüssigkeiten gezogen werden kann.

§. 15. Über die Temperaturcoëfficienten galvanischer Elemente.

In meinen Untersuchungen über die Natur der galvanischen Polarisation[1] habe ich den Nachweis geliefert, dass die elektromotorische Kraft der Polarisation sich mit der Wärmetönung des elektrolytischen Processes deckt, mit anderen Worten, dass dieselbe ihren Grund in der Wiedervereinigung der ausgeschiedenen Jonen hat; diese Ansicht, die der damals herrschenden von einer Änderung der Contactkraft an den Elektroden zuwiderlief, ist jetzt allgemein angenommen und es ergeben sich aus derselben einige Consequenzen, auf die im Folgenden noch kurz eingegangen werden soll.

Wenn die Polarisation durch die Wärmetönung des elektrolytischen Processes bestimmt und gemessen ist — wie dies bei allen glatt verlaufenden Reactionen zutrifft — so muss zur Zersetzung eines Elektrolyten auch eine bestimmte Kraft erforderlich sein; diese, das sogenannte Polarisationsmaximum, zeigt

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 78 (1878).

sich im Allgemeinen veränderlich je nach den Versuchsbedingungen, schliesst man aber die secundären Vorgänge möglichst aus, so kommt man auf den gesuchten constanten Werth, wie ich dies speciell für die Polarisation von Platin in Schwefelsäure nachgewiesen habe.[1]

In jüngster Zeit ist auch Le Blanc[2] durch ganz identische Versuche zu dem gleichen Resultate gekommen; er nennt den betreffenden Punkt den »Zersetzungspunkt«.

Es ist ferner unmittelbar klar, dass in einem Gemisch verschiedener Elektrolyte, z. B. Salzlösungen, durch eine bestimmte elektromotorische Kraft immer nur jene Salze zersetzt werden können, deren Wärmetönung unterhalb der verwendeten elektromotorischen Kraft liegen; dass es auf diese sehr einfache Weise möglich ist, durch Anwendung passender Kräfte elektrolytische Trennungen vorzunehmen, ist vor Kurzem durch eine Untersuchung von Freudenberg[3] gezeigt worden.

Ferner ist klar, dass die Temperatur auf den Werth der Polarisation einen wesentlichen Einfluss haben muss; denn steigern wir dieselbe bis zur Dissociationstemperatur des Elektrolytes, so muss, da dann die Verbindungswärme desselben gleich Null wird, auch die Polarisation den Werth Null annehmen.

Auch diese Folgerung hat eine vollständige Bestätigung gefunden durch die Untersuchungen von Poincaré,[4] welcher in geschmolzenen Salzen die Polarisation bei der Dissociationstemperatur in der That auf Null sinken sah.

Aber auch wenn wir mit der Temperatur nicht bis zum Dissociationspunkte gehen, werden wir stets eine Abnahme der Polarisation erwarten müssen — und die später folgenden Beobachtungen bestätigen dies — denn es kann kaum einem Zweifel unterliegen, dass die Stabilität einer chemischen Verbindung, wenn secundäre Einflüsse ausgeschlossen sind, mit steigender Temperatur abnehmen muss.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 77 (1878).

[2] Zeitschr für phys. Chem., Bd. 8 (1891). Vergl. auch Nourisson, C. R. Bd. 118, S. 189 (1894).

[3] Chem. Ber. Bd. 25 (1892).

[4] C. R. Bd. 110 (1890).

Wenn wir ferner berücksichtigen, dass in den galvanischen Elementen die einzelnen Potentialdifferenzen an den Polen mit den dort sich abspielenden chemischen Processen in innigem Zusammenhange stehen, ja durch dieselben geradezu bedingt sind, so werden wir erwarten müssen, dass jeder Einfluss, der den Wärmewerth dieser Processe ändert, auch für die elektromotorische Kraft des Elementes massgebend sein wird; durch diesen Umstand scheinen mir die Temperaturcoëfficienten der Elemente wenn nicht ausschliesslich, so doch in allererster Linie bestimmt.

Betrachten wir z. B. das Daniell'sche Element; die beiden in Betracht kommenden Reactionen sind hier die Bildung des $ZnSO_4$ und die Zersetzung des $CuSO_4$; erstere trägt im positiven, letztere im negativen Sinne zur Bildung der elektromotorischen Kraft des Elementes bei. Wären die Temperaturcoëfficienten dieser beiden Reactionen gleich, d. h. wäre die Differenz der Bildungswärme (und Lösungswärme in Wasser) dieser beiden Salze bei allen Temperaturen constant, so wäre auch der Temperaturcoëfficient des Elementes gleich Null; nun trifft diese Voraussetzung aber nicht allgemein zu, es hängt der Temperaturcoëfficient dieser Reactionen sehr wesentlich von den Concentrationen der Lösungen ab und mit diesen variirt daher auch der Temperaturcoëfficient des Elementes.

Eine Erwärmung des Daniell'schen Elementes als Ganzes hat unter allen Umständen eine Verminderung des Potentialgewinnes am Zn-Pol, und eine Verminderung des Potentialverlustes am Cu-Pol zur Folge; von dem Grössenverhältnisse beider hängt der Temperaturcoëfficient des Elementes ab.

Speciell für das Daniell'sche Element ist der Einfluss der Concentrationen auf den Temperaturcoëfficienten durch die Untersuchungen von Ebeling,[1] Meyer[2] und Gockel[3] ausser Zweifel gesetzt und für eine Reihe von Concentrationen auch für die beiden Pole einzeln bestimmt.

---

1 Wied. Ann. Bd. 30 (1887).
2 Wied. Ann. Bd. 33 (1888).
3 Wied. Ann Bd. 40 (1890).

Das Voller'sche Normaldaniell, charakterisirt durch eine $ZnSO_4$-Lösung vom spec. Gew. 1·20 und eine $CuSO_4$-Lösung vom spec. Gew. 1·102, zeichnet sich bekanntlich durch seine ausserordentliche Unempfindlichkeit gegen Temperaturschwankungen aus; nach dem Vorstehenden müsste man diese darauf zurückführen, dass bei den gewählten Concentrationen sich die beiden Temperaturcoëfficienten der Pole gerade compensiren. Da in den obcitirten Arbeiten sich die eben genannten Concentrationen nicht finden, so habe ich dieselben speciell untersucht; es wurde zu diesem Zwecke ein Daniell aus drei getrennten Gefässen *a*, *b*, *c* hergestellt, dieselben untereinander durch Heber verbunden, *a* und *b* mit $ZnSO_4$ und *c* mit $CuSO_4$ von den genannten Concentrationen gefüllt. In *a* tauchte eine Zn-, in *c* eine Cu-Elektrode; sowohl *a* als *c* konnten separat erwärmt, respective abgekühlt werden, während gleichzeitig die elektromotorische Kraft des Elementes an einem Elektrometer gemessen wurde. Es ergaben sich so die Resultate der folgenden Tabelle, in welcher Δ_c und Δ_z die Differenzen der bei T^0 des einen Poles beobachteten Kraft des Elementes mit jener bei beiderseits 20° darstellen.

T	Zn|ZnSO$_4$ auf $T°$ Cu|CuSO$_4$ auf 20°	Δ_z	Zn ZnSO$_4$ auf 20° Cu|CuSO$_4$ auf $T°$	Δ_c
20	1·000		1·000	
95	0·937	—0·063	1·055	+0·055
90	0·943	—0·057	1·049	+0·049
85	0·949	—0·051	1·045	+0·045
80	0·954	—0·046	1·042	+0·042
75	0·958	—0·042	1·039	+0·039
70	0·962	—0·038	1·037	+0·037
65	0·966	—0·034	1·033	+0·033
60	0·969	—0·031	1·030	+0·030
55	0·972	—0·028	1·028	+0·028
50	0·976	—0·024	1·023	+0·023
45	0·980	—0·020	1·020	+0·020
40	0·984	—0·016	1·016	+0·016

T	Zn|$ZnSO_4$ auf T° Cu|$CuSO_4$ auf 20°	Δ_z	Zn|$ZnSO_4$ auf 20° Cu|$CuSO_4$ auf T°	Δ_c
35	0·989	—0·011	1·012	+0·012
30	0·993	—0·007	1·008	+0·008
25	0·997	—0·003	1·004	+0·004
20	1·000	±0 000	1·000	±0·000
15	1·004	+0·004	0·997	—0·003
10	1·008	+0·008	0·994	—0·006
5	1·012	+0·012	0·991	—0·009
0	1·015	+0·015	0·987	—0 013
—5	1·017	+0·017	0·984	—0·016

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die beiden Temperaturcoëfficienten sich in dem Intervall von 20°—70° in der That vollständig compensiren, obwohl jeder für sich eine Änderung der Kraft des Elements von fast 4% hervorbringen würde; selbst bei 95° ist der Unterschied beider noch gering und beträgt nur 0·008 D im Sinne einer Abnahme der Gesammtkraft.

Dem Vorstehenden entsprechend müssen alle Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Flüssigkeiten einen Temperaturcoëfficienten aufweisen, der durch den Temperaturcoëfficienten der zugehörigen Wärmetönung gegeben ist; beständen alle auftretenden Reactionen nur einfach in Verbindungen vorher isolirter Stoffe, so wären zweifellos sämmtliche Coëfficienten negativ. So einfache Reactionen kommen aber wohl nur in vereinzelten Fällen vor, im Allgemeinen sind die auftretenden Verbindungen von gleichzeitigen Zersetzungen, Lösungen, Absorptionen etc. begleitet, so dass der thatsächlich der Beobachtung zugängliche Temperaturcoëfficient als die Summe mehrerer einzelner zu betrachten ist, die sich auf verschiedene, sehr oft nicht einmal der Art nach angebbare Reactionen beziehen.

Ich gebe im Folgenden die Änderungen der Potentialdifferenz zwischen Metallen und einigen Flüssigkeiten mit der Temperatur an. Dieselben wurden in der Weise erhalten, dass die Flüssigkeit in zwei durch einen Bügel verbundene Gefässe

gefüllt, in jeder derselben eine Elektrode aus dem zu untersuchenden Metall getaucht, die eine derselben zur Erde und die andere zum Elektrometer geleitet wurde. Bei gleicher Temperatur in beiden Gefässen ist der Ausschlag Null, erwärmt man aber die Flüssigkeit in einem der beiden Gefässe — es war dies immer das mit dem Elektrometer verbundene, — so zeigt sich im Allgemeinen ein Ausschlag. Da die Metalle in den Flüssigkeiten negativ werden, so bedeutet ein positives Vorzeichen in den folgenden Tabellen, dass die Potentialdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit am erwärmten Pol kleiner ist als am kalten. Die Temperatur des letzteren war durchwegs 25°, die des ersteren 92° C.

Die der Untersuchung unterzogenen Flüssigkeiten waren die Säuren H_2SO_4 (1%), HNO_3 (0·6%), $C_2H_4O_2$ (0·6%) und $C_2H_2O_4$ (7%); ferner KOH (5%) und NaOH (0·3%).

Metalle in Säuren.

Metall	H_2SO_4	HNO_3	C_2H_4O	$C_2H_2O_4$
Mg	−0·11	−0·10	−0·16	−0·11
Al	−0·17	+0·06[1]	−0·16	−0·20
Fe	−0·02	−0·05	−0·05	+0·03
Ni	−0·08	−0·10	−0·11	−0·05
Cu	+0·04	+0·04	+0·03	−0·01
Zn	+0·01	−0·05	+0·05	+0·03
Ag	+0·01	+0·04	+0·04	+0·02
Cd	+0·005	+0·05	+0·06	+0·005
Sn	−0·01	+0·02	+0·02	0
Pb	−0·02	−0·02	+0·05	0

[1] Zuerst − dann +.

Metalle in Basen.

Metall	KOH	NaOH
Mg	—0·15	—0·38
Al	+0·24	+0·35
Fe	—0·20	—0·18
Ni	—0·20	—0·24
Cu	—0·10	—0·20
Zn	—0·16	—0·10
Ag	—0·21	—0·13
Cd	—0·11	—0·10
Sn	—0·12	—0·30
Pb	—0·12	—0·13

Im Gang der Zahlen dieser beiden Tabellen lässt sich eine gewisse Regelmässigkeit nicht verkennen; gewisse Metalle, wie Mg, Al, Fe, Ni zeigen in den Säuren fast durchwegs einen negativen Temperaturcoëfficienten, d. h. die Erwärmung wirkt in dem Sinne, dass die Summe der Wärmetönungen der Reactionen am erwärmten Pol grösser wird, als am kalten. Das umgekehrte Verhalten zeigen Cu, Zn, Ag und Cd, während Sn und Pb überhaupt nur sehr kleine und unbestimmte Änderungen erkennen lassen. In KOH und NaOH wurden sämmtliche Metalle mit Ausnahme des Al bei höherer Temperatur stärker negativ als bei tiefer.

Während man bei der vorstehenden Anordnung über die Änderung der Reactionswärmen mit der Temperatur nicht viel aussagen kann, da die betreffenden Reactionen sich nicht übersehen lassen, gelingt dies besser bei Untersuchung der Polarisationen bei höherer Temperatur. Da die Polarisation quantitativ durch die Wärmetönung der auftretenden Reactionen bestimmt, diese Wärmetönung aber stets positiv ist, so lässt sich auch ohne strenge Kenntniss dieser Reactionen voraussagen, dass die Polarisation mit der Temperatur abnehmen muss; je näher diese dem Dissociationspunkte der zu zersetzenden Verbindung kommt, desto mehr wird sich die Polarisation

dem Werthe Null nähern und erreicht diesen, wie schon oben gezeigt wurde, bei der Dissociationstemperatur selbst.

Über den Einfluss der Temperatur auf die Polarisation liegen bisher nur einige vereinzelte Messungen vor; so hat für Platinelektroden in angesäuertem Wasser schon Beetz vor langer Zeit eine Abnahme der Polarisation mit steigender Temperatur constatirt; auch Bartoli[1] fand in concentrirter H_2SO_4 eine Abnahme der Polarisation von 2·80 bis 1·13 Volt zwischen 5° und 250° C. Um diese Verhältnisse genauer zu studiren, habe ich die im Folgenden mitgetheilten Messungen der Polarisation in Säuren, Basen und Salzlösungen bei verschiedenen Temperaturen ausgeführt; als Elektroden dienten Platinbleche bei allen Versuchen, nur bei den Chlorverbindungen wurden Kohlenplatten verwendet.

Der Strom eines Accumulators von der elektromotorischen Kraft E wurde durch einen grossen Widerstand W und die Zelle geschlossen; die Dimensionen der letzteren waren derartige, dass ihr Widerstand gegen den übrigen der Schliessung zu vernachlässigen war. Von den beiden Elektroden wurde dann der Strom durch ein Siemens'sches Torsionsgalvanometer mit 1000 Ω Widerstand abgezweigt und an letzterem die Polarisation während des Durchganges des primären Stromes direct abgelesen. Die Grössen E und W, von denen ja bei grossen Elektroden die Polarisation zum Theile abhängt, sind im Folgenden bei jedem Versuche angegeben; die Ablesungen erfolgten von 10 zu 10 Graden sowohl bei Erwärmung, als bei Abkühlung der Zelle, um einen etwaigen Einfluss des Nachbleibens der Thermometer thunlichst zu eliminiren.

Die betreffenden Polarisationen P_E und P_A sind in Volts angegeben.

---

[1] Nuovo Cim. (3) Bd. 7 (1880).

1. Pt in H_2SO_4 (1:10)

$E = 3·68$ Volt, $W = 1000\ \Omega$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·82	1·82	1·820
30	1·80	1·80	1 800
40	1·78	1·77	1·775
50	1·73	1·71	1·720
60	1·70	1·66	1·680
70	1·61	1·62	1·615
80	1·56	1·55	1·555
90	1·41	1·42	1·415

2. C in HCl (12%)

$E = 5·48$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·70	1·65	1·675
30	1·64	1·58	1·610
40	1·58	1·53	1·555
50	1·54	1·51	1·525
60	1·49	1·48	1·485
70	1·44	1·43	1·435
80	1·40	1·39	1·395
90	1·35	1·35	1·350

3. Pt in HNO_3 (20%)

$E = 5·5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·16	1·18	1·170
30	1·10	1·12	1·110
40	1·08	1·08	1·080
50	1·02	1·03	1·025
60	0·99	0·98	0·985
70	0·95	0 94	0·945
80	0·92	0·92	0.920
90	0·90	0·90	0·900

4. Pt in $C_2H_4O_2$ (25%)

$E = 5·5$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1 98	2·04	2·010
30	1·92	2·00	1·960
40	1·87	1·95	1·910
50	1·81	1·90	1·855
60	1·77	1·86	1·815
70	1·70	1·80	1·750
80	1·60	1·69	1·645
90	1·54	1·54	1·540

5. Pt in NaOH ($5^0/_0$)

$E = 5 \cdot 6$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·92	1·93	1·925
30	1·86	1·88	1·870
40	1·82	1·83	1·825
50	1·77	1·77	1·770
60	1·73	1·72	1·725
70	1·67	1·66	1·665
80	1·64	1·63	1·635
90	1·60	1·60	1·600

6. Pt in KOH ($0 \cdot 3^0/_0$)

$E = 5 \cdot 6$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·90	1·95	1·925
30	1·78	1·78	1·780
40	1·72	1·72	1·720
50	1·67	1·69	1·680
60	1·62	1·64	1·630
70	1·60	1·60	1·600
80	1·58	1·57	1·575
90	1·56	1·56	1·560

Bei den folgenden Salzlösungen bedeuten die Procente den Gehalt an wasserfreiem Salze.

7. Pt in $CuSO_4$ (concentrirt)

$E = 3 \cdot 70$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·42	1·43	1·425
30	1·40	1·40	1·400
40	1·35	1·34	1·345
50	1·30	1·30	1·300
60	1·25	1·24	1·245
70	1·18	1·18	1·180
80	1·13	1·15	1·140
90	1·10	1·10	1·100

Die folgende Beobachtung bezieht sich auf ein anderes *E* und *W*; es ändern sich dadurch die Werthe von *P* etwas, der allgemeine Gang mit der Temperatur jedoch nicht.

8. Pt in $CuSO_4$ (concentrirt)
$E = 1 \cdot 90$, $W = 500$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·22	1·22	1·220
30	1·20	1·20	1·200
40	1·19	1·19	1·190
50	1·14	1·14	1·140
60	1·10	1·10	1 100
70	1·06	1·08	1·070
80	1·02	1·03	1·025
90	1·00	1·00	1·000

9. Pt in $ZnSO_4$ (17%; spec. Gew. 1·20)
$E = 5 \cdot 5$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·42	2·43	2·425
30	2·40	2·41	2·405
40	2·38	2·39	2·385
50	2·33	2 32	2·325
60	2·30	2 30	2·300
70	2·27	2·28	2·275
80	2·25	2·02	2·135
90	2·21	1·95	2·080

10. Pt in $NiSO_4$ (8·4%)
$E = 5 \cdot 48$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·12	2·08	2·100
30	2·08	1·98	2·030
40	2·00	1·92	1·960
50	1·86	1·87	1·865
60	1·78	1·80	1·790
70	1·72	1·74	1·730
80	1·66	1·68	1·670
90	1·61	1·62	1·615

11. C in $CuCl_2$ (18·8%)

$E = 5 \cdot 48$, W = 600.

T	P_E
20	0·80
30	0·78
40	0·75
50	0·72
60	0·68
70	0·65
80	0·62
90	0·59

12. C in $NiCl_2$ (18·2%)

$E = 5 \cdot 48$, $W = 600$.

T	P_E	P_A
20	1·35	1·83
30	1·32	1·68
40	1·30	1·58
50	1·28	1·51
60	1·28	1·51
70	1·28	1·50
80	1·27	1·48
90	1·28	1·37

13. C in $ZnCl_2$ (9·5%)

$E = 5 \cdot 5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A
20	2·13[1]	2·32
30	2·08	2·22
40	2·00	2·18
50	1·92	1·99
60	1·84	1·95
70	1·80	1·91
80	1·73	1·83
90	1·69	1·71

[1] Steigt allmälig von 0·9 bis zu obigem Werthe.

Der unregelmässige Gang in Nr. 11 bis 13, sowie die abnorm tiefen Werthe in Beobachtung 11 haben ihren Grund ohne Zweifel in dem Umstande, dass bei Anwendung von Kohlenplatten als Elektroden die Ausbildung der Polarisation geraume Zeit erfordert; in Nr. 12 und 13 bleiben daher die Werthe bei Erwärmung wesentlich hinter jenen bei Abkühlung zurück, da bei letzteren der Stromschluss schon ein längerdauernder war.

Es geht daher auch nicht an, Mittelwerthe aus P_E und P_A zu bilden; jedenfalls sind die Werthe unter P_A die zuverlässigeren.

Bei den folgenden Messungen mit C-Elektroden wurde bei jeder Temperatur das Constantwerden der Einstellung abgewartet.

14. C in Fe_2Cl_6 (15·2%)
$E = 5·5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	0·85	0·87	0·860
30	0·82	0·81	0·815
40	0 77	0·75	0·760
50	0·71	0 68	0·695
60	0·64	0·63	0·635
70	0·61	0·61	0·610
80	0·55	0·56	0·555
90	0·51	0·51	0·510

15. C in $MgCl_2$ (13·3%)
$E = 5·5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·32	2 30	2·310
30	2·24	2·20	2·220
40	2·16	2·12	2·140
50	2·08	2·04	2·060
60	1·97	1·95	1·960
70	1·89	1·88	1·885
80	1·83	1·83	1·830
90	1·78	1·78	1·780

16. Pt in $Fe_2(NO_3)_6$ (11·5%)

$E = 5·5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·40	1·36	1·380
30	1·30	1·28	1·290
40	1·20	1·18	1·190
50	1·13	1·12	1·125
60	1·09	1·04	1·065
70	1·02	0·98	1·000
80	0·96	0·93	0·945
90	0·92	0·90	0·910

17. Pt in $Cu(NO_3)_2$ (13·3%)

$E = 3·68$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·50	1·51	1·505
30	1·50	1·51	1·505
40	1·45	1·42	1·435
50	1·42	1·38	1·400
60	1·40	1·32	1·340
70	1·35	1·27	1·310
80	1·30	1·24	1·270
90	1·24	1·22	1·230

18. Pt in $Ni(NO_3)_2$ (13·0%)

$E = 3·68$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·68	1·72	1·700
30	1·64	1·66	1·650
40	1·60	1·62	1·610
50	1·55	1·57	1·560
60	1·50	1·52	1·510
70	1·44	1·45	1·445
80	1·38	1·38	1·380
90	1·31	1·32	1·315

19. Pt in $Zn(NO_3)_2$ (13·4%)

$E = 5·6$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·22	2·25	2·235
30	2·16	2·22	2·190
40	2·10	2·15	2·125
50	2·06	2·08	2·070
60	1·95	1·96	1·955
70	1·90	1·90	1·900
80	1·86	1·88	1·870
90	1·84	1·84	1·840

20. Pt in $Mg(NO_3)_2$ (10·5%)

$E = 5·5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·20	2·38	2·290
30	2·10	2·28	2·190
40	2 01	2·13	2·070
50	1·78	1·98	1·880
60	1·68	1·75	1·715
70	1·51	1·62	1·565
80	1·40	1 53	1·465
90	1·35	1·38	1·365

21. Pt in $Na_2(NO_3)_2$ (12·1%)

$E = 5·5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·40	2·50	2·450
30	2·30	2·40	2·350
40	2·22	2·34	2·280
50	2·14	2·25	2·195
60	2·05	2·12	2·085
70	1·93	2·02	1·975
80	1·88	1·92	1·900
90	1·82	1·82	1·820

22. Pt in $Cu(C_2H_3O_2)_2$ (5%)

$E = 3·7$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·14	1·16	1·150
30	1·10	1·10	1·100
40	1·00	1·03	1·015
50	0·96	0·97	0·965
60	0·91	0·90	0·905
70	0·85	0·83	0·840
80	0·80	0·78	0·790
90	0·74	0·74	0·740

23. Pt in $Ni(C_2H_3O_2)_2$ (5·9%)

$E = 5$ 48, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	1·80	1·75	1·775
30	1·72	1·69	1·705
40	1·65	1·63	1·640
50	1·57	1·57	1·570
60	1·50	1·49	1·495
70	1·43	1·41	1·420
80	1·33	1·32	1·325
90	1·27	1·27	1·270

24. Pt in $Zn(C_2H_3O_2)_2$ (5%)
$E = 5 \cdot 5$, $W = 1000$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·33	2·35	2·340
30	2·27	2·32	2·295
40	2·21	2·28	2·245
50	2·15	2·22	2·185
60	2·08	2·16	2·120
70	1·98	2·07	2·025
80	1·86	1·92	1·890
90	1·81	1·81	1·810

25. Pt in $Mg(C_2H_3O_2)_2$ (1%)
$E = 5 \cdot 5$, $W = 600$.

T	P_E	P_A	Mittel
20	2·50	2·55	2·525
30	2·40	2·46	2·430
40	2·31	2·37	2·340
50	2·25	2·28	2·265
60	2·20	2·24	2·220
70	2·15	2·17	2·160
80	2·09	2·10	2·095
90	2·02	2·00	2·010

Wie aus den Zahlen der vorstehenden Tabellen erhellt, nimmt, ganz unserer Voraussetzung gemäss, der Wärmewerth aller untersuchten Verbindungen mit steigender Temperatur ab und zwar in den meisten Fällen sehr bedeutend; drückt man die Abnahme der Polarisation zwischen 20° und 90° in Procenten des Werthes bei 20° aus, so ergeben sich die folgenden Zahlen:

Zersetzte Verbindung	$100 \frac{P_{20}-P_{90}}{P_{20}}$
1. H_2SO_4	22·4%
2. HCl	19·4
3. HNO_3	23·1
4. $C_2H_4O_2$	23·0
5. NaOH	16·6%
6. KOH	18·7
7. $CuSO_4$	22·5%
8. $CuSO_4$	18·0
9. $ZnSO_4$	14·0
10. $NiSO_4$	23·3

Zersetzte Verbindung	$100\,\frac{P_{20}-P_{90}}{P_{20}}$
11. $CuCl_2$	26·2%
12. $NiCl_2$	25·1
13. $ZnCl_2$	26·3
14. Fe_2Cl_6	40·8
15. $MgCl_2$	23·0
16. $Fe_2(NO_3)_6$	34·0%
17. $Cu(NO_3)_2$	18·0
18. $Ni(NO_3)_2$	23·0
19. $Zn(NO_3)_2$	17·4
20. $Mg(NO_3)_2$	40·6
21. $NaNO_3$	25·7
22. $Cu(C_2H_3O_2)_2$	35·0%
23. $Ni(C_2H_3O_2)_2$	28·8
24. $Zn(C_2H_3O_2)_2$	22·6
25. $Mg(C_2H_3O_2)_2$	20·2

Eine Gesetzmässigkeit innerhalb der einzelnen Gruppen lässt sich hier nicht erkennen, ist auch kaum zu erwarten, da man es hier nicht mit den einfachen Verbindungen, sondern auch mit den Lösungen der Producte zu thun hat; welchen Gang aber die Temperaturcoëfficienten der Lösungswärmen einschlagen, das lässt sich vorläufig nicht übersehen.

Dass die Änderung der Polarisation von $ZnSO_4$ und $CuSO_4$ mit der Temperatur hier sehr viel grösser resultirt als bei der Untersuchung des Daniell, wo die Änderung an jedem Pol zwischen 20° und 90° nur circa 0·06 Volt betrug, dürfte seinen Grund darin haben, dass es sich hier um die Reactionen (Zn, O, SO_3) und (Cu, O, SO_3) handelt, im Daniell'schen Elemente dagegen aller Wahrscheinlichkeit nach um die Reactionen (Zn, SO_4) und (Cu, SO_4). Dafür spricht auch der Umstand, dass den Polarisationen die Werthe 2·34, respective 1·43 zukommen, den Potentialdifferenzen zwischen den Polen und den Flüssigkeiten im Daniell aber nur die Werthe 1·34, respective 0·34.

Wollte man die Temperaturcoëfficienten chemischer Reactionen auf dem eingeschlagenen Wege in ihrer Reinheit unter-

suchen, so müsste man dafür sorgen, dass ausser der gewünschten Reaction kein weiterer Vorgang, wie z. B. Lösung des Productes, eintritt; das stösst aber auf erhebliche Schwierigkeiten, indem die Producte der Elektrolyse, sobald sie nicht gelöst werden, sondern sich an den Elektroden absetzen, zu Störungen Veranlassung geben. (Die Elektrolyse geschmolzener Salze würde vielleicht ein geeignetes Mittel sein.)

Hätte ein galvanisches Element nur einen einzigen Potentialsprung und dementsprechend auch nur eine Reaction, so würde der Temperaturcoëfficient eines solchen Elementes zugleich der Coëfficient der betreffenden Reaction sein, d. h. da letzterer immer negativ ist, so müsste ein solches Element auch stets einen negativen Temperaturcoëfficienten aufweisen. Ich habe nun solche Elemente mit nur einem Potentialsprung angegeben,[1] es sind das solche, die nur aus Grundstoffen bestehen und deren einer Pol durch Kohle gebildet wird, z. B. C | Br | M, wo M irgend ein durch Brom angreifbares Metall bezeichnet. Hier findet nur an der Stelle Br | M ein Potentialsprung statt entsprechend dem Wärmewerth (Br, M), und wird ein derartiges Element erwärmt, so müsste seine elektromotorische Kraft sinken.

Leider sind derartige Messungen für die meisten Metalle sehr ungenau wegen der Unlöslichkeit der gebildeten Bromverbindung, doch liess sich bei allen untersuchten Combinationen entweder eine deutliche Abnahme der elektromotorischen Kraft mit der Temperatur oder ein Constantbleiben derselben innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler constatiren; in keinem Falle aber zeigte sich eine Zunahme. So zeigte z. B. das Element Zn | Br | C bei den Temperaturen 2°, 20° und 50° die Werthe 1·57, 1·52 und 1·42 als Mittel mehrerer Versuche.

Bei Ag, Cd, Pb und Cu konnte ein deutlicher Effect nicht wahrgenommen werden, bei Ni dagegen sank der Werth zwischen 20° und 50° von 0·53 auf 0·45; ebenso bei Fe zwischen denselben Temperaturen von 0·51 auf 0·34.

Soweit somit gegenwärtig diesbezügliche Beobachtungen vorliegen, wird man sagen müssen, dass der Wärmewerth einer

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 74 (1881).

chemischen Reaction mit steigender Temperatur abnimmt; die Temperaturcoëfficienten der galvanischen Elemente aber können als der Ausdruck dieses Effectes angesehen werden.

§. 16. Über Verbindungswärmen.

In der Einleitung zur ersten Mittheilung[1] habe ich schon auf den Zusammenhang zwischen der elektrischen Energie einer Molekel und deren Bildungswärme im allgemeinen hingewiesen und den Satz ausgesprochen, »dass die bei der Bildung von HCl aus H und Cl resultirende Wärme nichts anderes ist, als das Äquivalent der Arbeit, welche von den elektrischen Ladungen der Ionen bei Annäherung derselben bis auf Moleculardistanz geleistet wird».

Eine analoge Anschauungsweise ist theils gleichzeitig, theils später von Richarz[2] und von Ebert[3] ausgesprochen worden mit dem Unterschiede, dass von diesen nicht die Bildungswärme der chemischen Verbindungen, sondern die der Moleküle eines Grundstoffes aus den Atomen der Rechnung unterzogen wird; die Dissociationswärme, die für H_2 und J_2 angenähert bekannt ist, soll danach identisch sein mit der elektrischen Energie der betreffenden Molekeln. Was die dieser Rechnung zu Grunde liegende Vorstellung anlangt, dass z. B. die beiden Atome einer Wasserstoff oder einer Chlormolekel entgegengesetzte Ladungen im Molekül besitzen, so kann ich mich derselben nicht anschliessen; es scheinen mir dagegen sowohl chemische als physikalische Bedenken obzuwalten, die bisher, wie mir scheint, zu wenig berücksichtigt wurden. So ist es z. B. schwer verständlich, dass die positiv und die negativ geladenen Atome desselben Stoffes sich chemisch vollkommen gleich verhalten sollen. Oder, dass in einer Verbindung wie HCl sich doch immer H positiv und Cl negativ geladen findet; erzeugt man HCl aus H_2 und Cl_2, so müssten nach obiger Vorstellung HCl-Moleküle entstehen nach dem Schema H_+Cl_-

[1] Diese Berichte. Bd, 100, Mai 1891.

[2] Sitzungsber. der Niederrh. Gesellsch. 1890 und 1891, Verh. der phys. Gesellsch. zu Berlin 1891 und Wied. Ann., Bd. 52 (1894).

[3] Wied. Ann., Bd. 50 (1893).

und ebensoviele $H_{-}Cl_{+}$. Eine HCl-Lösung, der Elektrolyse unterworfen, müsste demnach an jedem Pol sowohl H als Cl liefern. Auch F. Braun[1] hat jüngst auf derartige Schwierigkeiten aufmerksam gemacht, die jedenfalls zu einer sehr vorsichtigen Anwendung dieser Vorstellungsweise mahnen.

Dass dagegen die Ionen eines Elektrolyten mit entgegengesetzten Ladungen behaftet sind, wird gegenwärtig kaum mehr in Zweifel gezogen werden; um nun die elektrische Arbeit zu berechnen, die bei der Bildung einer Molekel geleistet wird, ist die Kenntniss dreier Grössen erforderlich: erstens der Ladung die mit einem Atom verbunden ist, der sogenannten Valenzladung im Falle eines einwerthigen Atoms, zweitens der Moleculargrösse und drittens der Anzahl Moleküle in der Masseneinheit. Die erste Grösse folgt aus dem Faraday'schen Gesetze der Elektrolyse, die zweite und dritte aus der kinetischen Gastheorie. Besonders die dritte Grösse ist dabei mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet, indem die aus der Querschnittssumme resultirenden Werthe dafür um Hunderte von Procenten variiren. Ich habe darum zur Berechnung der letzteren einen anderen Weg eingeschlagen,[2] der sich aus der Bestimmung des wahren specifischen Gewichtes der Substanzen mit Hilfe der Dielektricitätsconstanten oder der Brechungsexponenten ergibt. Es hat dieses Verfahren auch den Vortheil, dass dadurch die fragliche, gewöhnlich mit N bezeichnete Zahl für jede Substanz unabhängig von den anderen bestimmt wird.

Ich gebe im Folgenden die Berechnung der Bildungswärme der HCl und des H_2O unter der Voraussetzung, dass nur die elektrischen Kräfte dabei thätig sind, welche von Atom zu Atom wirken. Die elektrische Energie des Systems ist dabei gegeben durch das Product der Atomladungen, dividirt durch die Moleculardistanz, und diese Energie müsste der Wärmestörung

---

[1] Zeitschr. für physikal. Chemie, Bd. 13 (1894).

[2] Diese Berichte, Bd. 91 (1885). Ich ergreife die erste Gelegenheit die sich bietet, um zu constatiren, dass die in dieser Arbeit durchgeführte Idee der Bestimmung molecularer Grössen aus den Dielektricitätsconstanten schon früher von Dorn (Wied. Ann. XIII, [1881]) ausgesprochen wurde; das Übersehen dieser Arbeit war dadurch bedingt, dass sich dieselbe in den »Beiblättern« nicht citirt findet.

quivalent sein. Als sicher kann angenommen werden, dassä 1 Cb. 0·01 *mg* H_2 ausscheidet, oder dass diese Menge H_2 mit $3\cdot 10^9$ E. E. geladen ist.

H_2O. Zur Ermittlung der Zahl N Moleküle, welche in 0·01 *mg* H_2 enthalten sind oder welche die Ladung $3\cdot 10^9$ E. E. besitzen, dient, unter Voraussetzung kugelförmiger Moleküle, die Gleichung: $N\frac{4}{3}\pi\rho^3\sigma = 0\cdot 01\, mg = 10^{-5}\, g$. Es ist ferner:[1] $\rho = 5\cdot 10^{-9}\, cm$ und $\sigma = 1$, somit $N = 2\cdot 10^{19}$. Ein H_2 Molekül erscheint somit geladen mit $\frac{3}{2}\cdot 10^{-10}$ E. E. Die Energie einer H_2O Molekel wird demnach 10^{-12} Erg. und die von 0·01 *mg* H_2 in Form von $H_2O = 2\cdot 10^7$ Erg. 1 *g* H_2 in dieser Form repräsentirt somit $2\cdot 10^{12}$ Erg. $= 2\cdot 10^9\, g\,.\, cm = 2\cdot 10^4\, kg\,.\, m$ oder 47 Calorien. Die thermochemischen Bestimmungen dagegen liefern für die Verbrennung von 1 *g* H_2 34 Calorien, also einen Werth, der mit obigem sehr nahe übereinstimmt.

Es sind bei dieser Berechnung die Moleculargrössen des H_2 zu Grunde gelegt, man könnte ebensogut auch von jenem des O_2 ausgehen; man hätte dann zu berücksichtigen, dass $3\cdot 10^9$ E. E. an 0·08 *mg* O_2 haften und dass für $\rho = 8\cdot 10^{-9}\, cm$ und $\sigma = 8$ zu setzen ist. Man erhält so die Ladung von 1 Atom $O_2 = 3\cdot 10^{-10}$ E. E. und die Arbeit bei Annäherung von H_2 an O aus dem Unendlichen bis in Moleculardistanz gleich 90 Calorien statt der beobachteten 34. Unter Berücksichtigung der mannigfachen zweifelhaften Grössen und Voraussetzungen, welche in die Rechnung eingehen, wird man eine derartige Übereinstimmung immerhin befriedigend nennen müssen.

HCl. Für die Verbindungswärme der Salzsäure sind folgende Grössen massgebend: $3\cdot 10^9$ E. E. haften an 0·35 *mg* Cl; ferner ist für Cl $\rho = 10^{-8}$ und $\sigma = 6\cdot 2$ zu setzen; die mit $3\cdot 10^9$ E. E. geladene Zahl Cl-Atome beträgt somit $N = 14\cdot 10^{18}$, oder die Ladung eines Atoms $Cl = 2\cdot 10^{-10}$. Daraus berechnet sich die Verbindungswärme von 1 *g* H_2 mit Cl zu 77 Calorien, statt 40 Calorien, wie die thermochemischen Untersuchungen liefern. Geht man bei der Berechnung nicht von Cl, sondern

[1] Diese Berichte, Bd. 91 (1885).

von H aus, so gelangt man zu dem Werthe 47 Calorien, also auch hier zeigt sich wieder eine gute Übereinstimmung.

Die Valenzladungen, welche sich für Cl, H und O auf von einander ganz unabhängigen Wegen ergeben, stimmen untereinander recht gut überein, sie sind für H $= {}^{3}/_{4}\, 10^{-10}$, für O $= 1\cdot5 . 10^{-10}$ und für Cl $= 2\cdot10^{-10}$; von Richarz[1] wurde auf ganz anderem Wege dafür der Werth $1\cdot29 . 10^{-10}$ erhalten.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass man, vorläufig für die gegebenen Beispiele, die chemische Energie ganz als den Effect elektrischer Kräfte ansehen kann, welche von den Ladungen der Ionen ausgehen.

Da alle einwerthigen Atome dieselben Ladungen besitzen, so wären auch die Verbindungswärmen aller binären Verbindungen gleich, wenn die Durchmesser der entstehenden Moleküle dieselben wären, und es ist vielleicht bezeichnend für die Richtigkeit dieser Anschauung, dass die Differenzen dieser Verbindungswärmen mit den Differenzen der Moleculardurchmesser von gleicher Grössenordnung sind. Die Fähigkeit, möglichst nahe aneinander zu gelangen, d. h. eine möglichst grosse Arbeit zu entwickeln, wird man im Allgemeinen den kleinsten Atomen im höchsten Maasse zuschreiben müssen, und damit mag es wohl in Einklang stehen, dass die Reactionsfähigkeit der Stoffe in so entschiedener Weise mit dem Atomgewichte abnimmt.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Vorstellung, als stammen die Verbindungswärmen vom Falle der Atome gegeneinander, sei also mechanischen Ursprungs, nicht haltbar ist, wenigstens nicht wenn das Gravitationsgesetz bis zu molecularen Distanzen als angenähert giltig vorausgesetzt wird. Die Gravitationsenergie bei der Verbrennung von 1 *g* H_2 würde nur $\frac{1}{2} . 10^{-23}$ Cal. liefern, also eine absolut verschwindende Grösse.

---

[1] l. c.

Über die innere Reibung in Ölen und deren Änderung mit der Temperatur

von

J. G. Garvanoff.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

In Folgendem sind die Resultate einer Reihe von Versuchen mitgetheilt, die sich auf die innere Reibung in fetten und ätherischen Ölen beziehen. Die Methode, welche zur Anwendung kam, war die von Poiseuille, bei welcher die Ausflusszeit aus Capillaren gemessen wird.

Um bei höheren Temperaturen beobachten zu können, musste die Capillare in ein Wasserbad eingebaut werden. Da dieselbe in verticaler Stellung verwendet wurde, so wurde sie am unteren Ende vertical nach aufwärts gebogen und endigte sowohl am unteren, als oberen Ende in eine Glaskugel. Während des Versuches wurde die Flüssigkeit aus der oberen in die untere Kugel strömen gelassen und nach Beendigung des Versuches wieder in die obere zurückgesaugt. Selbstverständlich wurde auf die Reinigung der Capillare vor jedem Versuche besondere Sorgfalt verwendet. Auch war durch zwei Thermometer dafür gesorgt, dass in jedem Momente die Temperatur, sowohl des Bades, als der zu untersuchenden Flüssigkeit selbst abgelesen werden konnte. Zur Ermittlung der absoluten Werthe des Reibungscoëfficienten wurde eine besondere geradlinige Capillare verwendet. Es wurde zunächst mit deren Hilfe der absolute Werth des Reibungscoëfficienten des Wassers bei einer bestimmten Temperatur, nämlich 20·7° C., ermittelt und gefunden, $\eta = 0 \cdot 01045$. Dieser Werth stimmt sehr gut mit dem

von O. E. Meyer[1] gefundenen, aus dessen Zahlen sich durch Interpolation für dieselbe Temperatur der Werth $\eta = 0 \cdot 01041$ ergibt. Durch Beobachtung der Ausflusszeiten der Öle durch dieselbe Capillare konnten die absoluten Werthe der Reibungscoëfficienten der Öle durch Reduction auf den Wasserwerth ermittelt werden. (Im Folgenden wird der Reibungscoëfficient des Wassers bei 0° gleich 100 gesetzt). Um die Reibungscoëfficienten bei der höheren Temperatur zu bestimmen, musste Ausflusszeit und Dichte für diese letztere ermittelt werden; die Druckhöhe dagegen blieb bei allen Versuchen constant. Bezeichnet z die Ausflusszeit in Secunden und δ die Dichte der Flüssigkeit, so gelten für zwei Temperaturen t_1 und t_2 die Formeln $\eta_1 = a . z_1 \delta_1$ und $\eta_2 = a z_2 \delta_2$; hier bedeutet a eine Constante der im Wasserbad verwendeten Capillare, die durch einmaligen Vergleich mit der geraden Capillare bei einer bestimmten Temperatur ermittelt wurde und so die Reduction aller Werthe auf absolutes Mass gestattet.

Die Beobachtungen erstreckten sich über ein Temperaturintervall von 20—80°; wird der Reibungscoëfficient des Wassers bei 0° gleich 100 gesetzt, so ergibt sich derselbe bei 20° im Mittel aus den verlässlichsten bisherigen Angaben zu 56·15 und auf diesen Werth sind auch die Resultate der folgenden Tabellen reducirt. In diesen bedeutet T die Temperatur der untersuchten Flüssigkeit und zwar ist jedesmal unter A und E die Temperatur am Anfang und Ende eines jeden Versuches angegeben. (Bei jeder Temperatur wurden drei Versuche ausgeführt). Unter Z findet sich die Ausflusszeit in Secunden; unter δ die jeweilig ermittelte Dichte angegeben. T' bedeutet das Mittel für eine jede Temperaturgruppe und η den zugehörigen, auf Wasser reducirten Reibungscoëfficienten. (Der letztere für 0° gleich 100 gesetzt). Es folgen nun die Beobachtungen, und zwar an fünf ätherischen und drei fetten Ölen.

---

[1] O. E. Meyer, Wied. Ann., Bd. 32 (1887).

Tabelle I.

Citronenöl.

$T°$ C. A.	$T°$ C. E.	Z	δ	T'	η
20·8	20·6	110			
20·5	20·5	110	0·8559	20°6 C.	66·77
20·5	20·5	110			
30·8	30·5	96·5			
30·5	30·3	97·5	0·8498	30·6	58·45
30·1	30·1	97·5			
40·2	40·5	85·5			
40·8	40·5	86	0·8422	40·2	51·72
40	39	88·5			
51	51	77			
50·2	50	78	0·835	50·3	46·19
50	49·9	79			
61	61	69·5			
60·5	60·2	71	0·8272	60·4	41·47
60	59·6	71·7			
71	71·2	63·5			
70·5	70·1	65	0 818	70·4	37·7
70	69·4	66·2			
80	79·8	61			
80·1	80·1	60	0·8101	80	34·64
80·1	80·1	60			

Tabelle II.

Bergamottenöl.

$T°$ A.	$T°$ E.	Z	δ	T'	η
20°5	21	151			
20	20	156	0·8718	20°3 C.	94·21
20·1	20·1	155			
31·1	31·1	125·5			
30·5	30·2	128·5	0·864	30·5	77·36
30	30	129			
40·6	40 8	107·5			
40·5	40·4	108·5	0·8558	40·4	65·22
40	40	110			
50·8	51	94			
50·4	50·4	95·5	0·848	50·4	56·53
50	49·8	95			
60·2	60·1	84·5			
60	59·8	84·5	0·8398	60·2	49·3
60·4	61	82			
71	71	75			
70·1	69·8	76	0·831	70	44·37
69·5	68·8	77·5			
80·6	80·6	86			
80·2	79·2	69	0·8258	79·6	40·56
79	78	73			

Tabelle III.

Terpentinöl.

$T°$ A.	$T°$ E.	Z	δ	T'	η
21° C.	20·8	126·5			
20·5	20·5	128	0·862	20°5 C.	77·11
20	20	130			
30·8	30·5	110			
30·4	30·2	110·5	0·8538	30·3	65·59
30·1	30	110			
40·8	40·4	97·5			
40·2	40	97·5	0·8462	40·2	57·79
40	39·8	98·5			
51°	51°	86·5			
50·5	50·1	88	0·8376	50·4	51·24
50	49·8	88·5			
60	60·2	78·5			
60	60	79·5	0·83	59·9	45·96
60	59·2	80			
71	70	72·5			
70·2	70	72·7	0·8214	70	41·7
70	69·1	73			
80·1	80	66·5			
79·8	79	66	0·8132	79·9	38·04
80·2	80·2	66·5			

Tabelle IV.

Nelkenöl.

$T°$ A.	$T°$ E.	Z	δ	T'	η
20	20	684			
20	20·1	671	1·53	20°	705·1
20	20·1	667			
31°	30·5	430			
30·5	30·3	434	1·45	30·4	430·3
30·2	30	438			
40·4	40·1	303			
40	39·6	310	1·363	39·9	285·5
39 5	39·8	306			
51	50	230			
51	51	221	1·25	50·5	194
50·5	50	230			
60·5	61	172			
61	60·1	177	1·19	60·2	144·8
60	59	185			
71·5	71	139			
70·5	69·5	144	1·106	69·9	108·9
69·1	68	148			
80	80·2	115			
80·2	79	119	1·04	79·8	83·2

Tabelle V.

Kümmelöl.

$T°$ A.	$T°$ E.	Z	δ	T'	η
21	21	120			
20·5	20·2	122	0·8972	20·3	75·12
20·1	20	124			
31°	31°	103			
30·4	30	105	0·891	30·2	63·96
29·9	29·8	106			
41°7	41°	91			
40·8	40·3	91·5	0·8834	40·5	55·42
40·1	40	91·5			
50·6	50·6	82			
50·5	50·1	82	0·876	50·3	49·36
50	49·8	82·5			
61	61	73·5			
60·2	60	73·5	0·8683	60·2	44·1
60	59·4	75			
70·5	70·5	68			
70	69·9	68	0·8618	69·9	40·52
69·6	69	69 5			
81·5	81·5	62			
80 5	79·5	63·5	0·8555	79·9	37·05
79·5	78·5	64			

Tabelle VI.

Olivenöl.

$T°$ A.	$T°$ E.	Z	δ	T'	η
20·5	20·6	771·5			
20·8	21·1	760·5	0·9139	20·3	4339
21·1	21·1	758·7			
31·4	31·2	495			
31·2	30·9	502	0·9057	31	2819
30·8	30·5	509·3			
41·1	41	340			
40·9	40·3	349·5	0·893	40·5	1931
40·2	39·8	357·5			
50	49·2	255			
50	50	244·5	0·889	50	1347
51·1	50	244·5			
60	60	185·5			
60	61·1	179·5	0·8859	60·3	1010
61	60	187			
69·5	70	143 5			
70	70	138·5	0·8828	70·1	766
71	70	138			
80	80·1	111			
80	79	116	0·8797	79·5	623·2
79	78·9	116			

Tabelle VII.

Mandelöl.

$T°$		Z	δ	T'	η
A.	E.				
21	20·4	665			
20	20	673	0·9989	20 alt	3539·3
20	20·1	671·5			
30·8	30 4	437·5			
30·4	30·1	443	0·9129	30·2	2315
30	30	449			
41	41	300			
40·5	40	308·5	0·906	40·4	1592·3
40	39·9	313			
51	51·5	215			
51	50	225	0·8977	50·5	1142
50	49·8	230·5			
61	60 5	170			
60·6	60·5	169·5	0·893	60·4	865·2
60	60	168·5			
71	69	136 5			
71	70·8	130	0·888	70·3	680·9
70·5	69 8	135			
80	80	105·5			
79·7	79·5	108·5	0·883	79·2	547·2
78	78	111			

Tabelle VIII.

Vaselinöl.

$T°$ A.	$T°$ E.	Z	δ	T'	η
20·6	20·6	981 5			
20·9	20·9	971	0·874	20·9	4685
21·2	21·2	960			
30·2	29·7	586·5			
30	29 9	576·5	0 870	30	2753
30	30	575			
40·2	40	345			
39·8	39·8	353	0 866	40	1663
39·8	39	363			
49·7	49·8	220			
49·7	49·3	227	0·8595	49·5	1074
49·6	49·6	222			
60·5	60	159·5			
59·5	59	163	0·853	60·4	753·4
60·3	60·3	159			
71	70 1	112			
70	69	118	0·8478	70·1	527·2
70·1	70·7	108			
80	80	81			
80	80	85	0·8402	79·9	389·6
79·9	79·4	87			

Tabelle IX.

T	Citronenöl		Bergamottenöl		Terpentinöl		Nelkenöl		Kümmelöl	
	η relativ	η absolut	η_r	η_a	η_r	η_a	η_r	η_a	η_r	η_a
20°	67·27	0·01264	94·69	0·01781	77·70	0·01461	705·1	0·13261	75·45	0·01429
30	58·94	0 01108	78·16	0·01470	66·18	0·01245	440·86	0·08292	64·18	0·01207
40	51·86	0·00975	65·71	0·01235	57·95	0·01088	284	0·05341	55·84	0·01050
50	46·35	0·00871	56·88	0·01067	51·5	0·00968	198·3	0·03729	49·55	0·00932
60	41·65	0·00783	49·45	0·00930	45·9	0·00863	145·8	0·02742	44·21	0·00831
70	37·85	0·00711	44 37	0·00834	41·7	0·00784	108·5	0·02040	40·48	0·00761
80	34·64	0·00651	40·32	0·00758	38·08	0·00716	82·6	0·01553	37·01	0·00696

Tabelle X.

T	Olivenöl		Mandelöl		Vaselinöl	
	η relativ	η absolut	η_r	η_a	η_r	η_a
20°	4296	0·80800	3539	0·66561	4844	0·91102
30	2961	0·55684	2339	0·43988	2753	0·51774
40	1977	0·37190	1620	0·30467	1663	0·31275
50	1347	0·25333	1164	0·21894	1038	0·19521
60	1019	0·19179	876	0·16482	765	0·14391
70	768	0·14452	686	0·12909	529	0·0995
80	615	0·11579	535	0·10065	388	0·07301

Die Tabellen I bis V umfassen die Beobachtungen mit ätherischen Ölen, die Tabellen VI bis VIII jene mit fetten Ölen.

Da es bei den einzelnen Beobachtungen nicht möglich war, vorgeschriebene Temperaturen genau einzuhalten, so wurden für die Temperaturen 20°, 30° u. s. w. die Werthe durch lineare Interpolation aus den Nachbarwerthen ermittelt. Dieselben finden sich für die ätherischen Öle in Tabelle IX, für

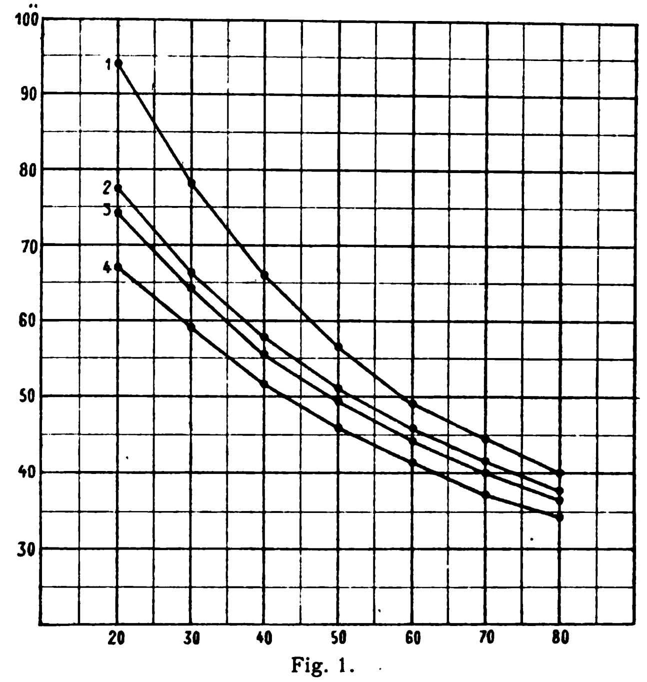


Fig. 1.

die fetten Öle in Tabelle X aufgeführt. In beiden Tabellen sind nebst den auf Wasser bezogenen relativen Reibungscoëfficienten η_r auch die absoluten auf (cgs) bezogenen η_a angeführt.

Die Werthe η_r dieser beiden Tabellen sind in den Fig. 1 und 2 graphisch dargestellt. Abscissen sind dabei die Temperaturen, Ordinaten die η_r. In Fig. 1 bezieht sich die Curve 1 auf Bergamottenöl, 2 auf Terpentinöl, 3 auf Kümmelöl und 4 auf Citronenöl. In Fig. 2 bezieht sich die Curve 5 auf Vaselinöl, 6 auf Olivenöl, 7 auf Mandelöl und 8 auf Nelkenöl. Die Curven zeigen sämmtlich einen vollkommen regelmässigen

Verlauf, der durch eine sehr bedeutende Abnahme des Reibungscoëfficienten mit der Temperatur charakterisirt ist.

In Tabelle XI ist diese Abnahme ersichtlich gemacht durch die percentuelle Änderung $\Delta\eta$ des Reibungscoëfficienten η_{20} bei

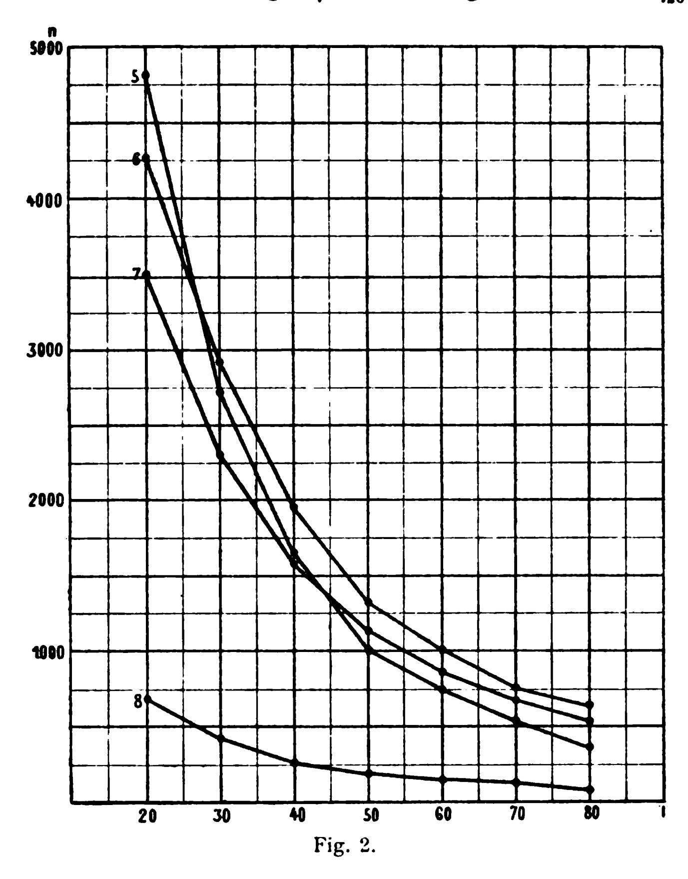


Fig. 2.

20° C. zwischen den Temperaturen 20° und 80°. Es ist demnach in Tabelle XI:

$$\Delta\eta = \frac{100(\eta_{20} - \eta_{80})}{\eta_{20}}.$$

Bei den fetten Ölen ist diese Änderung im Allgemeinen viel stärker als bei den ätherischen und erreicht bis 92% des ursprünglichen Werthes. Es stehen diese Resultate in gutem Einklange mit den wenigen Beobachtungen, welche über diesen

Gegenstand vorliegen; es sind dies Messungen von Koller[1] an einigen Ölen, bei denen jedoch nicht die absoluten Werthe der Reibungscoëfficienten ermittelt, sondern nur eine starke Abnahme derselben mit der Temperatur constatirt wurde.

Tabelle XI.

Substanz	$\Delta\eta$
Citronenöl	48·7
Terpentinöl	50·9
Kümmelöl	50 9
Bergamottenöl ...	57·4
Nelkenöl	88·3
Mandelöl	84·8
Olivenöl.........	85·5
Vaselinöl	91·9

Über die Änderung des Reibungscoëfficienten mit der Temperatur bei Walrathöl liegen Messungen von Perry, Graham und Heath vor,[2] welche eine Abnormität desselben bei der Temperatur 40° ergaben; eine Untersuchung der gleichzeitigen Änderung der Dichte liess bei derselben Temperatur gleichfalls einen Sprung erkennen; von derartigen Unregelmässigkeiten war bei den im Vorstehenden untersuchten Substanzen durchaus nichts zu bemerken.

[1] Diese Ber., Bd. 98 (1889).

[2] Phil. Mag. (5), 35 (1893).

Die Invarianten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung

von

Karl Bobek in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1894.)

Die allgemeine Fläche dritter Ordnung besitzt vier Invarianten. Dieselben bleiben bei den ∞^{15} Collineationen des Raumes erhalten. Haben zwei Flächen F^3 und $F^{3\prime}$ dieselben Invarianten, dann gibt es eine und nur eine bestimmte Collineation, welche die Flächen in einander überführen; denn die allgemeine Fläche dritter Ordnung lässt keine collineare Umformung in sich zu. Im Folgenden ist eine geometrische Deutung der vier Invarianten gegeben.

Ist a eine Gerade der Fläche F^3, so gehen durch dieselbe fünf Tritangentialebenen, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$, welche noch je ein Paar Geraden b_1c_1, b_2c_2. b_3c_3, b_4c_4, b_5c_5 von F^3 enthalten. Die Ebenen durch a schneiden F^3 in Kegelschnitten, welche auf a eine Punktinvolution ausscheiden, deren Deckpunkte D_1, D_2 seien und die Ebenen, welche die in D_1 respective D_2 die a berührenden Kegelschnitte von F^3 enthalten, seien mit $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ bezeichnet. D_1 und D_2 sind die parabolischen Punkte von F^3, die auf a liegen, $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ die Tangentialebenen von F^3 in diesen Punkten.

Bezeichnet man nun mit $(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_4)$ das Doppelverhältniss der vier Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$, so sind die vier Doppelverhältnisse $(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_4)$, $(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_5)$, $(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{D}_1)$, $(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3 \mathfrak{D}_2)$ die vier Invarianten der Fläche dritter Ordnung.

Dass dieselben bei collinearer Umformung von F^3 erhalten bleiben ist klar, dass ihre Gleichheit aber auch genügt, um zwei Flächen durch Collineation in einander zu überführen, soll gezeigt werden.

Vorher möge ein Hilfssatz für die F^3 bewiesen werden.

Sind $E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$ die Schnittpunkte der Geradenpaare von F^3 in den durch a gehenden fünf Ebenen und projicirt man aus E_1 die Punktpaare $E_2 E_3$ und $E_4 E_5$ durch zwei Ebenen, so schneiden diese a in einem Punktepaare M, N, welches durch die Schnittpunkte des Geradenpaares $b_1 c_1$ harmonisch getrennt wird.

Man kann F^3 erzeugen durch ein Flächenbüschel zweiter Ordnung (F^2), an dessen Flächen man von E_1 die Berührungskegel legt. F^3 ist der Ort der Berührungskegelschnitte. Die Ebenen derselben gehen durch die Gerade a, in welcher sich die Polarebenen von E_1 für die F^2 des Büschels schneiden. Die Fläche F^2_0, welche durch E_1 geht, schneidet die Ebene $\mathfrak{E}_1$ in dem Geradenpaare $b_1 c_1$ von F^3. Die Ecken $E_2 E_3 E_4 E_5$ des allen F^2 conjugirten Tetraeders sind die Schnittpunkte der noch übrigen vier Geradenpaare, die in den Ebenen durch a liegen. Da die Geraden $E_2 E_3$ und $E_4 E_5$ conjugirte Polaren für F^2_0 sind, so schneiden die sie aus E_1 projicirenden Ebenen, die $\mathfrak{E}_1$ in einem Strahlenpaare, welches $b_1 c_1$ harmonisch trennt. Hiemit ist der Satz bewiesen.

Man erhält auf diese Art zehn Punkte auf a ausgeschnitten durch die zehn Ebenen, welche durch je drei der fünf Punkte E_i gehen. Durch jeden Punkt E_i gehen sechs der Ebenen, welche a in drei Paaren einer Involution schneiden, deren Deckpunkte aus E_i durch das Geradenpaar $b_i c_i$ projicirt werden. Die fünf so erhaltenen Involutionen haben alle das Paar D_1, D_2 gemeinschaftlich. Denn D_1, D_2 sind die Deckpunkte der Involution, welche die Kegelschnitte von F^3 auf a ausscheiden, zu denen auch die fünf Geradenpaare gehören.

Die Pole von a für die Kegelschnitte von F^3 liegen auf einer Curve dritter Ordnung c^3, welche durch die fünf Punkte E_i und durch D_1, D_2 geht, in letzteren Punkten die F^3, also auch $\mathfrak{D}_1$ respective $\mathfrak{D}_2$ berührt. Beachtet man, dass die c^3 aus E_1 etwa durch einen Kegel $\mathfrak{K}^2$ projicirt wird, welcher dem Kegelbüschel durch die vier Geraden $E_1 E_2$, $E_1 E_3$, $E_1 E_4$, $E_1 E_5$ angehört, so erkennt man, dass $\mathfrak{K}^2$ die Gerade a in einem Paare derjenigen Involution schneiden muss, welche durch die drei Ebenenpaare des obigen Kegelbüschels bestimmt ist. Hieraus ergibt sich wieder, dass D_1, D_2 ein Paar aller fünf Involutionen ist.

Es möge bemerkt werden, dass die Doppelverhältnisse $(E_1E_2E_3E_4)$, $(E_1E_2E_3E_5)$, $(E_1E_2E_3D_1)$, $(E_1E_2E_2D_2)$ auf der Raumcurve c^3 gleich sind den oben hingeschriebenen Doppelverhältnissen der entsprechenden Ebenen.

Es seien nun F^3 und $F^{3\prime}$ zwei Flächen dritter Ordnung, welche gleiche Invarianten für die Gerade a und a' besitzen.

Es existirt eine ganz bestimmte Raumcollineation, welche die Raumcurve c^3 in die entsprechende $c^{3\prime}$ für $F^{3\prime}$ in der Weise überführt, dass den Punkten E_1, E_2, E_3 die Punkte E_1', E_2', E_3', entsprechen. Zu Folge der Beziehungen

$$(E_1E_2E_3E_4) = (E_1'E_2'E_3'E_4') \quad (E_1E_2E_3E_5) = (E_1'E_2'E_3'E_5'),$$
$$(E_1E_2E_3D_1) = (E_1'E_2'E_3'D_1') \quad (E_1E_2E_3D_2) = (E_1'E_2'E_3'D_2')$$

werden durch dieselbe Raumcollineation die Punkte E_4, E_5, D_1, D_2 von c^3 in die Punkte $E_4'E_5'D_1'D_2'$ von $c^{3\prime}$ übergehen, so dass der Geraden $a = D_1D_2$ die Gerade $a' = D_1'D_2'$ entsprechen wird. Daher sind den fünf Ebenen $\mathfrak{E}_i$ durch a die fünf Ebenen $\mathfrak{E}_i'$ durch a' zugeordnet. Da ferner dem Ebenenpaare durch $E_1E_2E_3$ und $E_1E_4E_5$, welches a in MN trifft das Ebenenpaar durch $E_1'E_2'E_3'$ und $E_1'E_4'E_5'$ entspricht, welches a' in M', N' schneiden möge, so sind M, M' und N, N' homologe Punkte der collinearen Räume.

Zu Folge des Hilfssatzes trennt das Geradenpaar b_1c_1 die beiden Strahlenpaare E_1D_1, E_1D_2 und E_1M, E_1N harmonisch, und dasselbe thut auch $b_1'c_1'$ bezüglich der Strahlenpaare $E_1'D_1'$, $E_1'D_2'$ und $E_1'M'$, $E_1'N'$, daher muss durch die Raumcollineation das Geradenpaar (b_1c_1) von F^3 in das Geradenpaar $b_1'c_1'$ von $F^{3\prime}$ übergehen. Da dasselbe von jedem der fünf Geradenpaare in den Ebenen $\mathfrak{E}_i$ und $\mathfrak{E}_i'$ gilt, so ist klar, dass die oben angegebene Raumcollineation F^3 in $F^{3\prime}$ überführt.

Die Gleichheit der eingangs hingeschriebenen vier Doppelverhältnisse für zwei Flächen dritter Ordnung ist also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Flächen durch eine Raumcollineation in einander überführbar sind.

Sind die vier Invarianten einer Fläche dritter Ordnung gegeben, so kann man noch 15 Constanten zur Bestimmung

der Fläche willkürlich annehmen. Zur Construction der nothwendigen Elemente der Fläche kann man folgendermassen verfahren. Man nehme eine Gerade a willkürlich an (vier Bedingungen für die durchgehende F^3) durch diese drei beliebige Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ (drei Constanten), dann sind zu Folge der vier gegebenen Invarianten auch $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$ und $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ bestimmt. In $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ wähle man je einen Punkt E_1, E_2 (vier Constanten) und in $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ je eine gerade t_1 respective t_2 (vier Constanten) beliebig aus, wodurch der Schnittpunkt der Geradenpaare $b_1 c_1$ respective $b_2 c_2$ und die parabolischen Punkte D_1 respective D_2 als Schnittpunkte der t_1 respective t_2 mit a gegeben sind. Durch diese Annahme ist F^3 eindeutig bestimmt. Denn durch E_1, E_2, D_1, D_2 geht eine Raumcurve dritter Ordnung c^3, welche t_1 und t_2 berührt. Sie möge $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$ in E_3, E_4, E_5 schneiden.

Es ist nun ein Kegel $\mathfrak{K}_2^2$ bestimmt, welcher E_2 zur Spitze hat, für den E_2E_3, E_2E_4, E_2E_5 ein Tripel conjugirter Strahlen ist, und dessen Polarebene von E_1 die Ebene $\mathfrak{E}_2$ ist. Desgleichen ist ein Kegel $\mathfrak{K}_3^2$ bestimmt, für den E_3E_2, E_3E_4, E_3E_5 ein Tripel conjugirter Strahlen und $\mathfrak{E}_3$ die Polarebene von E_1 ist. $\mathfrak{K}_2^2$ und $\mathfrak{K}_3^2$ bestimmen einen Flächenbüschel zweiter Ordnung für den E_2, E_3, E_4, E_5 das gemeinschaftliche Poltetraeder aller Flächen, und a die Schnittgerade der Polarebenen von E_1 für die Flächen des Büschels ist. Es erzeugt daher E_1 mit dem Flächenbüschel in der oben auseinandergesetzten Weise eine F^3, welche den gestellten Bedingungen genügt. F^3 ist, wie man sieht, die einzige Fläche dritter Ordnung, da die fünf Geradenpaare in den $\mathfrak{E}_i$ durch die fünf Punkte E_i zu Folge des Hilfssatzes bestimmt sind.

Auf Flächen mit conischen oder biplanaren Doppelpunkten, welche speciellen Werthen der Invarianten oder Gleichheiten zwischen denselben entsprechen, möge hier nicht weiter eingegangen werden.

Über die circulare Magnetisirung von Eisendrähten

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1894.)

In einem vom Strom durchflossenen Eisendrahte üben die einzelnen, der Drahtaxe parallelen Fäden, in welche man sich den Strom zerlegt denken kann, eine Richtkraft auf die Molecularmagnete aus, welche dieselben rings um die Axe des Drahtes kreisförmig anzuordnen strebt; sie sucht die Molecularmagnete transversal gegen die Stromfäden zu stellen. Ein solcher Draht befindet sich also in einem magnetischen Zustande, welchen man als circular oder transversal bezeichnet.[1] Das Entstehen und Verschwinden dieses Zustandes äussert sich in der gleichen Weise wie die gegenseitige Induction der Stromfäden; es werden also die beiden Extraströme in geraden Leitern aus magnetisirbaren Metallen viel stärker auftreten als in nicht magnetisirbaren Drähten. Ein Theil dieses magnetischen Zustandes kann auch remanent bleiben. Dieser Theil ist es, welcher die von Villari[2] entdeckten und als »mechanische oder Erschütterungsströme transversal magnetisirter Eisenstäbe« bezeichneten Erscheinungen liefert. Villari selbst und

[1] Nachfolgend soll für diese Art der Magnetisirung durchwegs die von Herwig eingeführte Bezeichnung »circular« gebraucht werden. Der Ausdruck »transversal magnetisirt« ist nicht eindeutig.

[2] Villari, Pogg. Ann., Bd. 126, S. 85, 1865 und Bd. 137, S. 569, 1869.

nach ihm H. Streintz [1] studirten die Erschütterungsströme an dicken Eisen- und Stahlstäben und untersuchten dieselben hauptsächlich in ihrer Abhängigkeit von der Intensität des Primärstromes, von der Stärke der Erschütterung und von der Zahl der vorausgegangenen Stösse. Während diese Untersuchungen nur den remanenten Theil betrafen, hat Herwig [2] mittelst der Wheatstone'schen Brückenanordnung direct das Auftreten starker Schliessungs- und Öffnungsextraströme constatirt, wenn ein Zweig der Brücke aus einem dicken Eisen- oder Stahlstabe gebildet war. Später hat Lorenz [3] mit Brücke und Telephon den Selbstinductionscoëfficienten zweier 31 *m* langer Eisendrähte gemessen und die Susceptibilität der Eisensorte zu ungefähr 10 bestimmt. Im Allgemeinen waren alle diese Versuche mehr qualitativer Natur und auch gar nicht so eingerichtet, um genauere Messungen über das Verhalten der Eisendrähte bei circularer Magnetisirung zu gestatten. Es sind vor Allem zwei Fragen, welche in dieser Hinsicht gestellt werden können. Die erste Frage ist dieselbe, welche auch bezüglich der axialen Magnetisirung immer gestellt wird, sie bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen Permeabilität und der Stärke der magnetisirenden Kraft. Die zweite Frage betrifft das Verhältniss der Permeabilität bei axialer und circularer Magnetisirung für ein und dasselbe Individuum. Bezüglich der ersten Frage kann man wohl vermuthen, dass sich der Verlauf der Magnetisirung auch in circularer Richtung ungefähr so abspielen dürfte wie in der axialen; allein hinsichtlich des zweiten Punktes hat man kaum Erfahrungsthatsachen oder theoretische Erwägungen, auf welche gestützt, man das Resultat des Versuches auch nur qualitativ angeben könnte.

Ein Umstand allerdings vereitelt die völlig exacte Beantwortung der beiden oben aufgeworfenen Fragen, und das ist die Thatsache, dass wir in einem vom Strom durchflossenen Drahte rings um die Axe magnetisirende Kräfte haben, welche in der Axe selbst gleich Null sind und gegen die Peripherie zu

---

[1] H. Streintz, diese Sitzungsber., Bd. 76, S. 946, 1877.
[2] Pogg. Ann., Bd. 153, S. 115, 1874.
[3] Wied. Ann., Bd. VII, 1879.

stetig wachsen. Wir können daher nur von einem Mittelwerth der magnetisirenden Kräfte sprechen. Nun wächst insbesondere bei weichen Eisendrähten die Susceptibilität zum Theile viel rascher wie die magnetisirende Kraft; der beobachtete Werth der Susceptibilität entspricht daher, mit Ausnahme der magnetisch sehr harten Drähte, nicht ganz dem Mittelwerthe der magnetisirenden Kraft. Doch ist es immerhin möglich, aus dem Verlaufe der Magnetisirungscurven selbst beim weichen Eisen Schlüsse über den Unterschied in der axialen und circularen Richtung zu ziehen.

Mit der Frage bezüglich der Magnetisirbarkeit des Eisens nach verschiedenen Richtungen hat sich Herwig[1] ebenfalls schon beschäftigt. Er untersuchte Eisenröhren (Gasleitungsröhren aus weichem Walzeisen gezogen) sowohl in axialer, als auch circularer Richtung. Die Magnetisirung in axialer Richtung erfolgte durch einen in der Axe der Röhre gelegten vom Strom durchflossenen Draht, die Stärke der Magnetisirung wurde durch den in der Richtung der Axe inducirten Strom gemessen. Die Resultate dieser Versuche werden weiter unten besprochen.

Mit Rücksicht auf die genaue Berechnung der Werthe der Susceptibilität und der magnetisirenden Kräfte bietet die Röhrenform grosse Vortheile; die Verhältnisse liegen da nahezu wie bei einem gleichmässig bewickelten Ringe, und die Röhre stellt uns eigentlich einen Ring mit rechteckigem Querschnitt vor. Vom praktischen Standpunkte aber empfiehlt es sich, solche Untersuchungen an Drähten zu machen, und an solchen wurden die hier beschriebenen Messungen auch gemacht. Nach Erwägung mehrerer Umstände wurden folgende Drähte für die Untersuchung gewählt.

1. Ein gut ausgeglühter, weicher Eisendraht, 0·21 *cm* dick. Der Draht wurde in einer Eisenhandlung, schon ausgeglüht gekauft und wird nachfolgend als »Eisen weich« bezeichnet.

2. Ein 0·20 *cm* dicker Frischeisendraht, bezogen von der Drahtzieherei der Alpinen Montangesellschaft in Graz. Das

---

[1] Pogg. Ann., Bd. 156, S. 430, 1875.

Frischeisen ist das reinste Eisen,[1] welches fabriksmässig hergestellt wird. Dieser Draht wurde durch Zug gehärtet, und zwar wurde er ohne Ausglühen durch zwei Zuglöcher von 0·25 auf 0·20 *cm* gezogen. Diese Sorte wird unter »Eisen hart« angeführt.

3. Ein Bessemerstahldraht Nr. 4, 0·20 *cm* dick, ohne Ausglühen gezogen in drei Zügen von 0·28 *cm*, geliefert ebenfalls von der genannten Drahtzieherei. Dieser Draht wird kurzweg »Bessemerstahl« genannt.

Für die Wahl der Dicke war zum Theile der Umstand massgebend, dass zu dünne Drähte beim Durchgange der constanten Ströme zu stark erwärmt worden wären, anderseits war die Anwendung dickerer Drähte für die Untersuchung der axialen Magnetisirung wegen des Axenverhältnisses nicht günstig.

Die Versuchsanordnung.

Für die Beobachtung der circularen Magnetisirung, respective der Extraströme stehen zwei Methoden zur Verfügung, die mit dem Differentialgalvanometer und die mit der Wheatstone'schen Brücke. Die erste, bei welcher die Galvanometerrollen mit ihren verhältnissmässig hohen Selbstinductionscoëfficienten direct in den primären Stromkreis eingeschaltet werden, eignet sich weniger gut zu solchen Beobachtungen wie die zweite, welche ich gewählt habe. Die Brückenverzweigung war, wie folgt, hergestellt. Der zu untersuchende Eisendraht, ungefähr 1 *m* lang und in der Mitte stimmgabelförmig gebogen, bildete den einen Zweig *AC* (Fig. 1). Für die übrigen Zweige habe ich einen Messingdraht von entsprechender Dicke gewählt, dessen Widerstand pro Längeneinheit nahe mit jenem des Eisendrahtes übereinstimmte. Der Zweig *BC*, gleich lang wie *AC*, war also aus Messingdraht und so gebogen wie der Eisendraht. *AC* und *BC* waren an die beiden Seiten eines Brettes ganz symmetrisch befestigt und standen vertical in einem hohen, mit Wasser gefüllten Glasgefässe. An die beiden

---

[1] Auch die erste Drahtsorte war ein ziemlich reines Eisen, was ein Vergleich mit einem gut ausgeglühten Draht aus Frischeisen zeigte.

Punkte A und B wurde ein etwas über 2 *m* langer Draht (von derselben Dicke wie in BC) angelöthet und in der aus der Figur ersichtlichen Weise am Beobachtungstische horizontal festgelegt. Zwischen A und B kam das Galvanometer, mit langsam schwingender Magnetnadel (8 Sec.); ein ziemlich empfindliches Instrument von Hartmann und Braun, dessen Rollen parallel geschaltet waren.

Der Batteriezweig, enthaltend das Element E und einen Widerstandskasten W, war mit einem Ende an C angeschlossen; das andere wurde in bekannter Weise am Messingdrahte hin- und hergeschoben und der Punkt D aufgesucht, bei welchem das Galvanometer keinen Strom anzeigte; an diesem Punkte wurde es sodann angelöthet. Da die Compensation nur bei einer bestimmten Temperatur vorhanden war, so musste für alle Fälle noch ein grösserer Nebenschlusswiderstand w zwischen A und D, respective B und D angebracht werden, um die Nadel in allen Fällen auf o zu bringen. Zur Messung der Stromstärke im Batteriezweige diente ein Galvanometer, dessen Enden an den kleinen Widerstand ρ (0·05 Ohm) gelegt waren. Die Angaben dieses Galvanometers wurden empirisch geaicht. Die Zweige AC und BC befanden sich wie gesagt in Wasser und waren dadurch vor raschen Temperaturschwankungen geschützt. Für den Theil ADB war eine grössere Vorsicht nicht nothwendig, denn eine kleine gleichmässige Erwärmung des ganzen Theiles hatte durchaus keine Störung zur Folge; nur einseitige Temperaturänderungen, wie sie etwa durch Bestrahlung oder Luftströmungen bedingt sind, mussten vermieden werden. Um solche hintanzuhalten, habe ich diesen Theil mit Papier und Tüchern gut zugedeckt.

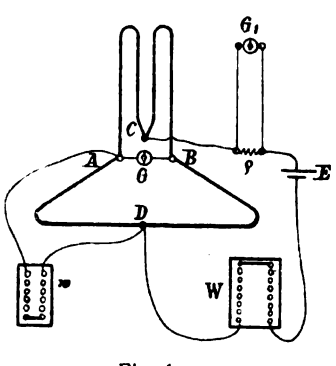


Fig. 1.

In den Batteriezweig war auch ein Commutator eingeschaltet, und es wurde immer so eingestellt, dass sich beim Commutiren keine Stellungsänderung der Nadel zeigte.

Die elektrodynamische Induction der einzelnen Brückenzweige auf sich selbst ist hier sehr klein und hebt sich in der Wirkung auf die Galvanometernadel nahezu auf (ein eventueller kleiner Überschuss in der einen Richtung wurde in Rechnung gezogen); nur der Eisendraht AC liefert infolge der circularen Magnetisirung einen starken Extrastrom, und wir bekommen beim Commutiren, insbesondere bei intensiveren Strömen, sehr kräftige Ausschläge der Galvanometernadel. Die Widerstände in den Brückenzweigen sind gegenüber dem Galvanometerwiderstande ziemlich klein, und mit Rücksicht darauf wäre es besser gewesen, längere Eisendrähte zu nehmen; doch wären dann wieder Schwierigkeiten wegen der Constanthaltung der Temperatur entstanden; aus gleichen Gründen habe ich es vermieden, dem Eisendrahte gegenüber wieder einen Eisendraht als Brückenzweig anzubringen, wodurch der Ausschlag verdoppelt worden wäre.

Zur Bestimmung der axialen Magnetisirung wurde der gerade, ebenfalls ungefähr 1 *m* lange Draht[1] in eine 121·5 *cm* lange Magnetisirungsspule (äusserer Durchmesser 3·5 *cm*) gebracht und nach der ballistischen Methode untersucht. Die Spule hatte zwei Lagen und 11·34 Windungen pro Längeneinheit. Die secundäre Rolle war auf ein Glasrohr gewickelt und hatte 150 Windungen. Sie befand sich in der Mitte der Magnetisirungsspule und ober der Mitte des zu untersuchenden Drahtes. Ein in die Leitung des Primärstromes geschalteter Widerstandskasten gestattete die Anwendung verschiedener Stromstärken. Als Galvanometer diente dasselbe Instrument wie bei der Untersuchung der circularen Magnetisirung, nur waren die Rollen diesmal hinter einander geschaltet.

Wegen des sogenannten Kriechens eignet sich die ballistische Methode weniger gut zur Bestimmung von Magnetisirungscurven weicher Eisendrähte wie die magnetometrische.[2] Für die Beantwortung der ersten Frage wäre das in Betracht

---

[1] Ging die axiale der circularen Magnetisirung voraus, so wurde der wirksame Theil des Drahtes durch das Anlöthen an die Punkte *A* und *C* ein wenig verkürzt.

[2] Ewing, J. A., Magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen, S. 120 der deutschen Ausgabe.

zu ziehen, für die zweite ist es kaum von Belang, weil die Schwingungsdauer der Galvanometernadel dieselbe ist sowohl bei der Beobachtung der axialen, als auch der circularen Magnetisirung und daher der gemachte Fehler in beiden Fällen gleich gross ausfällt.[1]

Die Beobachtungsresultate.

1. Circular.

Das magnetische Verhalten eines Drahtes ist durch die Curve, welche man bei einem vollen Magnetisirungscyclus erhält, vollständig charakterisirt. Die Beobachtungen werden in solchen Fällen bekanntlich so gemacht, dass man die magnetisirende Kraft in kleinen Sprüngen wachsen, respective abnehmen lässt, und zwar im positiven und negativen Sinne. Bei jedem Sprung wird der Zuwachs der Magnetisirungsintensität nach der ballistischen oder magnetometrischen Methode bestimmt. Diese Beobachtungsmethode ist nun allerdings auch bei der circularen Magnetisirung nicht ausgeschlossen; allein sie würde bedeutende Vorkehrungen erfordern, um die Widerstände in den Brückenzweigen während der Dauer eines ganzen Cyclus constant zu erhalten. Bei der hier gewählten Anordnung musste man von der cyclischen Beobachtung absehen, und ich habe daher immer den Ausschlag beim Commutiren beobachtet. Vor jeder Messung musste die Compensation der Zweigwiderstände durch Veränderungen am Nebenschlusswiderstande hergestellt werden. Die Beobachtungen waren ausserordentlich mühsam, da eine kleine Störung in der Temperaturvertheilung der Drähte gleich eine Änderung der Ruhelage der Nadel zur Folge hatte. Auch die Thermoströme bildeten ein Hinderniss, welches sich manchmal recht bemerkbar machte. Bei grösseren

[1] Bezüglich der axialen Magnetisirung des weichen Eisendrahtes in schwachen Feldern habe ich Versuche mit einem Thomson-Carpentier-Galvanometer bei zwei verschiedenen Schwingungsdauern (3 und 12 Sec.) gemacht, und es hat sich herausgestellt, dass die Magnetisirung bei »Eisen weich« in einer Zeit ablaufen muss, welche auch gegen 3 Secunden kurz ist. Die der Magnetisirung entsprechenden Ausschläge wurden mit denen, welche eine bestimmte Condensatorentladung ergab, verglichen.

Stromstärken wurden in den Zweigdrähten schon ziemlich beträchtliche Wärmemengen degagirt, und man musste jedesmal nach Einsetzen des stärkeren Stromes einige Zeit warten, bis sich ein stationärer Zustand einstellte. Die stärksten Ströme, welche bei der circularen Magnetisirung in Anwendung kamen, hatten ungefähr 6·5 Amp. im Batteriezweig. Es schien mir nicht angezeigt, noch kräftigere anzuwenden.

Aus dem beim Commutiren erhaltenen halben Ausschlag des Galvanometers $\frac{\alpha}{2}$ wurde zunächst der Integralwerth der im Eisen inducirten elektromotorischen Kraft nach der Formel

$$\int e dt = A \frac{RT}{\pi} \frac{\alpha}{2} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}} \tag{1}$$

berechnet. Dabei ist

$$A = \frac{(w_3+w_4)(w_1+w_2)+(w_1+w_2+w_3+w_4)\rho}{w_3+w_4}.$$

Der Widerstand des Eisens ist hiebei mit w_1, der des benachbarten im Wasser befindlichen Messingdrahtes mit w_2 bezeichnet. R, T, λ, ρ bedeuten bekanntlich den Reductionsfactor, die Schwingungsdauer, das log. Decrement und den Widerstand des Galvanometers. Der Reductionsfactor wurde mit Hilfe eines Clark'schen Elementes und eines bekannten Widerstandes bestimmt. Das Auftreten oder Verschwinden der circularen Magnetisirung wirkt so wie eine Selbstinduction in dem betreffenden Zweige. Bezeichne ich mit S den Coëfficienten dieser Selbstinduction, so bestimmt sich dessen Werth aus der Gleichung

$$S i_1 = \int e dt, \tag{2}$$

wo

$$i_1 = \frac{w_2+w_3}{w_1+w_2+w_3+w_4} \cdot i.$$

i bedeutet die Stromstärke im Batterie-, i_1 die im Eisendrahtzweige.

Der weitaus grösste Theil des beim Commutiren erhaltenen Ausschlages entspricht der Induction durch die circulare Magnetisirung. Wären alle Batteriezweige gleich lang und

gleich dick, so würden sich die elektrodynamischen Inductionen gegenseitig aufheben. In unserem Falle traf dies nicht ganz zu, und es musste mit Rücksicht auf die nicht ganz gleiche Länge der Brückenzweige und auf die Stromstärkeverhältnisse in denselben an S eine kleine Correctur (insbesondere bei Bessemerstahl und Frischeisen) angebracht werden, deren Berechnung die theoretische Formel für den Selbstinductionscoëfficienten s eines geradlinig gespannten Drahtes

$$s = 2l\left(\log \frac{2l}{rc} - \frac{1}{4}\right)$$

zu Grunde gelegt wurde. l ist dabei die Länge, r der Radius des Drahtes; $c = e^{3/4}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen. Die so corrigirten Werthe von S sind in den Tabellen unter $\bar{S}$ eingetragen. Aus diesem Werthe lässt sich nun die Susceptibilität $\varkappa$ berechnen, und zwar mit Hilfe einer Formel, welche von Kirchhoff[1] entwickelt wurde. Kirchhoff zeigte, dass durch die circulare Magnetisirung der Selbstinductionscoëfficient des Drahtes um $2\pi\varkappa l$ vergrössert wird. Wir setzen also

$$\bar{S} = 2\pi\varkappa l. \qquad 3)$$

Berechnet man auf diese Weise $\varkappa$, so findet man, dass es insbesondere für weiches Eisen mit der Stromstärke (innerhalb der Versuchsgrenzen) bedeutend ansteigt. Bei den Messungen über die Magnetisirung in axialer Richtung gibt man zu jedem Werthe der magnetisirenden Kraft oder Feldstärke den entsprechenden Werth von $\varkappa$ an. Um die circulare mit der axialen Magnetisirung zu vergleichen, müsste man auch hier das gleiche thun; allein hier bietet sich insofern eine Schwierigkeit dar, als die circular wirkende magnetisirende Kraft bei einem vom Strom durchflossenen Drahte nur in gleichen Abständen von der Axe constant ist; sie steigt von der Axe, wo sie den Werth 0 hat bis zur Peripherie, und ist hier ein Maximum, und zwar gleich $\frac{2i}{r}$, wo r den Radius des Drahtes und i die

---

[1] Pogg. Ann., Ergbd. V, S. 1. Später hat auch Lorenz (Wied. Ann., Bd. VII) diese Formel abgeleitet und zur Berechnung von $\varkappa$ benützt.

Stromstärke bedeutet. Bezeichnen wir mit H die magnetisirende Kraft an irgend einer Stelle des Drahtquerschnittes, mit a die Entfernung dieser Stelle von der Axe und mit u die Stromdichtigkeit, so ist

$$H = 2\pi a u. \tag{4}$$

Rechnet man nun aus der Formel 3) die Susceptibilität, so entspricht diese einer magnetisirenden Kraft, welche sicher zwischen 0 und $\frac{2i}{r}$ liegt; allein den genauen Werth von H, welcher zum berechneten $\varkappa$ gehört, kann man kaum angeben. Für hartes Eisen und für Stahl, bei welchen $\varkappa$ nur langsam ansteigt, wird der zum berechneten Werthe von $\varkappa$ gehörige Werth der magnetisirenden Kraft nahezu durch den Mittelwerth von H gegeben sein. Dieser Mittelwerth ergibt sich, wenn man alle H über den ganzen kreisförmigen Drahtquerschnitt summirt und durch den Querschnitt dividirt. In den Curven sind die Werthe von $\varkappa$ überall auf den Mittelwerth von H bezogen.

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:

i die Stromstärke im Batteriezweige } in abs. E.,
i_1 » » » Eisendraht }

α den Galvanometerausschlag beim Commutiren,

β den Galvanometerausschlag beim Öffnen des Primärstromes,

H_{max} und H_{mit} den maximalen und den mittleren Werth der circularen magnetisirenden Kraft. Es ist $H_{mit} = 0{\cdot}666\, H_{max}$.

$\int edt$ den Integralwerth der elektromotorischen Kraft, entsprechend dem Galvanometerausschlag $\frac{\alpha}{2}$,

S und $\bar{S}$ den nicht corrigirten und corrigirten Werth des Selbstinductionscoëfficienten,

$\frac{\alpha}{2} - \beta$ entspricht dem remanenten Theil des circularen Magnetismus,

$\frac{\alpha - 2\beta}{\alpha}$ das Verhältniss des remanenten zum temporären Magnetismus.

Jeder der unter α eingetragenen Werthe ist das Mittel aus vier Beobachtungen; dasselbe gilt von β; in die Tabellen wurde jedoch nur der Mittelwerth eingetragen. Unter jeder Tabelle sind die Widerstände der Brückenzweige und die Galvanometerconstanten angegeben. Den Beobachtungen bei niederen Stromstärken (insbesondere für Bessemerstahl) darf kein grosses Gewicht beigelegt werden, da die Ausschläge sehr klein waren. Ich glaubte jedoch, diese Werthe nicht unberücksichtigt lassen zu müssen, da sie sich den weiteren Messungen ziemlich gut anschliessen.

Tabelle I und II beziehen sich auf »Eisen weich«. Von dieser Sorte wurden zwei Proben untersucht, welche derselben Drahtrolle entstammten. Die erste Probe wurde zuerst circular, dann axial untersucht. Bei der zweiten Probe war die Reihenfolge axial, circular und wieder axial.

Tabelle III und IV geben die Resultate für »Eisen hart«. Es waren ebenfalls zwei Proben und die Reihenfolge hinsichtlich der axialen und circularen Magnetisirung dieselbe wie oben.

Tabelle V gilt für den Bessemerstahldraht. Nur eine Probe. Die circulare Magnetisirung ging der axialen voraus.

Zu den Beobachtungen ist noch Folgendes zu bemerken. Die Messungen wurden mit der niedersten Stromstärke angefangen und bis zur höchsten fortgesetzt; bei dieser wurde der Draht hierauf mehrmals (hundertmal und darüber) ummagnetisirt, dann durch Stromschwächung und Wechsel entmagnetisirt und schliesslich die zweite und dritte Beobachtungsreihe gemacht. Die Mittelwerthe $\frac{\alpha}{2}$ sind in allen diesen Fällen den zwei letzten Reihen entnommen. Nur bei den Messungen in Tabelle I wurde die Probe gleich zu Beginn bei der höchsten Stromstärke mehrmals ummagnetisirt.

Tabelle I.

Eisen, weich — 1. Probe, Länge = 103·5 *cm.*

i	i_1	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	H_{max}	H_{mit}	$\int eat$	S	$\bar{S}$	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
		3·6										
		4·1										
0·022	0·012	3·5	1·9	1·7	0·23	0·15	116	9560	9300	14·3	0·2	0·11
		7·9										
		8·0										
0·041	0·023	8·5	4·1	3·4	0·43	0·29	250	11100	10840	16·7	0·7	0·17
		19·1										
		21·6										
0·084	0·046	19 6	10·1	8·2	0·87	0·58	615	13400	13140	20·2	1·9	0·19
		50·4										
		54·5										
0·155	0·085	53·1	26·4	17·5	1·62	1·08	1608	18920	18660	28 7	8·9	0·34

0·230	0·126	120·0 126·5 135 0	63·6	30·4	2·40	1·60	3873	30710	30450	46·8	33·2	0·52
0·265	0·145	191·0 191·5 190·0	95·4	38·6	2·77	1·85	5810	40000	39740	61·2	56·8	0·59
0·436	0·239	517·4 533·2 535·8	264·5	69 2	4·56	3·04	16110	67300	67040	103·5	195·3	0·70
0·659	0·362	890 866 862	436·5	98·5	6·90	4 60	26580	73370	73110	112·9	338·0	0·77

$w_1 = 0·0387$; $w_2 = 0·0464$; $w_3 = 0·0533$; $w_4 = 0·0455 \times 10^9$
$R = 0·409 \times 10^7$; $\rho = 0·187 \times 10^9$; $\tau = 8·21$ Sec.; $\lambda = 0·277$.

Tabelle II.

Eisen, weich — 2. Probe, Länge = 104 *cm*.

i	i_1	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	H_{max}	H_{mit}	$\int eat$	S	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
		5·1									
		5 3									
0·024	0·012	5·3	2·7	2·5	0·23	0·16	134	10890	16·3	0·2	0·08
		9·4									
		11·5									
0·041	0·021	10·8	5·6	4·3	0·40	0·27	283	13480	20·2	1·3	0·24
		24·3									
		26·4									
0·084	0·043	25·3	12·9	10·2	0·81	0·54	655	15340	23·0	2·7	0·21
		54·8									
		66·3									
0·155	0·079	66·0	33·1	21·3	1·50	1·00	1678	21290	31·9	11·8	0·36

		126·8									
		146·0									
0·229	0 116	145·5	72·9	37·0	2·22	1·48	3696	31760	47·5	35·9	0·49
		180·5									
		202·5									
0·264	0·134	198 2	100·1	44·0	2·56	1·71	5072	37770	56·5	56·1	0·56
		598·0									
		607·5									
0·428	0·218	630 3	309·4	86·3	4·15	2·76	15690	72090	107·9	223·1	0·72
		1029									
		1006									
0·633	0·322	1004	502·5	123·9	6·14	4·09	25480	79060	118·3	378·6	0·75

$w_1 = 0{\cdot}0388$; $w_2 = 0{\cdot}0402$; $w_3 = 0{\cdot}0653$; $w_4 = 0{\cdot}0640 \times 10^9$

$R = 0{\cdot}409 \times 10^{-7}$; $\rho = 187 \times 10^9$; $\tau = 8{\cdot}21$ Sec.; $\lambda = 0{\cdot}277$.

Tabelle III.

Eisen, hart — 1. Probe — Länge = 104 *cm*.

i	i_1	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	H_{max}	H_{mit}	$\int cat$	S	$\bar{S}$	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
		2·2										
		2·6										
0·022	0·012	2·5	1·2	0·9	0·24	0·16	73	6140	5860	9·0	0·3	0·25
		4·1										
		5 4										
0·040	0·022	5·6	2·5	1·6	0·44	0·29	152	6920	6641	10·2	0·9	0·36
		10·8										
		15·0										
0·081	0·045	11·5	6·2	4·1	0·90	0·60	375	8340	8060	12·3	2·1	0·34
		25·4										
		31·8										
0·151	0·084	27·7	14·1	8·9	1·67	1·11	852	10200	9920	15·2	5·2	0·37

		52·0										
		57·0										
0·225	0·124	55·2	27·4	15·9	2·48	1·65	1655	13340	13060	20·0	11·5	0·42
		62·0										
		73·5										
ρ·260	0·143	72·2	34·6	19·3	2·86	1·91	2090	14620	14340	22·0	15·3	0·44
		237·0										
		260·0										
0·427	0·236	251·0	124·7	49·2	4·72	3·15	7530	31910	31630	48·4	75·5	0·61
		585·6										
		582·9										
0·641	0·354	545·3	285·5	76·2	7·08	4·72	17240	48710	48430	74·2	209·0	0·73

$w_1 = 0·0385$; $w_2 = 0·0476$; $w_3 = 0·0525$; $w_4 = 0·0425 \times 10^9$

$R = 0·423 \times 10^{-7}$; $\rho = 0·187 \times 10^9$; $\tau = 7·87$ Sec.; $\lambda = 0·267$.

Tabelle IV.

Eisen, hart. — 2. Probe. Länge = 106 *cm*.

i	i_1	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	H_{max}	H_{mit}	$\int e a t$	S	$\bar{S}$	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
		2·4										
		2·8										
0·024	0·013	2·7	1 4	1·0	0·26	0·17	70	5470	5330	8·0	0·4	0·26
		4·3										
		5·5										
0·041	0·022	5·2	2·7	1·9	0·44	0·29	138	6270	6140	9·2	0·8	0·29
		13·1										
		14·5										
0·084	0·044	14·7	7·3	5·0	0·90	0·60	376	8470	8340	12·5	2·3	0·32
		26·2										
		30·8										
0·155	0·082	31·6	15·6	10·5	1·65	1·10	803	9820	9690	14·4	5·1	0·33

0·229	0·121	52·4 56·5 56·1	28·1	17·7	2·44	1·63	1447	11970	11840	17·8	10·4	0·37
0·264	0·139	60·4 70·0 69·4	34·8	21·2	2·82	1·88	1792	12860	12730	19·1	13·6	0 39
0·427	0·226	184·7 209·5 210·0	104·9	48·0	4·56	3·04	5402	23940	23810	35·8	56·9	0·54
0·632	0·334	538·6 519·6 517·2	259·2	83·8	6·74	4·49	13350	40000	39870	59·9	175·4	0·67

$w_1 = 0·0384$; $w_2 = 0·0430$; $w_3 = 0·0675$; $w_4 = 0·0603 \times 10^9$

$R = 0·432 \times 10^{-7}$; $\rho = 0·171 \times 10^9$; $\tau = 8·01$ Sec.; $\lambda = 0·276$.

Tabelle V.

Bessemerstahl. — Länge = 99·3 *cm*.

i	i_1	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	$H_{\max}$	H_{mit}	$\int eat$	S	$\bar{S}$	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
		1·2										
		1·4										
0·021	0·011	1·4	0·7	0·6	0·23	0·15	50	4420	4320	6·9	0·1	0·14
		2·8										
		2·7										
0·039	0·021	3·1	1·4	1·3	0·42	0·28	100	4820	4720	7·6	0·1	0·07
		5·3										
		5·9										
0·078	0·042	6·0	2·9	2·5	0·85	0·57	207	4920	4820	7·7	0·4	0·14
		11·2										
		11·2										
0·142	0·077	11·2	5·6	4·4	1·55	1·03	400	5220	5120	8·2	1·2	0·21

0·205	0·111	16·9 17·6	8·6	7·3	2·23	1·49	614	5560	5460	8·7	1·3	0·15
0·236	0·127	19·2 18·8 20·2	9·7	7·5	2·57	1·71	693	5445	5345	8·6	2·2	0·23
0·372	0·201	31·5 36·3 34·5	17·0	14·2	4·05	2·70	1214	6070	5970	9·6	2·8	0·16
0·541	0·292	52·0 50·5 52·0	25·7	22·4	5·89	3 93	1835	6293	6193	9·9	3·3	0·12

$w_1 = 0·0761$; $w_2 = 0·088$; $w_3 = 0·1016$: $w_4 = 0·0870 \times 10^9$

$R = 0·428 \times 10^{-7}$; $\rho = 0·184 \times 10^9$; $\tau = 8·00$ Sec.; $\lambda = 0·267$.

2. Axial.

Die Bedeutung der Buchstaben ist in diesen Tabellen dieselbe wie vorher, H bedeutet jetzt die Feldstärke überhaupt, J die Intensität der Magnetisirung. Der Reductionsfactor des Galvanometers, bestimmt wie vorher, war in diesem Falle $= 0\cdot1072 \times 10^{-7}$ abs. E., $T = 7\cdot89$ Sec. Der Widerstand des Galvanometers, der Zuleitung und der Secundärrolle $= 3\cdot24 \times \times 10^{9}$; $\lambda = 0\cdot272$ (brig.). Bei niederen Feldstärken, insbesondere für die Beobachtungen an Bessemerstahl habe ich statt des Hartmann-Galvanometers ein solches von Thomson-Carpentier benützt, welches ungefähr zehnmal grössere Ausschläge lieferte wie das erste. Die Beobachtungen wurden dann für die Verhältnisse des Hartmann-Galvanometers umgerechnet und in die Tabellen eingetragen.

Den Tabellen ist ein »vor circ.« oder »nach circ.« beigefügt. Dies bedeutet, dass die in der Tabelle angeführten Messungen vor oder nach der Untersuchung der circularen Magnetisirung gemacht wurden.

In den meisten Fällen sind zwei Reihen beobachtet worden: eine vor und die andere nach mehrmaliger Ummagnetisirung bei der höchsten Stromstärke; für den Vergleich wurden immer nur die letzteren benützt.

Für die Untersuchung der circularen Magnetisirung musste der Draht, wie erwähnt, stimmgabelförmig abgebogen werden. Der Bug kam gerade in die Mitte des Drahtes zu liegen. Zur Messung in der axialen Richtung ist der Draht wieder gerade gerichtet worden und die Secundärspule lag eben über der deformirten Stelle. Solche Deformationen ändern aber bei weichen Drähten die Susceptibilität ganz erheblich. Thatsächlich wurde diese in den, nach der circularen Magnetisirung ausgeführten Beobachtungen durchwegs kleiner gefunden wie vorher. Der Grund kann in der vorausgegangenen circularen Magnetisirung oder auch in den Deformationen, wahrscheinlich aber in beiden liegen.

Mit »Eisen weich« (zweite Probe) habe ich noch folgenden Versuch gemacht. Der Draht wurde in zwei, je 53 *cm* lange Hälften geschnitten und diese in der axialen Richtung untersucht.

Tabelle VI.

Eisen weich. — 1. Probe, Länge = 101·5 *cm* (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0 00085	2·2	1·1	1·0	1·9	0 12	15·8	0·1	0·09
0·0022	6·5	3·2	2·9	5·6	0·31	17·9	0·3	0·11
0·0041	14·8	7·4	5·9	12·8	0·58	21·9	1·5	0·20
0·0067	30·1	15·0	11·0	25·9	0·95	27·1	4·0	0·27
0·0108	69·9	34·9	21·3	60·3	1·54	39·2	13·6	0·39
0·0128	105·7	52·8	28·0	91·2	1·82	50·0	24·0	0·45
0·0203	418 7	209 3	47·5	381·7	2·89	132	161·8	0·77
0·0311	761·9	380·9	63·3	658·2	4·43	149	317·6	0·83

Tabelle VII.

Eisen, weich. — 2. Probe, Länge = 109 *cm* (vor circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
	2·8	1·4	1 3				0·1	0·07
0·00083	3·1	1·5	1·4	2 7	0·12	22·7	0·1	0·07
	8·2	4·1	3·7				0·4	0·10
0·0022	9·4	4·7	4·1	8·1	0·31	26·0	0·6	0·13
	18·7	9·4	8·1				1·3	0·14
0·0044	23·0	11·5	9·4	19·9	0·63	31·6	2·1	0 18
	34·6	17·3	13·8				3·5	0 20
0·0067	42·8	21·4	15·8	37·0	0·95	38·9	5·6	0·26
	86·5	43·2	27·0				16·2	0·37
0·0108	107·8	53·9	29·7	93·1	1·54	60·6	24·2	0·45
	149·3	74·7	36·1				38·6	0·52
0·0130	181·2	90·6	39·3	156·6	1·85	84·8	51·3	0·57
	577·2	288·6	63·8				225	0·78
0·0204	583·6	291·6	63·2	504·2	2·91	173	229	0·78
	930·6	465·3	82·4				383	0·82
0·0312	910·8	455·5	81·7	787·1	4·45	177	374	0·82

Tabelle VIII.

Eisen, weich. — 2. Probe, Länge = 106·5 *cm* (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
	2·2	1·1	1·1				0·0	0·03
0·00084	2·4	1·2	1·1	2·0	0·12	17·1	0·1	0·03
	6·6	3·3	3·0				0·3	0·09
0·0022	7·5	3·8	3·3	6·6	0·31	21·2	0·5	0·13
	15·7	7·9	6·6				1·3	0·17
0·0044	19·1	9·6	7·6	16·6	0·62	26·8	2·0	0·21
	28·6	14·3	11·2				3·1	0·22
0·0067	34·8	17·4	12·6	30·1	0·95	31·6	4·8	0·28
	67·2	33·6	21·6				12·0	0·36
0·0108	82·2	41·1	24·5	71·0	1·53	46·3	16·6	0·40
	103·6	51·8	29·0				22·8	0·44
0·0129	129·4	64·7	31·6	111·8	1·83	61·0	33·1	0·51
	463·3	231·6	51·8				179·8	0·78
0·0202	477·1	238·5	51·3	412·1	2·88	143	187·2	0·78
	807·7	403·8	67·4				336·4	0·83
0·0308	788·2	394·1	67·8	681·0	4·39	155	326·3	0·83

Tabelle IX.

Eisen, hart. — 1. Probe, Länge = 101·5 *cm* (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0·00085	1·1			1·0	0·12	8·7		
0·0022	2·9	1·5	1·3	2·8	0·31	9·0	0·2	0·12
0·0041	6·9	3·5	2·8	6·6	0·58	11·3	0·7	0·20
0·0067	14·2	7·1	5·5	13·7	0·94	14·5	1·6	0·23
0·0108	30·8	15·4	10·6	29·8	1·55	19·3	4·8	0·31
0·0128	42·4	21·2	13·3	41·0	1·84	22·3	7·9	0·37
0·0203	118·7	59·3	25·2	114·7	2·90	39·6	34·1	0·57
0·0311	293·2	146·6	47·8	283·7	4·43	64·0	96·8	0·66

Tabelle X.

Eisen, hart. — 2. Probe, Länge = 110 *cm* (vor circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
	0·90	0·45	0·43				0·02	0·04
0·00087	0·94	0·47	0·47	0·9	0·12	7·4	0·00	0·00
	2·7	1·3	1·2				0·09	0·07
0·0022	2·8	1·4	1 3	2·7	0 31	8·8	0·1	0·07
	6·0	3·0	2·7				0·3	0·10
0·0044	6·6	3·3	2·8	6·4	0·62	10·3	0·5	0·15
	10·8	5·4	4·4				1·0	0·19
0·0067	11·6	5·8	4·6	11·2	0·96	11 7	1·2	0·21
	21·8	10·9	8·2				2·7	0·25
0·0108	23·2	11 6	8·6	22·5	1·54	14 6	3·0	0 26
	28·7	14·4	10·7				3·7	0·26
0·0129	31·1	15·6	10 5	30·1	1·83	16 4	5·1	0·33
	69·4	34·7	20·7				14·0	0·40
0 0204	74·3	37·2	22·4	71·9	2·91	24·7	14·8	0·40
	197·4	98·7	37·2				61·5	0·62
0·0312	186·1	93·1	36·8	180·0	4·44	40·5	56·3	0·60

Tabelle XI.

Eisen, hart. — 2. Probe, Länge = 104·8 *cm* (nach circ.)

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
	0·93	0·46	0·44				0·02	0·04
0·00081	0·93	0·46	0·46	0·9	0·12	7·8	0·00	0·00
	2·7	1·35	1·25				0·09	0·07
0 0022	2·7	1·36	1·27	2·6	0·31	8·6	0·09	0·07
	6·2	3·1	2·8				0·3	0·10
0·0043	6·3	3·1	2·8	6·1	0·61	10·0	0·3	0·10
	11·2	5·6	4·5				1·1	0 20
0 0066	11·4	5·7	4·6	11·0	0·94	11·8	1·1	0·19
	22·6	11·3	8·8				2·5	0·22
0·0107	22·9	11·5	8·7	22·2	1·52	14·6	2·8	0·24
	30·0	15·0	11·0				4·0	0·27
0·0128	30·8	15·4	11·2	29·8	1·82	16·4	4·2	0·27
	71·7	35·8	22·2				13 6	0·37
0·0201	75·0	37·5	22·4	72·6	2·87	25·3	15·1	0·40
	217·5	108·7	39·8				68·9	0·63
0·0307	202·9	101·4	39·3	196·2	4·37	44·9	62·1	0·61

Tabelle XII.

Bessemerstahl. — Länge = 97 *cm* (nach circ.).

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}$
0·00085	0·78	0·39		0·75	0·12	6·2		
0·0022	1·9	0·95	0·95	1·84	0·31	5·9	0	0·00
0·0041	3·6	1·8	1·8	3·5	0·58	6 0	0	0·00
0·0067	6·1	3·05	2·9	5·9	0·94	6·2	0·15	0·05
0 0108	10·0	5·0	4·8	9 6	1·55	6·2	0·2	0 04
0·0128	12·0	6 0	5·7	11·6	1·84	6·3	0·3	0·05
0·0203	19·8	9·9	9·4	19·1	2·90	6·6	0·5	0·05
0·0311	32·7	16·4	14·7	31·6	4·43	7·1	1·7	0·10

Tabelle XIII.

Eisen, weich. — 2. Probe. — Die Hälften, je 53 *cm* lang.

i	α	$\frac{\alpha}{2}$	β	J	H	$\varkappa$	$\frac{\alpha}{2}-\beta$	$\frac{\alpha-2\beta}{2}$
	2·9	1·45	1·4	2 5		22·5	0·05	0·04
0·00079	2·4	1·20	1·1	2·1	0·11	18·6	0·1	0·08
	8·7	4·35	3·9	7·6		25·5	0·45	0·10
0·0021	7·3	3·65	3·3	6·4	0·30	21·3	0·35	0·10
	21·0	10 5	8·6	18·1		30 7	1·9	0·18
0·0042	17·6	8·8	7·4	15·2	0·59	25·7	1·4	0·16
	39·1	19·6	14·4	33·9		37·3	5·2	0·27
0·0065	32·4	16·2	12·2	28·0	0·91	30·7	4·0	0·24
	92·6	46·3	27·2	80·0		55·2	19·1	0·41
0 0105	73·8	36·9	23·0	63·8	1·45	43·8	13·9	0·38
	140·1	70·0	35·3	120 8		70·2	34·7	0·50
0·0125	107·7	54·3	30·0	93·8	1·72	54·1	24·3	0·44
	461·0	230·5	53·9	398·3		153·8	176·6	0·77
0·0197	375·0	187·5	52·6	324 0	2·61	123·2	135·6	0 72
	808·0	404·0	85·5	698·1		178·3	318·5	0·79
0·0301	697·5	348·7	74·2	602·6	3·95	152·0	274·5	0·79

Die Resultate sind in Tabelle XIII verzeichnet. Die Werthe von H sind mit Rücksicht auf die entmagnetisirende Wirkung der Enden corrigirt.[1] Vergleicht man die Werthe von Tabelle XIII mit jenen von Tabelle VIII, so findet man, dass eine Hälfte bedeutend grössere, die andere eine etwas kleinere Werthe der Susceptibilität ergibt als die Mitte. Der Draht war also wahrscheinlich schon von allem Anfang an magnetisch nicht ganz homogen. Für den Vergleich mit der circularen Magnetisirung habe ich die mit dem ungetheilten Drahte erhaltenen Zahlen benützt.

Discussion der Resultate.

Wir wollen zunächst den Extrastrom oder den Integralwerth der elektromotorischen Kraft $\int e\,dt$, welche durch die circulare Magnetisirung inducirt wird, in Betracht ziehen. In Tabelle XIV sind die Werthe von $\int e\,dt$ und die entsprechenden Stromstärken für die einzelnen Drahtsorten zusammengefasst und in der Curventafel Fig. 2 graphisch dargestellt. Die Werthe von $\int e\,dt$ steigen insgesammt mit der Stromstärke, am stärksten beim weichen, dann weniger stark beim harten Eisen, sehr mässig und nahezu in einer geraden Linie beim Bessemerstahl. Der Verlauf von $\int e\,dt$ ist zu vergleichen mit der Magnetisirungsintensität bei der axialen Magnetisirung; bei dieser Versuchsanordnung muss $\int e\,dt$ bei zunehmender Stromstärke einem constanten Werthe zustreben. Die zwei Curven des weichen Eisens verlaufen ganz ähnlich, nur sind sie quantitativ ein wenig verschieden, was zum Theile in der nicht ganz gleichen materiellen Beschaffenheit, zum Theile aber auch in der etwas verschiedenen Länge der beiden Probestücke seinen Grund hat. Dasselbe gilt für die beiden Curven des harten Eisens.

Aus den Werthen von $\int e\,dt$, respective den Selbstinductionscoëfficienten sind die Werthe der Susceptibilität berechnet worden.

Der Verlauf ist ähnlich wie bei der axialen Magnetisirung, das Maximum der Susceptibilität scheint auch beim weichen

[1] Nach H. du Bois, Magnetische Kreise, deren Theorie und Anwendung, S. 45.

Tabelle XIV.

Eisen, weich 1. Probe		Eisen, weich 2. Probe		Eisen, hart 1. Probe		Eisen, hart 2. Probe		Bessemer-stahl	
i_1	$\int edt$	i_1	$\int edt$	i_1	$\int edt$	i_1	$\int edt$	i_1	$\int edt$
0·012	116	0·012	134	0·012	73	0·013	70	0·011	50
0·023	250	0·021	283	0·022	152	0·022	138	0·021	100
0·046	615	0·043	655	0·045	375	0·044	376	0·042	207
0·085	1608	0·079	1678	0·084	852	0·082	803	0·077	400
0·126	3873	0·116	3696	0·124	1655	0·121	1447	0·111	614
0·145	5810	0·134	5072	0·143	2090	0·139	1792	0·127	693
0·239	16110	0·218	15690	0·236	7532	0·226	5402	0·201	1214
0·362	26580	0·322	25480	0·354	17240	0·334	13350	0·292	1835

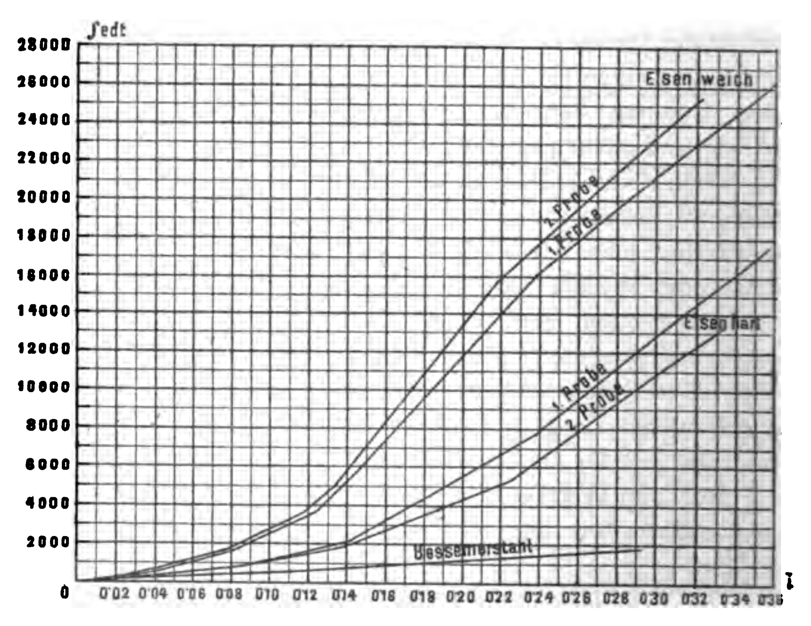


Fig. 2.

Eisen noch nicht erreicht zu sein; kräftigere Ströme, bei denen das Maximum erreicht und überschritten worden wäre, konnten

eben nicht angewendet werden. In den Curvenfiguren 3 und 4 sind die Werthe von $\varkappa$ und die dazu gehörigen Feldstärken

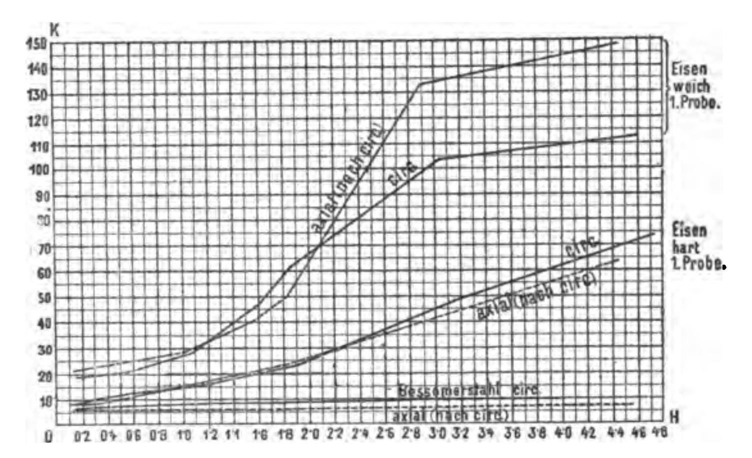


Fig. 3.

sowohl für die circulare, als auch axiale Magnetisirung eingetragen.

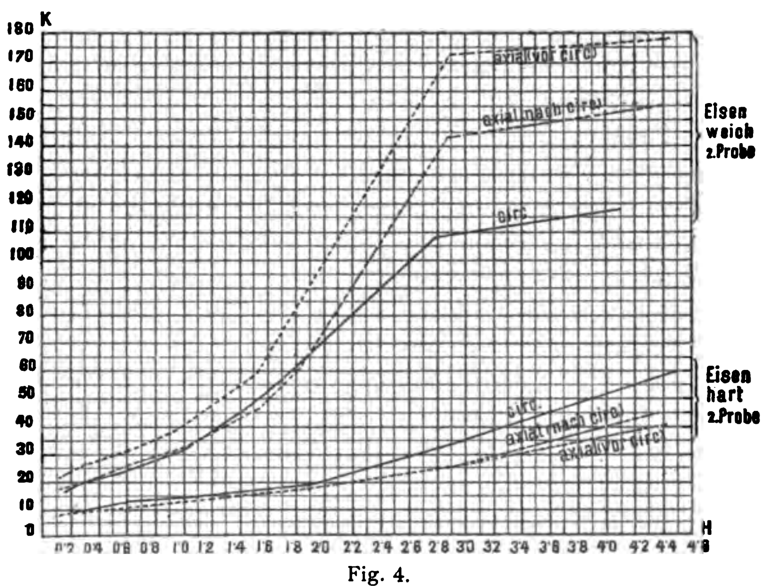


Fig. 4.

Nun kommen wir zur zweiten Frage, deren Lösung wir uns gestellt haben, und diese lautet: Wie ist das

Verhältniss der Permeabilität in axialer und circularer Richtung?

H. Herwig (l. c.) hat für Gasleitungsröhren gefunden, dass die Curve der circularen Magnetisirungsfunctionen von ungefähr demselben Anfangspunkt mit der Curve der axialen Functionen beginnend, später bedeutend steiler ansteigt. Herwig konnte bei den Versuchen über die circulare Magnetisirung die zusammengehörigen Werthe der Feldstärke und der Susceptibilität ziemlich genau angeben; weniger gut war dies bei der axialen Magnetisirung möglich; wegen der Röhrenform und des kleinen Axenverhältnisses war die wirkliche Feldstärke kaum sicher zu ermitteln. Bei den vorliegenden Versuchen ist es umgekehrt. Wie schon oben erwähnt, ist die circular wirksame magnetisirende Kraft in einem vom Strom durchflossenen Drahte in der Axe $= 0$ und in der Peripherie ein Maximum; dem entsprechend wird auch die Susceptibilität an verschiedenen Stellen des Querschnittes verschieden sein, und der aus dem Extrastrom gerechnete setzt sich aus einer Summe von ungleichen Werthen zusammen. Für Drähte mit geringer, langsam ansteigender Susceptibilität wird das aus dem Extrastrom gerechnete ziemlich richtig dem Mittelwerth der magnetisirenden Kraft entsprechen. Für weiches Eisen, bei dem die Susceptibilität anfangs langsam, dann aber rasch ansteigt, bekommen wir jedoch auf diese Weise einen Werth von $\varkappa$, welcher für den Mittelwerth der magnetisirenden Kraft zu gross ist. Bei der Beantwortung der zweiten Frage muss man sich daher diese Erwägungen vor Augen halten.

Betrachten wir zunächst die auf das weiche Eisen bezüglichen Daten und Curven (Fig. 4 und 5). In den Curven sind die Werthe von $\varkappa$ und die zugehörigen H (für die circulare Magnetisirung die Mittelwerthe) eingetragen. Sieht man zunächst von der einen auf die axiale Magnetisirung bezüglichen Curve der Probe 2 ab, welche vor der circularen erhalten wurde, so zeigen beide Proben einen fast gleichen Verlauf. Die Axialcurve liegt bei kleinen Werthen der Feldstärken über der circularen, dann schneidet sie diese und erhebt sich schliesslich bei höheren magnetisirenden Kräften wieder ganz beträchlich über dieselbe. Die Axialcurve in Fig. 5, welche mit dem ganz frischen

weichen Eisendraht, vor den Messungen über die circulare Magnetisirung erhalten wurde, liegt jedoch ganz beträchtlich über der Circularcurve. Berücksichtigt man, dass die Werthe von $\varkappa$ für die circulare Magnetisirung gegenüber dem Mittelwerth von H sicher zu hoch sind, so folgt daraus, dass für weiches Eisen die Susceptibilität rings um die Axe durchwegs kleiner ist als in der Richtung der Axe.

Beim harten Eisen hat die Probe 1 für beide Magnetisirungsarten etwas grössere Werthe von $\varkappa$ geliefert als Probe 2. Letztere war magnetisch härter als erstere, obwohl beide derselben Drahtrolle entnommen wurden. Auch das Verhältniss der beiden Curven ist bei diesen zwei Proben etwas verschieden. Bei der härteren Probe 2 liegt die Axialcurve durchwegs unter der circularen. Bei Probe 1 verlaufen sie anfänglich zusammen, dann erst nehmen sie den Verlauf so wie bei Probe 2, ohne sich jedoch so weit von einander zu entfernen wie bei dieser. Die Versuche von Herwig mit gezogenen Gasleitungsröhren gehören in diese Rubrik und stimmen, wie man sieht, qualitativ mit den hier gemachten Beobachtungen überein. Ein Vergleich der für weiches und hartes Eisen erhaltenen Resultate lehrt also, dass durch den Zug die Susceptibilität sowohl in axialer, als auch circularer Richtung heruntergesetzt wird, jedoch stärker in der axialen als in der circularen, so dass für Eisen, welches durch Zug gehärtet wird, die Susceptibilität in der axialen Richtung kleiner werden kann als in der circularen.

Beim Bessemerstahl liegt die Axialcurve ganz unter der circularen; hier ist die Susceptibilität rings um die Axe entschieden grösser als in der Richtung derselben.

Bei allen Versuchen wurden auch Messungen über den remanenten Magnetismus vorgenommen. Ich habe einige der Resultate in den Figuren 5 und 6 graphisch dargestellt. Es bezieht sich, wie vorher, die ausgezogene Curve auf die circulare, die gestrichelte aber auf die axiale Magnetisirung. Hiebei muss noch erwähnt werden, dass die Daten, welche sich auf den remanenten Magnetismus in schwachen Feldern (insbesondere bei circularer Magnetisirung) beziehen, ziemlich unsicher sind und daher den entsprechenden Curven in diesem Gebiete nur ein qualitativer Werth beizulegen ist. Die Curven geben einer-

seits den remanenten Magnetismus in Procenten des temporären, anderseits die Feldstärke. Beim weichen Eisen durchschlingen sich die beiden Curven, schliesslich bleibt die Axialcurve etwas ober der circularen. Der remanente Magnetismus beginnt bei beiden Arten der Magnetisirung mit niederen

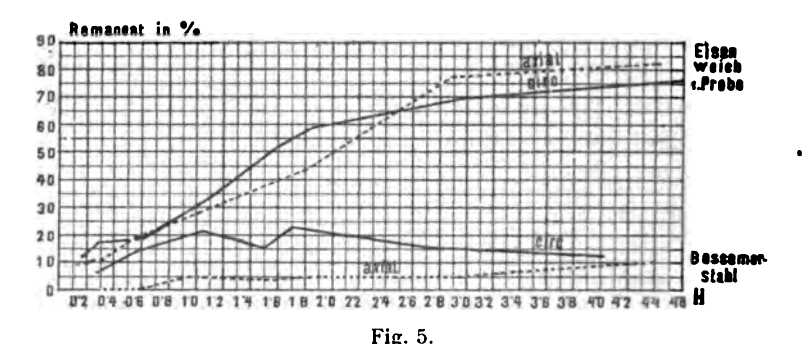


Fig. 5.

Werthen und erreicht bei den höchsten hier angewendeten Feldern circa 70% des temporären.

Für hartes Eisen und Bessemerstahl sind die Werthe des remanenten Magnetismus für die circulare Magnetisirung durchwegs grösser als für die axiale. Der unregelmässige Verlauf der Circularcurve für Bessemerstahl ist jedenfalls Beobachtungs-

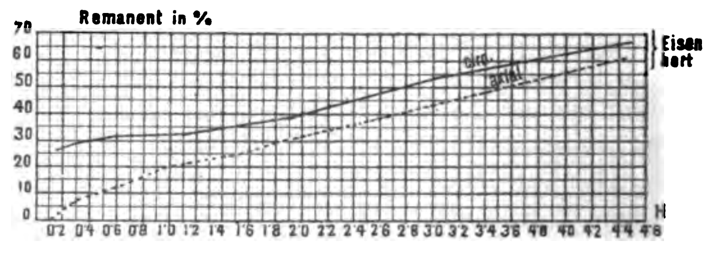


Fig. 6.

fehlern zuzuschreiben. Auffallend ist der Umstand, dass die Circularcurven bei diesen zwei Drähten schon ziemlich hohe Werthe anzeigen, wo die Axialcurven noch den Werth Null angeben. Auch Herwig hat bei den Eisenröhren gefunden, dass der remanente Magnetismus bei der circularen Magnetisirung durchwegs grösser ist als bei der circularen; bei seinen

Versuchen war jedoch dieses Ergebniss, wegen der beträchtlichen entmagnetisirenden Wirkung der Röhrenenden, vorauszusehen.

Schliesslich lässt sich den Beobachtungen noch Einiges über den Einfluss mehrmaliger Ummagnetisirung bei stärkeren Feldern auf die Susceptibilität in schwachen Feldern entnehmen.

Ein hundertmaliger Magnetisirungswechsel bei der höchsten hier angewendeten Feldstärke hatte beim weichen und harten Eisen in allen Fällen eine grössere Susceptibilität in niederen Feldern zur Folge. Bei der Maximalfeldstärke selbst, wurde die Susceptibilität durch diesen Wechsel jedoch heruntergesetzt. Mit 100 Wechseln war schon ein constanter Zustand erreicht, weitere 100 Ummagnetisirungen übten keine Veränderung mehr aus. Beim Bessemerstahl konnte jedoch ein solcher Einfluss in keinem Falle constatirt werden.

Die Frage, ob ein Einfluss der axialen auf die circulare Magnetisirung und umgekehrt vorhanden ist, lässt sich aus diesen Beobachtungen schwer beantworten, weil die Messungen bei circularer und axialer Magnetisirung nicht hinter einander gemacht werden konnten, ohne den Draht zu deformiren. Der Unterschied in den Axialcurven für weiches Eisen, welche vor und nach der circularen Magnetisirung erhalten wurden (Fig. 4), kann sowohl der circularen Magnetisirung, als auch den Deformationen zugeschrieben werden.

Die Resultate dieser Untersuchung lassen sich, wie folgt, zusammenfassen:

Schickt man durch Eisendrähte einen Strom, so entstehen beim Schliessen und Öffnen des Stromes infolge der circularen Magnetisirung kräftige Extraströme, aus welchen man mit Hilfe einer von Kirchhoff entwickelten Formel die Susceptibilität der betreffenden Drahtsorte berechnen kann. Es wurden nun an demselben Drahte Bestimmungen der Susceptibilität in circularer und axialer Richtung vorgenommen. Die Beobachtungen ergaben bei den untersuchten Drahtsorten in qualitativer Beziehung einen gleichen Verlauf der Susceptibilität in beiden Richtungen; in quantitativer Hinsicht ist jedoch ein bemerkenswerther Unterschied zu constatiren.

Beim weichen, ausgeglühten Eisen ist die Susceptibilität rings um die Axe kleiner als in der Richtung derselben. Wird

der Eisendraht durch Zug gehärtet, so vermindert sich die Susceptibilität in der Längsrichtung rascher als in der circularen und das für das weiche Eisen beobachtete Verhältniss kann sich sogar umkehren.

Beim Bessemerstahl ist die circulare Susceptibilität entschieden grösser als die axiale.

Der remanente Magnetismus verläuft beim weichen Eisen ziemlich gleich in beiden Richtungen. Beim harten Eisen und Bessemerstahl ist er grösser bei der circularen Magnetisirung als bei der axialen und der Unterschied ist insbesondere in schwachen Feldern sehr gross.

Ein mehrmaliges Ummagnetisiren bei grösseren Feldstärken erhöht die Susceptibilität in niedereren Feldern.

Untersuchungen über den elektrischen Lichtbogen

von

J. Sahulka.

(Mit 3 Textfiguren.)

Aus dem elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

Erzeugt man einen Lichtbogen zwischen gleichartigen Elektroden durch Anwendung von Gleichstrom, so beobachtet man bekanntlich zwischen der positiven Elektrode und dem Lichtbogen einen grossen, zwischen dem Lichtbogen und der negativen Elektrode einen kleinen Spannungsunterschied. Diese Erscheinung lässt sich am einfachsten unter der Annahme von elektromotorischen Gegenkräften erklären. Erzeugt man den Lichtbogen mit Wechselstrom, so beobachtet man mit einem zur Messung alternirender Spannungsdifferenzen dienenden Voltmeter zwischen jeder Elektrode und dem Lichtbogen einen gleich grossen Spannungsunterschied.

Im Folgenden sind in dem ersten Abschnitte einige Versuchsresultate mitgetheilt, welche an einem mit Wechselstrom zwischen Eisen und Kohle erzeugten Lichtbogen erhalten wurden. Der Lichtbogen verhält sich wie die Quelle einer gleichgerichteten elektromotorischen Kraft, doch konnte ich einige Erscheinungen weder unter der Annahme von elektromotorischen Gegenkräften, noch unter der Annahme von Übergangswiderständen erklären. Vielleicht sind diese Erscheinungen dadurch bedingt, dass der Lichtbogen eine disruptive Entladung ist, wie schon G. Wiedemann[1] annahm und E. Lecher[2] an

---

[1] G. Wiedemann, Elektricität 1885, Bd. 4, S. 835 und 855.

[2] E. Lecher, Neue Versuche über den galvanischen Lichtbogen. Diese Sitzungsber., 1887, II, S. 1007.

dem mit Gleichstrom zwischen Eisenelektroden erzeugten Lichtbogen experimentell bewies. Der zweite Abschnitt handelt über den mit Wechselstrom zwischen zwei Kohlenelektroden erzeugten Lichtbogen. In diesem Falle besteht zwischen jeder Elektrode und dem Lichtbogen eine gleichgerichtete Spannungsdifferenz. Im dritten Abschnitte sind einige Versuchsresultate mitgetheilt, welche an einem Gleichstromlichtbogen zwischen Kohlenelektroden erhalten wurden; aus diesen Versuchen ging nur hervor, dass die Aureole des Lichtbogens einen sehr grossen Widerstand hat.

Bei meinen Versuchen wurde ich von meinen Collegen H. Eisler und Dr. M. Reithoffer, sowie von Herrn Oberingenieur Böhm-Raffay in sehr werkthätiger Weise unterstützt, wofür ich denselben an dieser Stelle bestens danke.

Wechselstromlichtbogen zwischen Eisen und Kohle.

Der zu den Versuchen verwendete Wechselstrom wurde aus dem Kabelnetze der Internationalen Elektricitäts-Gesellschaft in Wien entnommen und mit Hilfe eines Transformators auf 100 Volt Spannungsdifferenz im secundären Kreise transformirt. Die Periodenzahl des verwendeten Wechselstromes ist 2500 pro Minute. Die eine Elektrode des Lichtbogens bestand aus einem 4 *mm* dicken Stäbchen aus weichem Eisen, die andere aus einer 10 *mm* dicken Dochtkohle. Eine homogene Kohle erwies sich für die Versuche als ungeeignet, weil sich dann der Lichtbogen nur sehr schwer bilden liess und nur kurze Zeit andauerte. Die leichte Zerstäubbarkeit der Kohle schien eine nothwendige Bedingung zu sein, dass der Lichtbogen dauernd erhalten bleibe. Die Elektroden wurden in vertikaler Stellung verwendet, das Eisenstäbchen als obere Elektrode; an demselben bildet sich während der Dauer der Versuche ein Tropfen von flüssigem Eisen. Von demselben gehen Dämpfe in der Form eines blauen Kegels aus, welcher die Spitze an der Oberfläche des Eisentropfens hat. Der Kegel ist von rothen Dämpfen umgeben. Das Eisenstäbchen und die Kohle überziehen sich nach kurzer Zeit mit Rost, welcher jedoch nicht haftet. Legt man an die Elektroden ein Galvanometer an, so wird die Magnetnadel abgelenkt; eine in den

Stromkreis eingeschaltete Tangentenboussole zeigt ebenfalls an, dass im Stromkreise ein Gleichstrom oder gleichgerichteter Strom fliesst, welcher eine Componente des gesammten Stromes bildet. Der Wechselstromlichtbogen zwischen Eisen und Kohle verhält sich daher wie die Quelle einer gleichgerichteten elektromotorischen Kraft, und zwar bildet die Kohle den positiven, das Eisen den negativen Pol, indem im Lichtbogen der Gleichstrom vom Eisen zur Kohle fliesst. Verbindet man das Galvanometer mit den Secundärklemmen des Transformators, so bekommt man einen

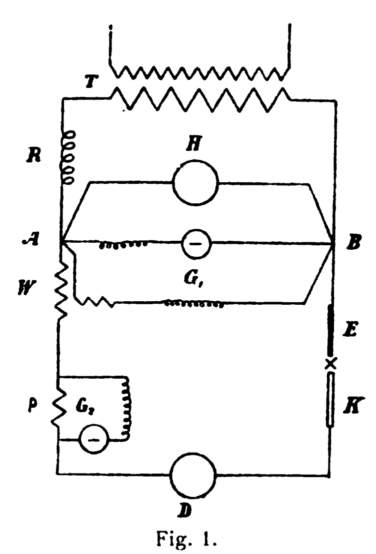


Fig. 1.

sehr kleinen Ausschlag, der nur dem Spannungsverluste des Gleichstromes in der Secundärwickelung entspricht. Für die in der Secundärwickelung des Transformators *T* (Fig. 1) erzeugte periodisch veränderliche elektromotorische Kraft bildet der Lichtbogen und der demselben vorgeschaltete Regulirwiderstand *R* den äusseren Kreis, während für die im Lichtbogen erzeugte elektromotorische Kraft von constantem Vorzeichen der Widerstand *R* und die Secundärwickelung des Transformators den äusseren Kreis bilden.

Das Schema der Versuchsanordnung ist aus der Figur ersichtlich: *EK* ist der Lichtbogen; *D* ist ein Torsions-Elektrodynamometer von Siemens & Halske zur Messung der

gesammten Stromstärke J; ρ ist ein in den Stromkreis eingeschalteter inductionsloser Widerstand, an dessen Enden ein Torsionsgalvanometer G_2 von Siemens & Halske von 1 Ω Widerstand nebst einem Vorschaltwiderstande von 9 Ω angeschlossen war; W ist die dickdrahtige Spule eines Wattmeters von Ganz & Co., dessen dünndrahtige Spule nebst einem vorgeschalteten, inductionslosen Widerstande von 1000 Ω zwischen die Punkte AB geschaltet war; mit H ist ein Hitzdraht-Voltmeter von Hartmann & Braun bezeichnet, mit welchem die gesammte zwischen den Punkten AB herrschende Spannungsdifferenz Δ gemessen wurde; G_1 ist ein Torsionsgalvanometer von Siemens & Halske von 1 Ω Widerstand, welchem ein inductionsloser Widerstand von 999 Ω vorgeschaltet war. Die Spulen eines jeden der Galvanometer G_1, G_2 haben nur circa 150 Windungen von kleiner Windungsfläche; bei diesen Instrumenten entspricht einer Drehung der Spiralfeder um 1° eine Stromstärke von 0·001 A. Mit dem Galvanometer G_1 wird die zwischen den Punkten AB herrschende gleichgerichtete Spannungsdifferenz Δ_1 gemessen, welche eine Componente der gesammten Spannungsdifferenz Δ bildet. Aus den Angaben des Galvanometers G_2 findet man die Stärke J_1 des im Stromkreise fliessenden gleichgerichteten Stromes, welcher eine Componente des Gesammtstromes J bildet.

Der Reductionsfactor des Elektrodynamometers war bei den in der folgenden Tabelle mit Nummer 1 bis 4 bezeichneten Versuchen 0·78, bei den mit Nummer 5 bis 7 bezeichneten Versuchen 2·56; der Reductionsfactor des Wattmeters war 0·00344.

Zwischen den Punkten AB besteht ausser Δ_1 noch eine periodisch veränderliche Spannungsdifferenz $\delta_2 \sin \omega t$; die resultirende Spannungsdifferenz ist

$$\delta = \Delta_1 + \delta_2 \sin \omega t.$$

Die Angaben des Voltmeters H hängen von dem mittleren Quadrate der Grösse δ ab:

$$\Delta^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (\Delta_1 + \delta_2 \sin \omega t)^2 dt = \Delta_1^2 + \frac{\delta_2^2}{2}.$$

Setzt man

$$\Delta_2^2 = \frac{\delta_2^2}{2},$$

so erhält man

$$\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \qquad 1)$$

Die Grösse Δ_2^2 ist das mittlere Quadrat der periodisch veränderlichen Spannungsdifferenz; die Formel bleibt auch richtig, wenn die periodisch veränderliche Componente nicht nach dem einfachen Sinusgesetze variirt.

Der Strom setzt sich in analoger Weise aus J_1 und einer periodisch veränderlichen Componente zusammen:

$$i = -J_1 + i_2 \sin(\omega t - \varphi).$$

Dem Werthe J_1 musste das Vorzeichen — gegeben werden, denn wenn die Componenten Δ_1 und $\delta_2 \sin \omega t$ gleiches Vorzeichen haben und sich addiren, so erzeugen sie entgegengesetzt gerichtete Ströme, weil die eine Componente der elektromotorischen Kraft im Transformator, die andere im Lichtbogen erzeugt wird. Die Phasendifferenz zwischen der periodisch veränderlichen Stromcomponente und der Spannungsdifferenz $\delta_2 \sin \omega t$ ist mit φ bezeichnet. Die Angaben des Elektrodynamometers D hängen vom mittleren Quadrate des resultirenden Stromes ab:

$$J^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [-J_1 + i_2 \sin(\omega t - \varphi)]^2 dt = J_1^2 + \frac{i_2^2}{2}.$$

Setzt man

$$J_2^2 = \frac{i_2^2}{2},$$

so erhält man

$$J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2} \qquad 2)$$

J_2^2 ist das mittlere Quadrat der periodisch veränderlichen Stromcomponente.

Die Angaben des Wattmeters hängen von dem Werthe ab:

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T \delta i \, dt = J_2 \Delta_2 \cos \varphi - J_1 \Delta_1. \qquad 3)$$

Die Grösse

$$W_2 = J_2 \Delta_2 . \cos \varphi$$

stellt die Arbeit dar, welche dem Wechselstrome entspricht und zwischen den Punkten AB auf der Seite des Lichtbogens verbraucht wird, d. i. die Wechselstromarbeit im Lichtbogen.

Die Grösse

$$W_1 = J_1 \Delta_1$$

stellt die Arbeit vor, welche dem Gleichstrome J_1 entspricht und zwischen den Punkten AB auf Seite des Transformators verbraucht wird. Das Wattmeter gibt die Differenz dieser Grössen an:

$$W = W_2 - W_1. \qquad 3)$$

Da nun die Arbeit W_1 auf Kosten der Arbeit W_2 entsteht, stellt diese Differenz den Arbeitsverlust im Lichtbogen dar.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate einer Versuchsreihe mitgetheilt, welche dadurch erhalten wurde, dass der Vorschaltwiderstand R und somit auch die Stromstärke geändert wurde. Die einzelnen Grössen sind in den Einheiten Ampère, Volt, Ohm, Watt ausgedrückt. Die Grössen J_2, Δ_2, W_2 sind entsprechend den Formeln 1), 2), 3) durch Rechnung gefunden. Jeder einzelne Werth ist ein Mittelwerth von 3 bis 5 Ablesungen. Die einzelnen Ablesungen haben gewöhnlich nur in den Zehnteln differirt. Bemerkenswerth ist, dass der Werth des Δ während der ganzen Versuchsreihe nur zwischen den Grenzen 74·5 und 75·5 schwankte. Nur dann, wenn man die Elektroden sehr weit von einander entfernte, so dass der Lichtbogen abriss, dann stieg Δ bis 80 Volt, während Δ_1 bis 23 Volt sank. Bei sehr kurzer Lichtbogenlänge war Δ_1 etwas grösser als der in der Tabelle stehende Werth. Die Kohle war während der Versuche in einer Holzzwinge befestigt, welche ohne Anwendung einer Mikrometerschraube mit der Hand in die entsprechende Distanz gezogen wurde.

Nr.	Δ_1	Δ	Δ_2	J	J_1	J_2	W	W_1	W_2	$\cos\varphi$	r	E
1	28·8	75·0	69·3	5·64	2·76	4·92	91·5	79·5	171·0	0·501	2·89	36·8
2	28·9	75·0	69·2	6·38	3·12	5·56	117·7	90·2	207·9	0·540	2·89	37·9
3	28·6	75·3	69·7	9·08	4·64	7·80	168·2	132·7	300·9	0·554	2·04	38·1
4	28·3	75·5	70·0	9·50	4·93	8·12	183·7	139·5	323·2	0·569	2·04	38·4
5	28·7	75 2	69·5	10·78	5·45	9·30	190·2	156·4	346·6	0·536	1·64	37·6
6	27·5	75·8	70·6	11·65	5·71	10·15	222·9	157·1	380·0	0·530	1·64	36·9
7	29·9	74·5	68·2	13·67	6·94	11·78	214·3	207·5	421·8	0·525	1·15	37·9

Der im Stromkreise fliessende Gleichstrom variirte, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, zwischen 2·76 und 6·94 A.; über diesen Werth konnte man nicht hinausgehen, weil sonst eine zu grosse Menge des Eisenstäbchens schmolz und abtropfte. Die beobachtete gleichgerichtete Spannungsdifferenz Δ_1 variirte innerhalb der Grenzen 27·5 bis 29·9 Volt. In der Tabelle ist noch der Werth für den Cosinus der Phasenverschiebung angegeben; derselbe ist berechnet entsprechend der Formel

$$\cos\varphi = \frac{W_2}{J_2 \Delta_2}.$$

Ausserdem ist der effective Widerstand r des Lichtbogens in der Weise gerechnet, dass der Arbeitsverlust W im Lichtbogen durch das Quadrat der gesammten Stromstärke J dividirt wurde. In dem Werthe r ist aber auch der Widerstand $\rho = 0 \cdot 1\ \Omega$, sowie der Widerstand des Elektrodynamometers D, der dicken Spule des Wattmeters W und der Zuleitungen enthalten; die letzteren Widerstände betragen zusammen auch circa $0 \cdot 1\ \Omega$, so dass der effective Widerstand des Lichtbogens um circa $0 \cdot 2\ \Omega$ kleiner ist als der in der Tabelle stehende Werth. Endlich ist noch die Grösse E gerechnet entsprechend der Formel

$$E = \Delta_1 + rJ_1.$$

Die Grösse E könnte man als die im Lichtbogen erzeugte gleichgerichtete elektromotorische Kraft ansehen; wie aus der Tabelle ersichtlich ist, weichen die einzelnen Werthe nicht viel von dem Mittelwerthe 37·7 Volt ab.

Das Auftreten des gleichgerichteten Stromes J_1 und de gleichgerichteten Spannungsdifferenz Δ_1 könnte auch durch die Annahme von Widerstandsänderungen im Lichtbogen erklärt werden. Es wird nämlich während der einen halben Periode des Wechselstromes hauptsächlich das Eisen, während der nächsten halben Periode hauptsächlich die Kohle zerstäubt.

Dies kann zur Folge haben, dass der Widerstand des Lichtbogens in den aufeinanderfolgenden halben Perioden ungleich gross ist. In den halben Perioden, in welchen der Widerstand verkleinert wird, tritt ein Anwachsen der Stromstärke ein, so dass der gesammte Strom eine gleichgerichtete Stromcomponente enthalten muss. Erzeugt man den Lichtbogen zwischen Eisen und Kohle mit Gleichstrom, und wählt man einmal die Kohle, das anderemal das Eisen als Anode, so sieht man an dem mit einer Linse erzeugten Bilde des Lichtbogens, dass hauptsächlich die Kathode zerstäubt wird; ist das Eisen die Anode, so bläht sich der flüssige Eisentropfen häufig auf und platzt, welche Erscheinung wahrscheinlich durch die von den Kohlentheilchen mitgerissene Luft bedingt ist. Wird der Lichtbogen zwischen Eisen und Kohle mit Wechselstrom erzeugt, so müsste der Widerstand des Lichtbogens abnehmen, wenn die

Kohle die Kathode ist, damit der entstehende gleichgerichtete Strom die beobachtete Richtung hat.

An dem mit Wechselstrom erzeugten Lichtbogen wurden auch die Spannungsdifferenzen zwischen den Elektroden und dem Lichtbogen mit Hilfe eines aperiodischen Spiegelgalvanometers von Siemens & Halske gemessen, welchem ein Widerstand von $10^7\,\Omega$ vorgeschaltet war; die Spulen des Galvanometers hatten circa 31000 Windungen. Das in den Lichtbogen eingeführte Stäbchen bestand aus Kohle und war 3 *mm* dick. Bei diesen Versuchen wurde der Lichtbogen als positiv elektrisch im Vergleiche zu beiden Elektroden gefunden. Bei einem Versuche (Fig. 2) waren die Spannungsdifferenzen in Volt ausgedrückt: $LE = 32 \cdot 8$, $LK = 4 \cdot 6$, $KE = 28 \cdot 3$. Bei einem anderen Versuche mit sehr kurzem Lichtbogen war

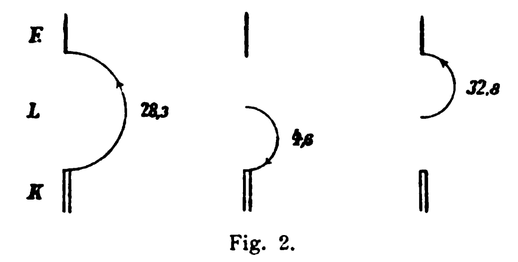


Fig. 2.

$LE = 34 \cdot 5$, $LK = 3 \cdot 9$, $KE = 30 \cdot 6$. Wenn der Lichtbogen nicht sehr kurz war, hatte die Spannungsdifferenz KE immer die in der früheren Tabelle angegebenen Werthe. Die Ablesungen wurden nur gemacht, wenn das in den Lichtbogen eingeführte Stäbchen selbst weissglühend war. Wenn sich während der Dauer des Versuches die Lichtbogenlänge beträchtlich änderte, so war die Beziehung

$$KE = LE - LK$$

nicht ganz genau erfüllt.

Es mögen nun die Erscheinungen mitgetheilt werden, welche an dem mit Wechselstrom erzeugten Lichtbogen beobachtet wurden und weder durch die Annahme von elektromotorischen Kräften, noch durch die Annahme von Übergangswiderständen oder Widerstandsänderungen im Lichtbogen erklärt werden konnten.

1. Beobachtet man die Spannungsdifferenzen mit Hilfe der früher angeführten Torsionsgalvanometer von 1 Ω Widerstand, welchen ein Widerstand von 999 Ω vorgeschaltet ist, so findet man ganz andere Spannungsdifferenzen als in dem Falle, wenn der Galvanometerkreis einen Widerstand von 10^7 Ω hatte. Die bei einer Versuchsreihe erhaltenen Resultate sind in der Fig. 3 dargestellt.

Zu den Versuchen wurden drei Torsionsgalvanometer mit Vorschaltwiderständen verwendet. Es wurden, wie dies in der Figur angedeutet ist, entweder nur ein oder zwei oder alle drei Galvanometer eingeschaltet; die Richtungen der Spannungsdifferenzen und ihre Werthe, in Volt ausgedrückt, sind in der Figur angegeben. Werden die Spannungsdifferenzen *KL* und *LE* gleichzeitig gemessen, so ergibt sich die gesammte Spannungs-

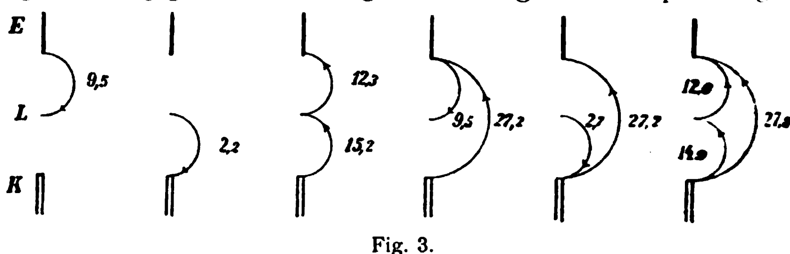


Fig. 3.

differenz *KE* als Summe der beiden Theile. Misst man aber eine der Spannungsdifferenzen *EL* oder *LK* allein oder eventuell gleichzeitig mit *KE*, so hat jede der beobachteten Spannungsdifferenzen *EL* oder *LK* das entgegengesetzte Zeichen im Vergleiche zur Spannungsdifferenz *KE*. Die Versuche wurden mehrfach wiederholt, doch wurde stets bezüglich der Richtung der gemessenen Spannungsdifferenzen das gleiche merkwürdige Resultat erhalten.

Die für die Spannungsdifferenz *EL* gefundenen Werthe variirten von 5·4 bis 10·7 Volt; die Werthe für *LK* variirten zwischen 2·2 und 3·8 Volt. Die Versuche wurden noch in der Weise ausgeführt, dass das Spiegelgalvanometer mit vorgeschaltetem Widerstande von 10^7 Ω und ein Torsionsgalvanometer mit vorgeschaltetem Widerstande von 999 Ω gleichzeitig zwischen die Eisenelektrode und den Lichtbogen geschaltet wurden; an *LK* war kein Galvanometer angelegt. Man konnte

nun sehen, dass beim Schliessen und Unterbrechen des Zweiges des Torsionsgalvanometers sich die Richtung des Ausschlages am Spiegelgalvanometer augenblicklich änderte. Die bei einem Versuche erhaltenen Resultate sind in der Tabelle *A* enthalten. Die Buchstaben *a*, *e* bedeuten, dass das Torsionsgalvanometer ausgeschaltet, respective eingeschaltet ist. Unter *TG* sind die Angaben des Torsionsgalvanometers, unter *SG* die des Spiegelgalvanometers, in Volt ausgedrückt, mitgetheilt; das Zeichen + ist beigesetzt, wenn die beobachtete Spannungsdifferenz dasselbe Vorzeichen hat wie die dem *KE* entsprechende. Es machte keinen Unterschied, wenn statt des Zweiges des Torsionsgalvanometers ein einfacher Widerstand von 1000 Ω verwendet wurde.

Tabelle *A*.

	TG	*SG*
a.........	.	+32·7
e.........	−6	− 6·2
a.........	.	+32·3
e.........	−7·7	− 8·1
a.........	.	+31·1

Die Angaben der beiden Galvanometer stimmen nicht genau überein, weil es schwer ist, am Torsionsgalvanometer sehr rasch abzulesen. Der Versuch wurde noch in der Weise abgeändert, dass das Spiegelgalvanometer zwischen *LK* geschaltet wurde, während das Torsionsgalvanometer zwischen *EL* geschaltet blieb. Beim raschen Einschalten und Ausschalten des Zweiges des Torsionsgalvanometers wurden die in der Tabelle *B* enthaltenen Werthe abgelesen; die Angaben des Torsionsgalvanometers wurden nicht beobachtet. Aus den Versuchen geht hervor, dass die zwischen den Elektroden und dem Lichtbogen gemessenen Potentialdifferenzen sich ändern, wenn man zu *KL* oder *LE* allein, oder zu beiden gleichzeitig Nebenschlüsse von 1000 Ω Widerstand anbringt, obwohl diese Wider-

stände beträchtlich gross sind im Vergleich zu dem scheinbaren Widerstande des Lichtbogens. Die Potentialdifferenzen ändern sogar das Vorzeichen, doch behält ihre Summe $EL+LK$ stets denselben Werth. Vielleicht ist die Änderung der Potentialdifferenzen durch elektromotorische Kräfte bewirkt, welche am Mittelstäbchen infolge der schwachen Messströme entstehen.

Tabelle *B*.

	SG
a.........	— 3·1
c.........	+34·0
a.........	— 2·8
c.........	+35·2

2. Ein merkwürdiges Verhalten zeigte der Lichtbogen, wenn der Versuch gemacht wurde, die in ihm entstehende gleichgerichtete elektromotorische Kraft zu compensiren, um dadurch ihren wahren Werth zu ermitteln. Zunächst wurde der Versuch mit einer Accumulatorenbatterie gemacht, welche eine elektromotorische Kraft von circa 60 Volt hatte. Es war nicht möglich, die Compensation auszuführen. Je schwächer der gleichgerichtete Strom war, welchen die in den Stromkreis eingeschaltete Tangentenboussole anzeigte, desto kleiner wurde der Lichtbogen; derselbe verlöschte, bevor der gleichgerichtete Strom zum Verschwinden gebracht werden konnte. Auf Rath des Herrn Böhm-Raffay transformirte ich hierauf den Wechselstrom auf 200 Volt und schaltete in den Stromkreis zwei Lichtbögen Eisen — Kohle ein, damit sich ihre gleichgerichteten elektromotorischen Kräfte gegenseitig compensiren. Auch in dieser Weise konnte die Compensation nicht erreicht werden. Die Stärke des im Stromkreise fliessenden gleichgerichteten Stromes J_1 und die an einem Lichtbogen gemessene gleichgerichtete Spannungsdifferenz Δ_1 waren in einem labilen Zustande. Je schwächer J_1 war, desto kleiner wurde Δ_1; der kleinste beobachtete Werth war 9 Volt. Wenn die in einem der Lichtbögen erzeugte gleichgerichtete elektro-

motorische Kraft das Übergewicht erlangte, dann stieg Δ_1 rasch auf 20, 40, ja selbst 65 Volt, wobei dann der Versuch infolge Abtropfens der Eisenelektrode ein Ende hatte. Der Wechselstromlichtbogen zwischen Eisen und Kohle zeigt demnach das merkwürdige Verhalten, dass die beobachtete gleichgerichtete Spannungsdifferenz desto kleiner wird, je mehr der Gleichstrom zum Verschwinden gebracht wird. Wenn der gleichgerichtete Strom sehr schwach war, dann war auch die gesammte Spannungsdifferenz Δ an dem Lichtbogen beträchtlich kleiner als die in der ersten Tabelle angegebenen Werthe; der kleinste beobachtete Werth war 40 Volt.

3. An die Elektroden des Lichtbogens wurde ein Telephon angelegt, welchem ein Condensator von $2^1/_2$ Mikrofarad vorgeschaltet war. Zieht man die Elektroden auseinander, so dass der Lichtbogen unterbrochen wird, so hört man im Telephon einen Ton, welcher der Periodenzahl des verwendeten Stromes entspricht. Wird der Lichtbogen gebildet, so hört man einen stärkeren und höheren Ton, der vielleicht durch eine discontinuirliche Entladung bedingt ist. Wenn man den Lichtbogen mit Gleichstrom erzeugt, so hört man im Telephon ein starkes Sausen.

Wechselstromlichtbogen zwischen Kohlenelektroden.

Die zu den Versuchen verwendeten Kohlen waren 7 *mm* dicke Dochtkohlen, das in den Lichtbogen eingeführte Kohlenstäbchen war 3 *mm* dick. Wenn der Lichtbogen zwischen den vertical gestellten Elektroden erzeugt wurde, so war die obere Kohle negativ elektrisch im Vergleich zur unteren, gleichgiltig welche Kohle als obere Elektrode verwendet wurde. Der mit einem Torsionsgalvanometer beobachtete Spannungsunterschied war von der Stromstärke abhängig und stieg bis 2·8 Volt an. Wurden die beiden Kohlen horizontal angeordnet, so zeigte das Torsionsgalvanometer keinen Spannungsunterschied an. Um zu prüfen, ob das in den Lichtbogen eingeführte Kohlenstäbchen das Potential verändern könne, wurde dasselbe und eine der dicken Kohlen als Elektroden für den Lichtbogen verwendet. In diesem Falle war stets das dünne

Stäbchen positiv elektrisch im Vergleich zur dicken Kohle, doch betrug die gemessene Spannungsdifferenz im Maximum 3 Volt. Dieser Umstand kann die im Folgenden beschriebenen Erscheinungen nicht wesentlich beeinflusst haben. Bei den Versuchen waren die Elektroden horizontal gestellt, das Mittelstäbchen war von oben in den Lichtbogen eingeführt. Misst man mit einem Galvanometer die Spannungsdifferenzen, so findet man, dass zwischen dem Lichtbogen und den Elektroden eine gleichgerichtete Spannungsdifferenz besteht; dieselbe ist von der Stromstärke und Lichtbogenlänge abhängig und betrug bei den angestellten Versuchen im Maximum 7 Volt. Der Lichtbogen ist dabei negativ elektrisch im Vergleich zu den Kohlenelektroden. Das Vorhandensein einer solchen Spannungsdifferenz kann nicht überraschen. Während einer halben Periode des Wechselstromes ist die Kohlenelektrode die positive Elektrode, in der nächsten halben Periode ist sie die negative Elektrode; nun ist in der ersten halben Periode der Spannungsunterschied zwischen der Kohlenelektrode und dem Lichtbogen grösser als in der zweiten; daher muss sich eine resultirende gleichgerichtete Spannungsdifferenz ergeben. Ein merkwürdiges Verhalten zeigten die beobachteten Spannungsdifferenzen, wenn zwischen eine Elektrode und den Lichtbogen ein entsprechend grosser Widerstand (1000 Ω) eingeschaltet wurde und das Mittelstäbchen nicht bis in den Kern des Lichtbogens reichte. Eine Versuchsreihe ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Zwischen die linke Kohle und den Lichtbogen war ein Torsionsgalvanometer I nebst 999 Ω Vorschaltwiderstand geschaltet, zwischen den Lichtbogen und die rechte Kohle ein gleiches Torsionsgalvanometer II nebst Vorschaltwiderstand 999 Ω. Zum Torsionsgalvanometer I war das aperiodische Spiegelgalvanometer nebst dem Vorschaltwiderstand von 10^7 Ω parallel geschaltet. Um nicht unter verschiedenen Verhältnissen zu beobachten, wurde der Lichtbogen gar nicht regulirt; auch das Mittelstäbchen, welches abbrannte, wurde nicht nachgeschoben. Der Lichtbogen, welcher anfangs sehr kurz war, verlängerte sich allmälig bis zu einer Länge von 14 *mm*, worauf er verlöschte. Das Mittelstäbchen, welches anfangs fast in den

Kern des Lichtbogens reichte, brannte dabei um mehr als 1 *cm* ab. Die Zweige der beiden Torsionsgalvanometer wurden rasch aus- und eingeschaltet, und die Ablesungen an den Instrumenten ausgeführt. In der Tabelle bedeutet der Buchstabe *a*, dass der Zweig des Torsionsgalvanometers ausgeschaltet war; unter *SG* stehen die Angaben des Spiegelgalvanometers. Alle Zahlen haben die Benennung Volt. Die Angaben der beiden

I	II	*SG*
5·4	4·9	5·5
a	10·7	11·5
10·8	*a*	10·8
a	*a*	5·7
4·3	3·3	4·4
a	10·9	11·7
11·1	*a*	11·1
a	*a*	4·3
3·8	3·5	3·9
a	11·7	12·0
12·7	*a*	12·4
a	12·3	12·9

Torsionsgalvanometer sollten eigentlich stets gleich gross sein, da zwischen den beiden Elektroden keine gleichgerichtete Spannungsdifferenz bestand. Die Zahlwerthe stimmen nicht genau überein, weil nicht ganz gleichzeitig und sehr rasch abgelesen wurde, damit sich der Zustand des Lichtbogens nicht zu sehr verändere; auch waren bei den kleinen Spannungsdifferenzen die Torsionswinkel sehr klein, da einem Torsionswinkel von 1° eine Spannungsdifferenz von 1 Volt entspricht. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, ergeben sich ungefähr die gleichen Spannungsdifferenzen, ob beide Torsionsgalvanometer eingeschaltet oder ausgeschaltet waren. Dagegen sieht man das merkwürdige Resultat, dass die zwischen den Kohlenelektroden und dem Lichtbogen gemessene Spannungsdifferenz beträchtlich anwächst, wenn

zwischen eine der Kohlen und den Lichtbogen ein Widerstand von 1000 Ω eingeschaltet wird und das Mittelstäbchen nicht bis in den Kern des Lichtbogens reicht. Kurz nach Stromschluss waren die beobachteten Spannungsdifferenzen sehr klein oder hatten sogar anfangs das entgegengesetzte Zeichen; dieselben wuchsen aber rasch zu dem Werthe von einigen Volt an. Die anfänglichen Beobachtungen sind in der Tabelle nicht aufgenommen. Bei dem Versuche sank die Stromstärke von 8·4 A. successive bis 4·5 A. Das Mittelstäbchen befand sich immer in guter Berührung mit dem Lichtbogen, weil dieser durch die Luftströmung nach aufwärts bewegt wurde. Bei einigen anderen Versuchen brannte das Mittelstäbchen stärker ab; dann sank die mit den Torsionsgalvanometern gemessene Spannungsdifferenz bis auf 1 Volt herab, stieg jedoch trotzdem bis circa 10 Volt an, wenn nur ein Torsionsgalvanometer eingeschaltet war. Wenn das Mittelstäbchen, nachdem der Lichtbogen schon eine Länge von 10 *mm* erreicht hatte und die Stromstärke auf 5·5 A. gesunken war, wieder so weit gesenkt wurde, dass es fast in den Kern des Lichtbogens reichte, so stieg die Spannungsdifferenz zwischen jeder Elektrode und dem Lichtbogen auf 5·5 Volt, wenn beide Torsionsgalvanometer eingeschaltet oder ausgeschaltet waren; wurde jedoch nur ein Torsionsgalvanometer eingeschaltet, so stieg die Spannungsdifferenz wieder auf 12·5 Volt an. Wenn das Mittelstäbchen bis in den Kern des Lichtbogens eintauchte, dann wurde stets dieselbe Spannungsdifferenz abgelesen, gleichgiltig ob nur das eine oder beide Torsionsgalvanometer eingeschaltet waren. Aus den Versuchen scheint hervorzugehen, dass sowohl an den Elektroden, als auch am Mittelstäbchen elektromotorische Kräfte auftreten.

Zum Schlusse wurde noch zwischen die linke Kohle und den Lichtbogen ein Regulirwiderstand und eine Tangentenboussole eingeschaltet. Die Boussole zeigt einen gleichgerichteten Strom an, dessen Stärke durch Änderung des Regulirwiderstandes verändert werden kann. Solange der Gleichstrom nur einige Zehntel oder 1 Ampère betrug, hatte er stets die Richtung von der Kohle zum Lichtbogen, wie auch zu erwarten

war. Wenn aber der Widerstand des Zweiges, in welchen die Tangentenboussole eingeschaltet war, sehr verkleinert wurde, so ereignete es sich häufig, dass der gesammte Strom von der linken Kohle durch den Regulirwiderstand zum Mittelstäbchen und von diesem zur rechten Kohle floss. In diesem Falle wurde das Mittelstäbchen zur Elektrode, und da dasselbe, wie früher erwähnt wurde, im Vergleich zur anderen Kohle schwach positiv elektrisch ist, so änderte der von der Tangentenboussole angezeigte gleichgerichtete Strom die Richtung. Wenn bei den Versuchen das Mittelstäbchen vom Kerne des Lichtbogens weit entfernt war, so verhielt sich die Aureole wie ein grosser Widerstand.

Gleichstrom-Lichtbogen zwischen Kohlenelektroden.

Zum Schlusse wurde am Gleichstrom-Lichtbogen zwischen Kohlenelektroden untersucht, ob sich die Vertheilung des Potentials im Lichtbogen ändert, wenn man zwischen die Elektroden und den Lichtbogen Widerstände von 1000 Ω schaltet. Wenn das Mittelstäbchen in den Lichtbogen gut eingeführt ist, macht es keinen Unterschied, ob die beiden Torsionsgalvanometer (1000 Ω) zugleich oder einzeln eingeschaltet oder ausgeschaltet werden; es wurde stets dieselbe Spannungsdifferenz erhalten. Wenn man jedoch das Mittelstäbchen aus dem eigentlichen Lichtbogen in die denselben umgebende Aureole schob, änderten sich die mit den Torsionsgalvanometern gemessenen Spannungsdifferenzen, wenn diese Instrumente eingeschaltet oder ausgeschaltet wurden. Die Ergebnisse lassen sich aber leicht erklären, wenn man annimmt, dass die Aureole einen beträchtlichen Widerstand hat. Wenn das Stäbchen aus dem Lichtbogen weit herausgeschoben war, so zeigten die beiden Torsionsgalvanometer, wenn sie gleichzeitig eingeschaltet waren, fast gleiche Spannungsdifferenzen an; wurde das eine Torsionsgalvanometer ausgeschaltet, so zeigte das andere eine sehr kleine Spannungsdifferenz an, etc. Der Widerstand der Aureole hatte desto mehr Einfluss, je weiter das Stäbchen aus dem Lichtbogen herausgeschoben wurde. Wurde zur Messung der Spannungsdifferenzen das aperiodische Spiegelgalvanometer verwendet, so hatte der Widerstand der Aureole einen

geringen Einfluss. In der Tabelle sind die Resultate einer Versuchsreihe angegeben. Zwischen die positive Kohle und den Lichtbogen war ein Widerstand I = 1000 Ω geschaltet, zwischen die negative Kohle und den Lichtbogen ein gleicher Widerstand II = 1000 Ω. Zum Widerstande I war das aperiodische Spiegelgalvanometer nebst einem Vorschaltwiderstande von 10^7 Ω parallel geschaltet. Das Mittelstäbchen reichte in die Aureole. Während der Dauer des Versuches änderte sich die

I	II	*SG*
a	*a*	38·0
e	*a*	36·8
a	*e*	48·8
e	*e*	39·3
e	*a*	38·9
a	*e*	51·7
a	*a*	42·3
e	*e*	40·5
e	*a*	39·2
a	*e*	56·9
e	*e*	42·0
a	*a*	46·5

gesammte Spannungsdifferenz am Lichtbogen, welcher nicht regulirt wurde, von 45 bis 58 Volt, die Stromstärke von 4·7 bis 3·5 A. Das Mittelstäbchen brannte während der Dauer des Versuches allmälig ab. Wenn die Widerstände I, II ein- und ausgeschaltet wurden, ergaben sich am Spiegelgalvanometer die in der Tabelle angegebenen Ablesungen, welche in Volt ausgedrückt sind. Die bei dem Versuche verwendeten Kohlen waren Homogenkohlen von 8 und 13 *mm* Dicke.

Experimentelle Darstellung von Magnetfeldern

von

Joh. Zuchristian.

(Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Institut der k. k. Universität in Innsbruck.

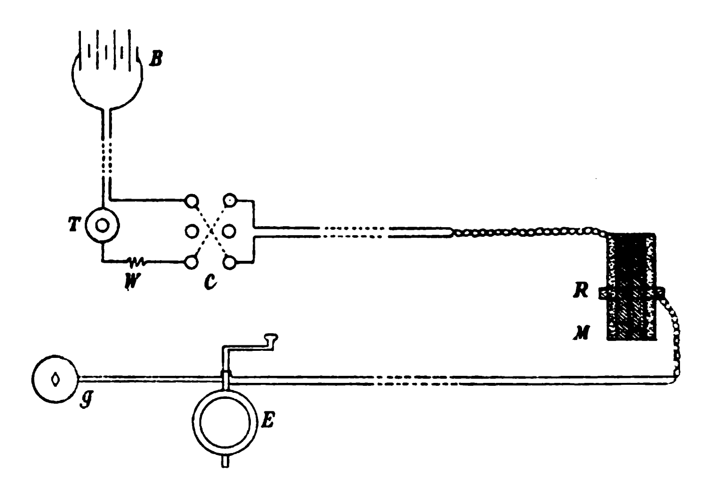
(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

Im Folgenden ist ein Verfahren angegeben, welches den Verlauf von Magnet-Kraftlinien sowohl ihrer Richtung als auch ihrer Anzahl nach rasch zu bestimmen gestattet. Durch Streuen von Eisenpulver auf ein Cartonblatt ist die Richtung der Kraftlinien, und gleichzeitig durch die Bestimmung der gewöhnlichen Inductionswirkung die Anzahl derselben gegeben. Ein eingeschalteter Erdinductor ermöglicht die Reduction auf absolutes Mass. Diese Combination längst bekannter Methoden dürfte, wie aus Folgendem ersichtlich ist, vielleicht einiges Interesse gewähren, indem die von mir gewählten Beispiele zeigen werden, dass die in vielen unserer Lehrbücher gegebenen Darstellungen der Kraftlinien in Bezug auf deren Anzahl und Dichtigkeit an bestimmten Stellen eines Magnets nicht immer der Wahrheit entsprechen und daher diese einfache Methode zur Klärung der Vorstellung über Kraftlinien oft nicht unwichtige Beiträge liefern könnte.

Bei den Versuchen, die ich hier schildern will habe ich zwei Eisencylinder verwendet, von denen jeder 14 *cm* lang war und einen Durchmesser von 3·6 *cm* hatte. Dieselben wurden mit 2 *mm* dickem Kupferdraht in drei Lagen umwickelt. Die Zahl der auf jedem Cylinder vorhandenen Windungen, welche einen mittleren Durchmesser von 4·28 *cm* besassen, war 163.

Auf diesen Cylindern verschiebbar war ein Inductionsring, der in zwei Lagen übereinander sieben Windungen eines 0·86 *mm* starken Kupferdrahtes hatte; der mittlere Durchmesser dieser Windungen war 5·8 *cm*.

Die Versuchsanordnung war nun folgende: Eine Batterie *B* von 3—4 Bunsen-Elementen schickte den primären Strom durch eine Tangenten-Bussole *T*, einen Rheostaten *W* und einen Commutator *C* in den zu untersuchenden Elektromagneten *M*, beziehungsweise in die zu untersuchende Elektromagneten-Combination; der secundäre Strom ging vom Inductionsring *R* aus durch einen Erdinductor *E* zum Spiegel-Galvanometer *g*.



Aus der Windungsfläche *F* des Erdinductors und der Verticalcomponente des Erdmagnetismus *V*, d. i. der Anzahl derjenigen Kraftlinien des magnetischen Feldes der Erde, die durch eine horizontale Fläche von 1 cm^2 hindurchgehen, einerseits und der Anzahl der Windungen des Inductionsringes anderseits erhält man die Zahl der Kraftlinien in absolutem Masse, da die Galvanometer-Constanten und der Widerstand der Inductionsleitung immer gleich bleiben.

Der Ausschlag Δ, den das Galvanometer bei einmaliger Umdrehung des Erdinductors um 180° gibt, ist proportional

$2\,VF$. Daraus ergibt sich die Anzahl der geschnittenen Kraftlinien

$$2\,VF = \varkappa . \Delta .$$

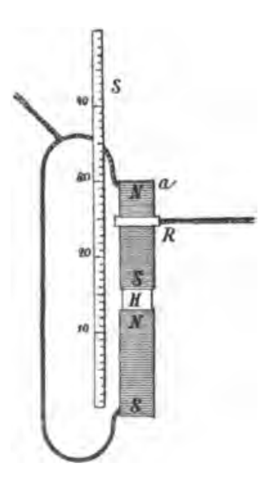
An der Stelle wo sich der Inductionsring befindet, werden nun durch Commutiren des primären Stromes die vorhandenen z Kraftlinien verschwinden und gleichzeitig die nämliche Anzahl der entgegengesetzt gerichteten entstehen, und der Ausschlag δ, den der Inductionsstrom hervorruft, entspricht daher $2z$, d. i. der doppelten Anzahl der bei Erregung des Magnetfeldes auftretenden Kraftlinien. Wir erhalten in Folge dessen, wenn n die Zahl der Windungen des Inductionsringes ist

$$z = \varkappa . \frac{\delta}{2n} .$$

Daraus ergibt sich schliesslich

$$z = \frac{VF}{n} \cdot \frac{\delta}{\Delta} .$$

Die Durchführung der Versuche ist nun sehr einfach. Der Inductionsring R wird an eine bestimmte Stelle des aufrechtstehenden Elektromagnetes M geschoben, welche man mittels eines daneben befindlichen Massstabes ablesen kann. Darauf schliesst man den Primärstrom und ertheilt ihm mit Hilfe des Rheostaten W eine gewisse Stromstärke, bestimmt den Nullpunkt des Galvanometers, commutirt den Primärstrom und erhält einen Ausschlag δ. Dabei ist noch zu bemerken, dass man bei grösseren Stromstärken das Galvanometer mit einem Shunt versehen muss, um allzu grosse Ausschläge zu vermeiden. Dann wird noch Δ bestimmt durch Umdrehen des Erdinductors.



Ich werde nun als Beispiel jenen Versuch hier ausführlicher darstellen, wo zwei Elektromagnete mit den ungleichen Polen

einander zugekehrt waren; zwischen denselben war ein Holzcylinder H von 28 *mm* Höhe.

Für V habe ich den von Liznar im Jahre 1890 für Innsbruck ermittelten Werth von 0·40381 ($cm^{-1/2}\, g^{1/2}\, sec^{-1}$) zu Grunde gelegt; das F des Erdinductors war 133017·6 cm^2 und n die Windungszahl des Inductionsringes 7.

Ich benützte somit die Formel

$$z = 7673 \frac{\delta}{\Delta}.$$

Der verwendete Primärstrom hatte vier Ampère, der Erdinductor gab bei wiederholten Messungen während des Versuches stets den Ausschlag $\Delta = 7 \cdot 65$ *cm*. Wegen der Symmetrie der Zusammenstellung habe ich bloss die obere Hälfte untersucht. Der Massstab S war so aufgestellt, dass die oberste Fläche a bei 30 stand.

In der folgenden Tabelle ist in der ersten Rubrik die Lage des Inductionsringes, in der zweiten der aus mehreren Messungen erhaltene mittlere Ausschlag δ angegeben; die dritte Rubrik enthält die wirkliche Anzahl der Kraftlinien, die vierte die in der Abbildung 948 auf einer Seite eingezeichneten.

Ind.-Ring *cm*	δ *cm*	z	N	Ind.-Ring *cm*	δ *cm*	z	N
			1				11
33	0·85	852					12
				26	9·69	9720	
32	1·32	1324					
			2	25	10·34	10372	13
31	2·00	2006					
			3	24	10·90	10933	
			4				14
30	3·53	3541		23	11·26	11295	
			5				
			6	22	11·23	11264	
29	5 45	5467					14
			7	21	11·08	11114	
			8				13
				20	10·10	10131	
28	7·20	7222	9				12
				19	9·45	9479	
			10				11
27	8·66	8686		18	8·45	8476	

Ind.-Ring *cm*	δ *cm*	z	N	Ind.-Ring *cm*	δ *cm*	z	N
			10				6
							5
17	7·15	7172	9	15	3·93	3942	
			8				
			7	14	4·04	4052	5
16	4·90	4915					

Nach der Berechnung dieser Tabelle habe ich dann in bekannter Weise, und wie aus den Abbildungen der folgenden Tafel ersichtlich ist, durch Streuen von Eisenfeile auf weissen Carton die Richtung der Kraftlinien bestimmt und für je 800 berechnete Kraftlinien auf beiden Seiten des Magnetes eine eingezeichnet, und zwar in der Weise, dass in der Entfernung 4 *cm* vom oberen N noch keine Kraftlinie den Inductionsring schneidet, in 3 *cm* Abstand auf jeder Seite eine, in ungefähr 2 *cm* Entfernung auf beiden Seiten noch eine zweite mehr u. s. w. Zur leichteren Verkleinerung des so erhaltenen Bildes wurde dann eine photographische Aufnahme gemacht, welche nun im Lichtdruck als Fig. 7 folgt.

Analog erhielt ich auch die folgenden Resultate (siehe beiliegende Tafel):

Die Figuren 1 und 2 geben die Intensitätsverhältnisse bei einem Elektromagnet für 2, beziehungsweise 4 Ampère.

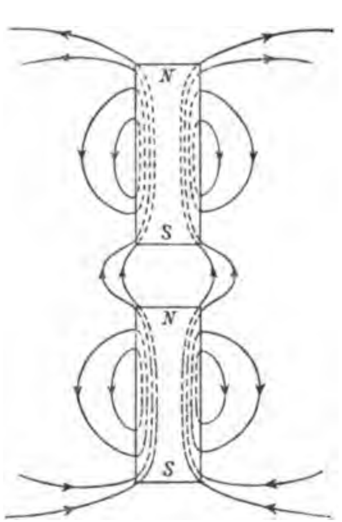
Die Figuren 3, 4 und 5 stellen zwei Elektromagnete dar, die mit den gleichen Polen einander zugewendet sind, in den Entfernungen 0·28 und 41 *mm* bei 4 Ampère Stromstärke.

Die Figuren 6, 7 und 8 zwei Elektromagnete mit den ungleichen Polen einander zugekehrt, in den Abständen 0·28 und 41 *mm* und gleichfalls 4 Ampère.

Die Figuren 9 und 10 zeigen einen Elektromagneten über einem Parallelepiped aus Eisen von den Dimensionen 5, 6 und 17 *cm* in den Entfernungen 0 und 41 *mm* (4 Ampère).

Für die Nützlichkeit solcher Messungen glaube ich die Fälle, dargestellt in den Figuren 6, 7 und 8, besonders erwähnen zu dürfen, die über den Verlauf der Kraftlinien nicht uninteressante Aufschlüsse geben. Sind die beiden Elektro-

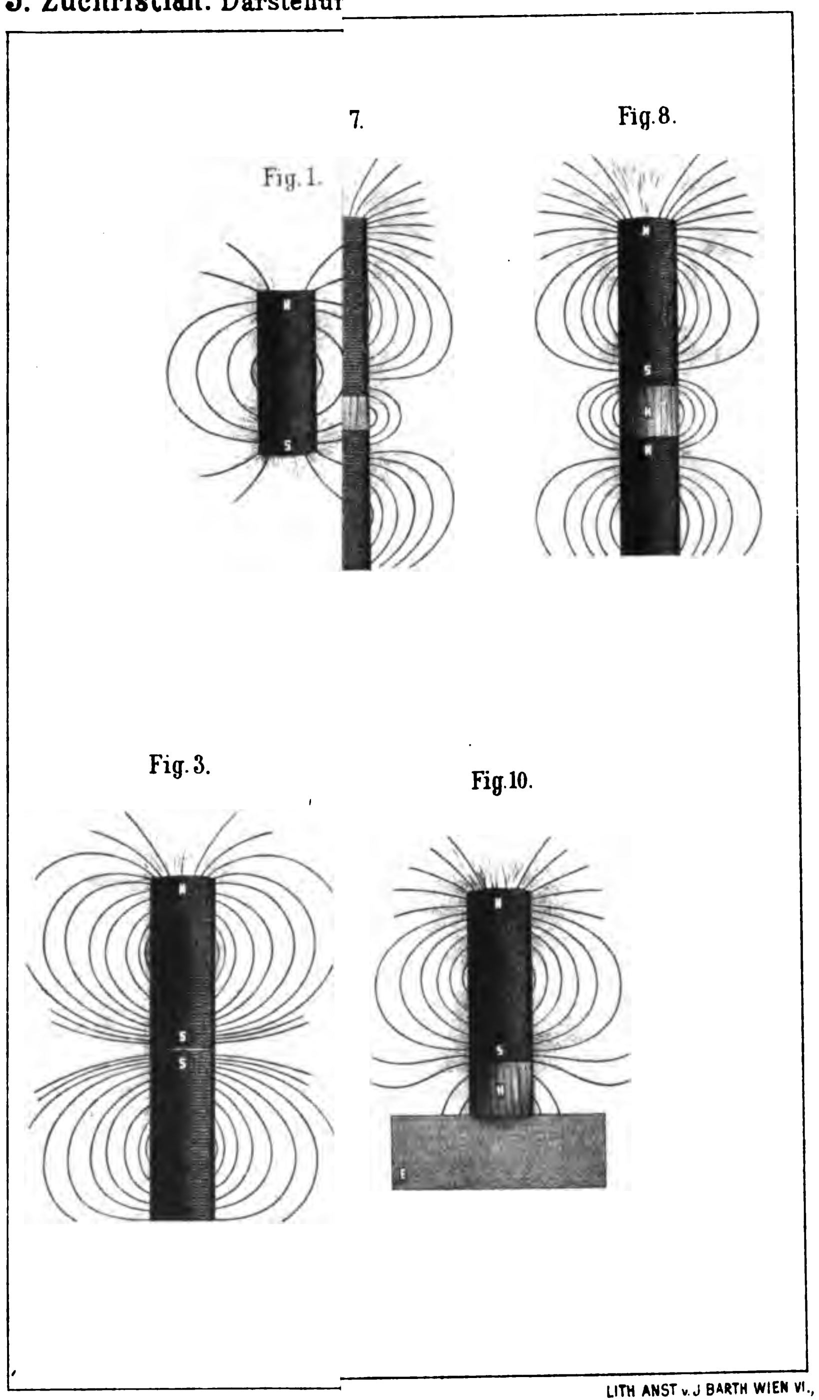
magnete zur Berührung gebracht, so verhalten sie sich nahezu wie ein einziger von doppelter Länge. Zieht man dieselben etwas auseinander, so reissen einige der inneren Kraftlinien ab. und jede derselben theilt sich in zwei für jeden der beiden Magnete in sich geschlossene Linien; der Rest dagegen ist noch beiden Magneten gemeinschaftlich. Dabei tritt eine eigenthümliche Ausbuchtung der Kraftlinien an der Unterbrechungsstelle auf, wie es nebenstehendes Schema zur Darstellung bringt. Jener Theil der Kraftlinien, welcher durch die Mitte der Magnete geht, ist weggelassen, um die Figur nicht übervoll zu machen.



Für diesen Verlauf der Kraftlinien spricht sowohl das Bild, welches das gestreute Eisenpulver gibt, als auch die Messung. Wie könnte es sonst wohl möglich sein, dass, wie in dem hier durchgeführten Beispiele, an der Trennungsstelle bloss 5×800 Kraftlinien berechnet werden können, während doch nach der Fig. 7 8×800 beiden Magneten gemeinsam sind und den Inductionsring bei ihrem Entstehen durchschneiden müssen. Es wird eben letzterer von einigen Kraftlinien zweimal geschnitten, und zwar in verschiedenen Richtungen, so dass sich ihre Wirkungen gegenseitig aufheben.

Es wäre wohl sehr wünschenswerth, wenn Zeichnungen von Kraftlinien immer in der angegebenen Weise in Bezug auf alle ihre Verhältnisse richtig wiedergegeben würden.

J. Zuchristian: Darstellur



LITH ANST v. J BARTH WIEN VI.,

Eine Studie über unipolare Induction

von

Prof. Dr. **Ernst Lecher.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 17 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1894.)

Die folgende Abhandlung sucht die Entscheidung der Frage, ob bei einem um seine Axe rotirenden, cylindrischen Magneten die Kraftlinien feststehen oder mitrotiren.

Die erste Abtheilung enthält allgemeine und historische Bemerkungen und zeigt, dass weder die bisher angestellten Versuche, noch einige neue Abänderungen derselben diese Frage entscheiden können. Dabei stellt sich heraus, dass die Biot-Savart'sche Vorstellung über die Einwirkung eines geradlinigen Leiters auf einen Magnetpol den experimentellen Thatsachen nicht immer entspricht.

Die zweite Abtheilung enthält einen gedrängten Bericht über elektrometrische Versuche, deren Schlussresultat aber nicht einwurfsfrei ist.

Die dritte Abtheilung enthält das Experimentum crucis und die Entscheidung der angeregten Frage.

I. Allgemeine Bemerkungen.

Faraday. Faraday ging bei Entdeckung jener Inductionserscheinungen, welche W. Weber[1] später unipolare Induction nannte, von der Vorstellung seiner Kraftlinien aus; die späteren Forscher aber führten die Erklärung mit Hilfe des Begriffes der

---

[1] Pogg. Ann., 52, 1841.

magnetischen Pole durch, und so entstand eine nicht immer glückliche Mischung der Anschauungen.

Als man in neuerer Zeit wieder den Begriff der Kraftlinie in Verwendung zog, wurde oft die ursprüngliche Anschauung Faraday's über die unipolare Induction unrichtig dargestellt. Faraday ist nämlich der Meinung, dass ein rotirender Magnet sein Feld nicht mitrotiren lasse, dass die Kraftlinien feststehen, während in vielen unserer besten Lehrbücher angegeben ist, dass Faraday der entgegengesetzten Ansicht gewesen sei. Faraday sagt:[1]

»Wenn von Kraftlinien gesprochen wird, insofern sie einen leitenden Kreis schneiden, so muss man sich dies durch die Fortbewegung eines Magneten bewirkt denken. Eine blosse Rotation eines Magnetstabes um seine eigene Axe bewirkt keine Induction in äusseren Kreisen, da in diesem Falle die oben angegebenen Bedingungen nicht erfüllt sind. Das den Magnet umgebende Kräftesystem braucht man sich nicht nothwendig mit dem Magneten rotiren zu denken, so wenig wie man annimmt, dass die Lichtstrahlen, welche von der Sonne ausgehen, mit dieser rotiren. Man kann sich sogar in gewissen Fällen denken, dass der Magnet zwischen seinen eigenen Kräften rotire, während er dennoch einen am Galvanometer nachweisbaren vollen elektrischen Effect hervorbringt«. In den folgenden Paragraphen begünstigt Faraday auch stets den Standpunkt, dass bei einem um seine Längenaxe rotirenden Magneten das magnetische Feld feststeht.[2]

Translatorische und rotatorische Bewegung. Der Unterschied zwischen dem Fortbewegen der Kraftlinien bei translatorisch bewegten Magneten und dem Feststehen der Kraftlinien eines rotirenden Magneten ist Faraday auffallend: »a singular independence of the magnetism and the bar in which it resides«.

Dieser befremdende Unterschied dürfte aber nur ein scheinbarer sein. Das Kraftfeld besteht in irgend einem Energie-

---

[1] Exp. Untersuchungen über Elektricität, deutsch von Kalischer, Bd. III, §. 3090.

[2] Plücker, Pogg. Ann., 87, S. 353, 1852 vertritt ähnliche Anschauungen, aber ohne Verwendung des Begriffes der Kraftlinien.

zustand des Äthers, veranlasst durch den Magneten. Es erscheint nun wohl nicht nothwendig, anzunehmen, dass jeder Magnet bei einer Bewegung seinen Äther soweit mitschleppt, als seine Kraftwirkung reicht. Wir können uns auch die Idee bilden, dass der Äther feststeht, und dass bei einer Bewegung des Magneten jene Veränderung des Äthers, deren Richtung und Grösse wir durch den Begriff der Kraftlinien symbolisiren, verschiedene Partien des Äthers ergreift. Bei einer translatorischen Bewegung des Magneten kann man nun selbstverständlich von einem Bewegen der Kraftlinien nur im figürlichen Sinne sprechen. Wenn man einen Lichtpunkt bewegt, so gehen die Lichtstrahlen des Punktes auch nur im figürlichen Sinne mit, indem ja an den Orten, wo der Lichtpunkt im Laufe seiner Bewegung hinkommt, immer wieder neue Strahlen entstehen, während die alten verschwinden.

Wenn ein symmetrischer Magnet um seine eigene Axe rotirt, so ändert sich das äussere Feld gar nicht, es ist daher a priori absolut kein zwingender Grund vorhanden, sich dieses Feld als rotirend zu denken.

Preston. Mit dieser Überlegung fällt einer der Hauptgründe von Tolwer Preston,[1] welcher wohl zuerst gegen Faraday die Ansicht ausgesprochen, dass bei einem rotirenden Magneten das magnetische Feld mitrotire; indirect (ohne Rücksicht auf die Begriffe »magnetisches Feld« oder »Kraftlinien«) hat diese Frage natürlich schon bei allen früheren Versuchen mitgespielt. Da sowohl W. Weber, als Lord Rayleigh in zwei Briefen, die Preston am Schlusse der citirten Arbeit gibt, sich vollständig auf Seite Preston's stellen,[2] so dürfte es vielleicht nicht überflüssig sein, zu zeigen, dass die Überlegungen Preston's für unsere Frage absolut keine Entscheidung treffen. Der eine Einwand Preston's ist eben wiederlegt; ein weiterer

---

[1] On some Electromagnetic Experiments of Faraday and Plücker. Phil. Mag. (5), 19, S. 131, 1885. Einen ähnlichen Schluss macht A. Föppl in der eben erschienenen Einleitung in die Maxwell'sche Theorie, Teubner 1894, S. 328.

[2] Weber schreibt: Ich habe die Arbeit mit grösstem Interesse gelesen und mich gefreut, dass die Frage über unipolare Induction dadurch endlich zur definitiven Entscheidung gelangen werde.

ist folgender: Nach Faraday muss ein Leiter, der gleich schnell mit dem Magneten rotirt, statisch geladen werden. Das erscheint nun Preston aus dem Grunde unmöglich, weil wir hier keine relative Bewegung der rotirenden Massen hätten. Dieser Schluss ist unrichtig. Nach Faraday steht ja das Feld still, die Bewegung ist relativ gegen die feststehenden Kraftlinien.[1]

Nur in einem Punkte hat Preston recht, dass es nämlich Faraday nicht gelungen sei, für seine Anschauung einen experimentellen Beweis zu erbringen. Eine Entscheidung zwischen den beiden Fragen ist überhaupt durch einfache galvanometrische Messungen an einem einzigen rotirenden Magneten nicht möglich, wie sich durch folgende Beispiele zeigen lässt.

Unmöglichkeit der galvanometrischen Entscheidung mit Einem Magneten. Es sei NS ein Magnet, den wir uns in der Mitte durch eine schmale Luftschichte unterbrochen denken wollen (wie dies auch Faraday, §. 3098 thut), die punktirten Linien stellen typisch den Gang zweier Kraftlinien dar. $abxcd$ sei die zum Galvanometer führende Leitung (Fig. 1).

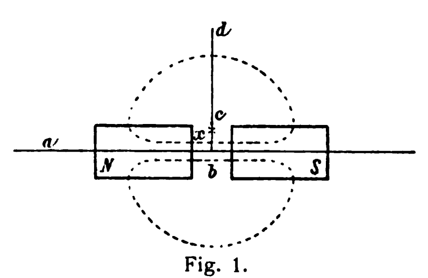


Fig. 1.

abx rotire mit dem Magneten, während xd feststehe, x sei der Schleifcontact.

Nehmen wir zuerst an, der Punkt x falle mit d zusammen, d. h. es rotire der ganze Drath bcd mit. Nach der Anschauung Preston's, die heute wohl die allgemein beliebtere sein dürfte, rotiren die Kraftlinien mit dem Magneten: wir haben also keinen Strom zu erwarten, da der Draht cd mit den Kraftlinien mitrotirt. Nach der Anschauung Faraday's aber bekommen wir zwei

[1] Ähnliche Schlüsse macht z. B. Clausius, Pogg. Ann., 156, S. 657, 1875. »Wenn man von der Vorstellung ausgeht, dass die elektrodynamische Einwirkung zweier Elektricitätstheilchen auf einander durch einen zwischen ihnen befindlichen Stoff vermittelt werde, so braucht man von ihr nicht anzunehmen, dass sie nur von der relativen Bewegung der Theilchen abhänge, sondern kann auch den absoluten Bewegungen der beiden Theilchen einen Einfluss auf sie zuschreiben.«

elektromotorische Kräfte, nämlich die Wirkung von bc, sie sei $E_i(bc)$, und von cd, sie sei $E_a(cd)$. Jede Kraftlinie, die aussen geht, muss durch den Magneten selbst geschlossen sein; wir haben daher aussen ebensoviel Kraftlinien wie innen. Das Schneiden aller Kraftlinien aussen und innen hebt sich auf, weil die Richtung der Kraftlinien durch bc die umgekehrte ist, wie durch cd. Der Effect nach Faraday ist $E_i(bc) - E_a(cd) = 0$.

Würde die Linie bd feststehen, während aber der Magnet rotirt, so kehrt sich diese Betrachtung für die beiden Theorien um. Wir erhalten keinen Strom, weil nach Faraday keine elektromotorische Kraft auftritt, oder weil, nach Preston, zwei einander gleichgerichtete elektromotorische Kräfte sich aufheben.

Rücken wir nun mit x an den in der Zeichnung fixirten Punkt, so rotirt bx mit dem Magneten, xd steht aber fest. Es gibt jetzt die Theorie Faraday's eine elektromotorische Kraft $E_i(bx)$, da ja bx, mit dem Magneten rotirend, die feststehenden Kraftlinien schneidet. Die Theorie Preston's aber liefert als elektromotorische Kraft $E_a(cd) - E_i(cx)$, da cd und cx feststehen und durch die mit dem Magneten rotirenden Kraftlinien geschnitten werden. Die beiden Werthe müssen subtrahirt werden, weil die Richtung der Kraftlinien im Innern des Magneten (xc) die entgegengesetzte Richtung haben, wie aussen (cd). Nun ist

$$E_i(bx) + E_i(xc) = E_i(bc) = E_a(cd),$$

woraus folgt, dass $E_i(bx) = E_a(cd) - E_i(cx)$.

Wir erhalten somit nach beiden Anschauungen, wo immer der Punkt x auch liegen möge, stets das gleiche galvanometrische Resultat, wiewohl die erzeugten elektromotorischen Kräfte an ganz verschiedenen Stellen ihren Sitz haben.

Ebensowenig kann man durch Zweigschaltung, durch Einschaltung von Condensatoren und ähnlichen Kunstgriffen an einem einzigen rotirenden Magneten galvanometrisch eine Entscheidung treffen. Damit sind alle Versuche pro und contra gemeint und die Ergebnisse von Plücker,[1] Edlund,[2] Exner

[1] Pogg. Ann., 87, S. 352, 1852.

[2] Ann. de chim. et de phys. (5), 16, S. 49, 1879.

und Czermak,[1] Budde,[2] Hoppe[3] u. s. w. können meines Erachtens alle nach beiden Theorien gleich befriedigend erklärt werden.

Versuche von Hoppe. Ich will dies an den Experimenten von Hoppe zeigen, da dieselben zu Gunsten einer Mitrotation der Kraftlinien gedeutet wurden. Ich habe diese Versuche in etwas veränderter Gestalt wiederholt und will die Deutung der Resultate unter consequenter Beibehaltung des Begriffes der Kraftlinien besprechen.

Hoppe arbeitet mit einer Eisenröhre, die durch eine feststehende Drahtspule magnetisirt wurde. Da aber ein grosser Theil der Kraftlinien durch den inneren Hohlraum einer solchen Eisenröhre geht,[4] änderte ich den Versuch dahin ab, dass ich mit einem möglichst massiven Magneten arbeitete.

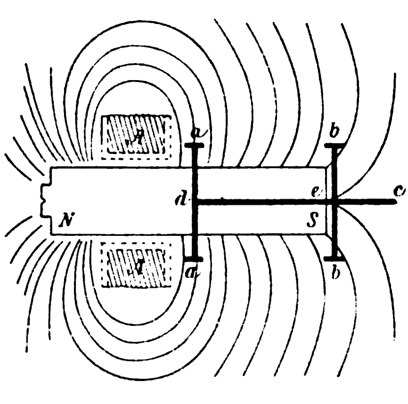


Fig. 2.

Fig. 2 stellt schematisch die Anordnung meiner Versuche in etwa $^1/_3$ natürlicher Grösse dar. NS ist ein um eine Horizontalaxe drehbarer Eisenkern, welcher, wie bei Hoppe, durch die feststehende Spule A magnetisirt wurde. Zur einen Hälfte geht in die Axe des Magneten der Kupferdraht dc, vom Magneten gut isolirt; a und b sind zwei Cylinderflächen, welche mit dc leitend verbunden, vom Magneten aber vollständig isolirt sind. a, b, cd sind fix mit dem Magneten verbunden und rotiren mit demselben pro Secunde 13·5mal. Es sind diese für die unipolare Induction dienenden und vom Magneten gut isolirten Leitungen

[1] Diese Sitzungsberichte, 94, S. 357, 1886.

[2] Wied. Ann., 30, S. 358, 1887.

[3] Wied. Ann., 28, S. 483, 1886.

[4] So verstärkt Faraday die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes dadurch, dass er eine Eisenröhre in das Innere des Solenoides (um den drehenden Körper herum) einschob. L. c. §. 2209.

in der Fig. 2 dick gezeichnet. Die Enden einer Galvanometerleitung schleifen auf *a*, *b* oder *c*. Der unipolare Ausschlag wird erzeugt durch Commutiren des magnetisirenden Stromes in der Spule *A*, um den Effect des Thermostromes zu eliminiren.

Die angegebenen Resultate sind Mittel aus je 10 Beobachtungen. Schleifen die Galvanometerdrahtenden auf *ac*, *bc*, respective *ab*, so ist der unipolare Strom 12·8, 2·5, 10·3.[1] Fig. 2 stellt auch den wirklichen Verlauf der Kraftlinien (in willkürlichem Masssystem) dar.[2] Es ist selbstverständlich, dass die Kraftlinien im Innern des Eisens wieder in sich zurückkehren müssen.

Die Übereinstimmung der Werthe der unipolaren Induction mit der Anzahl der geschnittenen Kraftlinien ist eine sehr schöne, wobei aber natürlich wieder nicht ein Unterschied zwischen der Theorie Faraday's und Preston's getroffen werden kann.

Nach Preston schneidet die feststehende Galvanometerverbindung *ab* ausserhalb des Magneten 7 rotirende Kraftlinien, *bc* aber 2 und *ac* schliesslich 9. Nach Faraday schneidet, wenn *ac* zum Galvanometer führt, das rotirende Leiterstück *ad* 9 feststehende Kraftlinien, die ja im Innern des Magneten (in der Figur nicht gezeichnet) in sich zurückkehren müssen; schleift aber die Galvanometerleitung in *b* und *c*, so schneidet *eb* 2 Kraftlinien, während bei Ableitung von *a* und *b* 2 entgegengesetzte elektromotorische Kräfte in *da* (= 9) und *eb* (= 2) in Wirkung treten. Die Verhältnisse von 9, 7, 2 entsprechen aber innerhalb der Versuchsgrenzen den Verhältnissen der gefundenen Galvanometerausschläge 12·8, 10·3, 2·5.

---

[1] Um die Arbeit nicht zu umfangreich zu machen, gebe ich hier und später immer nur die Mittel, wie ich auch aus dem gleichen Grunde meine Zeichnungen nur schematisch mache.

[2] Diese Zeichnung wurde dadurch gewonnen, dass eine mit einem Galvanometer verbundene Drahtschleife an bestimmten Stellen des Feldes sich befand und durch Commutiren des magnetisirenden Stromes Inductionswirkung gemessen wurde. Hat man vorher mittelst Eisenfeile die Richtung der Kraftlinien fixirt, so genügen einige solche Messungen, um quantitativ die Zahl der Kraftlinien an einzelnen Stellen des Feldes zu bestimmen. Siehe darüber Näheres in der gleichzeitig (in diesen Sitzungsberichten) erscheinenden Arbeit von J. Zuchristian, der einige solche Bestimmungen im absoluten Masse ausgeführt hat.

Es wurde schliesslich, um auch in diesem Punkte die Versuchsanlage Hoppe's zu imitiren, *a* und *b* durch eine aufgelöthete Kupferlamelle leitend verbunden. Die Resultate waren, wie es nach beiden Theorien zu erwarten war, mit den vorausgehenden identisch, nämlich es gaben die Schleifcontacte *ac* 12·7, *bc* 2·4, *ab* 10·9.

Auf die elektrometrischen Versuche Hoppe's einzugehen, erscheint mir überflüssig, da ihre Auslegung nichts für unseren Fall Entscheidendes bringen würde.[1]

Rotationsversuch von J. Weber. Ebensowenig lässt sich eine Entscheidung treffen durch Einleitung von Rotationen durch einen Strom. Auch hier sind eine Reihe von Trugschlüssen in der Literatur anzutreffen, von denen ich wieder als typisches Beispiel einen herausgreifen will, den von J. Weber.[2]

NS ist der Magnet, der an seinem Äquator die Quecksilberrinne *g* trägt. Der bewegende Strom geht durch das Quecksilbernäpfchen *h* in den Magneten zum Quecksilbernäpfchen *a*, durch den Bügel *abc* zur Quecksilberrinne *g*, welche vom Magneten isolirt ist und durch den feststehenden Draht *ed* zurück. Wird der Magnet festgehalten (Versuch 1), so rotirt der Bügel *abc*, weil er (nach beiden Theorien) einen Druck gegen die Kraftlinien, wovon eine punktirt gezeichnet ist, erfährt. Wird jetzt der Magnet mit dem Bügel mechanisch verbunden und an einem Faden aufgehängt (Versuch 2), so dass beide rotiren können, so rotirt Magnet und Bügel. Nach der Theorie Fara-

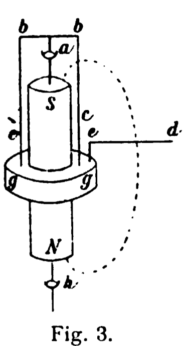


Fig. 3.

[1] Wied. Ann., 29, S. 544, 1866; 32, S. 297, 1887. Nicht unerwähnt möchte ich lassen, dass meine Vorstellung über Verwendung des Elektrometers bei Messungen an ungeschlossenen Leitungen von denen Hoppe's stark abweicht. Er sagt in der letzteren Arbeit z. B. S. 298: »Für die $2^1/_2$ *m* lange feste Leitung bis zum Elektrometer tritt wegen des höheren Widerstandes eine erhebliche Einbusse auf«; S. 304: »Da der Draht sehr lang, wird eine Verzögerung in der Ladung eintreten«. Oder, Hoppe will durch eine Kugel von 15 *mm* Durchmesser, die isolirt aufgehängt, zuerst mit dem rotirenden Magneten und dann mit einem Elektrometer von Edelmann in Berührung gebracht wird, die eventuellen minimalen Ladungen des Magneten nachweisen u. s. w.

[2] Zeitschr. für Elektrotechnik, Kareis, Wien, VII, S. 445, 1889.

day's muss man jetzt sagen, da das Feld ja stillsteht, dass der rotirende Bügel den Magnet mitnimmt, nach der entgegengesetzten Anschauung aber, und das hat J. Weber übersehen, ist die bewegende Kraft in *ed*, dorten wird die Kraftlinie weggedrückt, und mit der rotirenden Kraftlinie muss der Magnet mitrotiren, da Kraftlinie und Magnet fix verbunden sind. Hätte aber Weber in Versuch 2 Magnet und Bügel, jeden für sich rotirbar gemacht, so müsste der Magnet nach beiden Theorien ruhig bleiben. Nach Faraday ist das unmittelbar ersichtlich. Nach Preston drücken aber *bc* und *ed* in entgegengesetzter Richtung auf die mit dem Magneten fest verbundenen Kraftlinien, und die Wirkung hebt sich auf, da, wie S. 961 gezeigt werden wird, ein rotirendes *bc* denselben Druck ausübt wie ruhendes *bc*.

Wirkung eines geraden Stromes auf einen sogenannten Pol. Auch mit nebenstehendem Apparat, der so oft zur Entscheidung in verschiedenen Modificationen herbeigezogen wurde, kommt man nicht weiter.[1] Ich erwähne diesen, in den meisten Lehrbüchern beschriebenen Versuch, weil fast immer eine, wenn auch naheliegende, so doch falsche Deutung desselben gegeben wird. Die Kraftlinie wird oft definirt als die Richtung, in der sich ein Nordpol bewegt. Die Ursache der Rotation in diesem Versuche soll darin bestehen, dass die Magnetpole *N* durch den stromdurchflossenen Leiter *ab* um diesen herumgedreht werden. Diese Biot-Savart'sche Vorstellungsweise

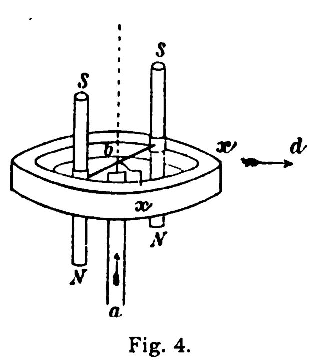


Fig. 4.

[1] Die diesbezügliche Arbeit von Plücker, Pogg. Ann., 87, S. 352, 1852, geht zwar, aber leider ohne Verwendung des Begriffes »Kraftlinien«, von jenen Anschauungen aus, welche ich die Faraday'schen nannte. Plücker gibt jedoch keinen Beweis für diese Prämisse, er stellt sie als selbstverständlich hin. Siehe z. B. S. 354, Abschnitt 4: »Wenn hiebei auch die Nachweisung dieser elektrischen Vertheilung am Elektrometer durch mich nicht versucht worden ist, so ist dieses doch in analogen Fällen, wie z. B. beim Arago'schen Rotations-Magnetismus geschehen und daher als unzweifelhaft anzusehen«. Dieser Arago'sche Rotations-Magnetismus ist aber doch ganz etwas anderes.

scheint mir aber ebenso unphysikalisch wie die Vorstellung eines einzigen Poles, der für sich allein nie existiren kann oder die Vorstellung eines isolirten Stromelementes. Ferner muss auch die Ampère'sche Regel herhalten; die in *ab* gedachte bekannte Figur weist dem Nordpol den Weg nach links. Um die Unrichtigkeit dieser Anschauung zu zeigen, braucht man nur *bx* sehr gross zu machen. Diesem Versuche gab ich, da dann die Reibung der grossen Quecksilberrinne zu bedeutend würde, folgende Form:

ab ist derselbe Leiter wie früher. Der Strom geht dann durch das Quecksilbernäpfchen *b* nach *x*, wo er sich theilt, durch den Rahmen *xdef* und schliesslich durch den Draht *fi* in die Quecksilberrinne *g*. Dieser ganze Rahmen hängt an einem Seidenfaden *ih* und ist daher sehr leicht beweglich. Die Zeichnung ist der Deutlichkeit halber nicht in den richtigen Dimensionen gezeichnet. Die Magnete sind zu gross und zu weit aus einander gezeichnet; sie sind in Wirklichkeit quadratische Stäbe von 12·5 *cm* Länge, die beiden Mittelpunkte *N* stehen nur 2·3 *cm* von einander. Der Rahmen war sehr gross, *xd* war 30 *cm* und *dc* war 28 *cm*. *g* hingegen war wieder möglichst klein.

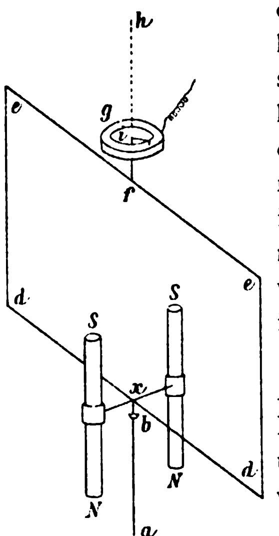


Fig. 5.

Trotz Anwendung starker Ströme von circa 15 Ampère konnte keine Spur einer drehenden Kraft entdeckt werden. Das Resultat war vielmehr, dass der Leiter *ab* die beiden Nordpole *N* nicht längs seiner kreisförmigen Kraftlinien dreht und dass auch die Ampère'sche Regel sich hier nicht in der einfachen, oft beliebten Form anwenden lässt. *xd* ist natürlich nach Biot-Savart ohne Einfluss, da ja um die Drehungsaxe *xd* keine Rotation möglich ist, da auch in den symmetrischen Theilen des Rahmens der Strom in entgegengesetzter Richtung fliesst und da überdies die beiden Pole *S* und *N* gleich weit entfernt sind: drei Gründe, von denen jeder einzelne allein schon

genügen würde. Ähnliche Gründe und in erster Linie die grosse Entfernung schliessen einen Einfluss von *de* und *ef* aus.

Der Sitz der bewegenden Kraft in dem Versuche Fig. 4 liegt im feststehenden Leiter *xd*. Dies zeigt folgender Versuch.

Die beiden Magnete (Fig. 6) hängen mittelst des Drahtbügels *r* an einem Seidenfadcn, währenddem der Strom *abd* fixirt ist, dann dreht sich das Magnetsystem bis zum Anstoss, weil die Fläche *abd* einen anziehenden Magneten vorstellt.

Umgekehrt habe ich bei dem Versuche Fig. 5 die mechanische Befestigung der Magneten von dem Rahmen *xdef* weggegeben. Die Magnete sind an derselben Stelle wie in Fig. 5,

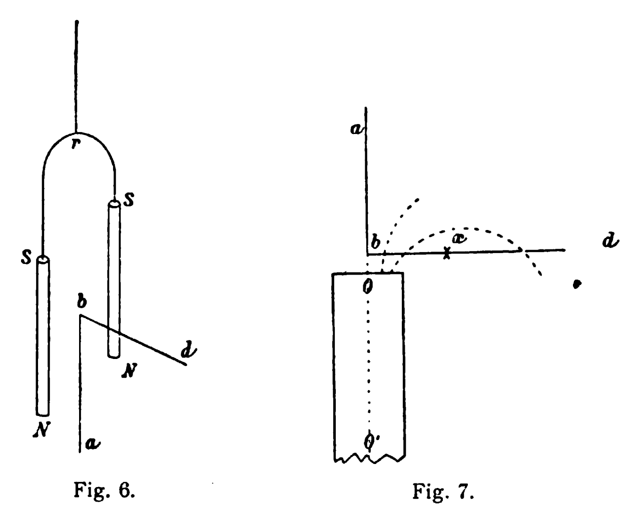


Fig. 6. Fig. 7.

aber an einem Stativ befestigt, der dieselben verbindende Draht fehlt. *ab* und der Rahmen *xdef* waren unverändert. Dann dreht sich dieser Rahmen gleichfalls bis zum Anstoss; wir haben jetzt die reactio der in Fig. 6 geschilderten actio.

Es ist die Versuchsanordnung Fig. 4, welche von Plücker, Edlund u. A. mit Vorliebe für die Erklärung der unipolaren Induction herbeigezogen wurde, zu diesem Zwecke sehr ungeeignet. Es hat aber Beer[1] diesem Versuche eine übersichtlichere Form gegeben, die (in etwas veränderter Weise) durch obenstehende Fig. 7 angedeutet ist. Es sei OO' ein sehr grosser

[1] Pogg. Ann., 94, S. 178, 1855.

Magnet, dessen unterer Pol in unendlicher Entfernung sich befindet. *abx* rotirt mit dem Magneten, *xd* steht fest. Ob wir nun für OO' einen Vollmagneten oder einen um die Axe symmetrischen Hohlmagneten nehmen, so wird bei Einleiten eines Stromes durch *abxd* immer *abx* und der mit demselben fest verbundene Magnet rotiren, nach Faraday, weil die feststehenden Kraftlinien auf *bx* drücken, nach Preston, weil das feststehende *xd* auf die mit dem Magneten fest verbundenen Kraftlinien drückt. Wir haben hier eine Umkehrung der Betrachtungen von S. 952. In gleicher Weise hat auch Beer gezeigt, dass sowohl die Laplace'sche Ansicht, welche zur Plücker'schen Anschauung, von mir als die Faraday's bezeichnet, führt, als auch die Ampère'schen Ideen, welche zur Neumann'schen Theorie, respective mit Berücksichtigung des Begriffes Kraftlinien zur Vorstellung Preston's führen, in gleicher Weise diesen Versuch erklären.

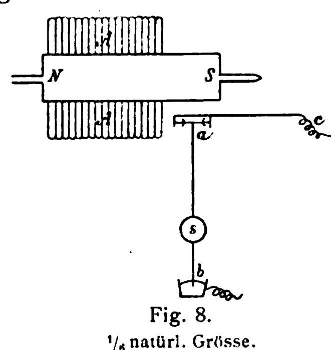


Fig. 8.
$^1/_8$ natürl. Grösse.

Ponderomotorische Wirkung eines rotirenden Magneten. Im weiteren Verfolge dieser Ideen machte ich zwei neue Versuche, die vielleicht von einigem Interesse sein dürften. *NS* (Fig. 7) ist ein horizontal liegender Elektromagnet, *AA* die magnetisirende Spule, welche gleichzeitig mit dem Magneten um eine horizontale Axe gedreht werden kann, die Stromzuführung geschieht durch nicht gezeichnete Schleifcontacte; *ab* ist ein kleines, 24 *cm* langes Pendelchen (in der Figur zu kurz gezeichnet), das in keinerlei mechanischer Verbindung mit dem Magneten steht. Das untere Ende des Pendelchen *b* taucht in Quecksilber und ein starker Hilfsstrom kann durch *cab* hindurchgeleitet werden. Geschieht dies, während der Elektromagnet magnetisch ist, so wird das Pendelchen aus der Ruhelage herausgedrückt und die Ablenkung kann mittelst des kleinen Spiegelchens *s* bestimmt werden. Diese Ablenkung war nun gleich gross, ob der Magnet in Ruhe war, oder etwa 80mal in der Secunde gedreht wurde. Durch Commutiren des magne-

tisirenden Stromes oder des Stromes im Pendelchen oder durch Änderung der Rotationsrichtung wurde dieser Versuch in mannigfacher Weise variirt, das Resultat blieb aber immer das gleiche.

Nach Faraday ist das selbstverständlich, denn die Kraftlinien stehen trotz der Rotation fest, das Feld bleibt physikalisch ganz unverändert. Nehmen wir aber an, dass die Kraftlinien mit dem Magneten rotiren, so haben wir schon eine gewisse Einschränkung, wonach der Druck eines stromdurchflossenen Leiters gegen magnetische Kraftlinien von einer Eigenbewegung dieser Kraftlinien ganz unabhängig ist.

Diese Differenz beider Anschauungen tritt vielleicht in folgendem Versuche noch klarer zu Tage. Es handelt sich um Beantwortung der Frage, ob das bekannte Faraday'sche Pendel,[1] das, wenn es stromführend ist, um einen Magneten herumrotirt, in seiner Rotationsgeschwindigkeit sich ändere, wenn man den Magneten selbst mechanisch in derselben Richtung oder in entgegengesetzter dreht. Aus technischen Gründen wurde dieser Versuch in folgender Form, gleichsam auf den Kopf gestellt, ausgeführt.

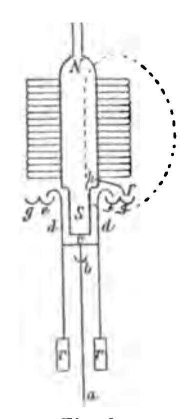


Fig. 9.
1/6 natürl. Grösse.

NS (Fig. 9) ist der Eisenkern mit der Spule; er steckt in einer verkehrt aufgestellten Centrifugalmaschine nach abwärts; der magnetisirende Strom wird durch Schleifcontacte zugeleitet, damit auch hier die magnetisirende Spule mitrotire. *ab* ist ein Metallständer mit einem Quecksilbernäpfchen *b*; *eg* sind zwei feststehende, concentrische, kreisförmige Quecksilberrinnen, die miteinander (durch Überbrückung von zahlreichen Eisendrähtchen) in leitender Verbindung stehen; der Draht *fh* ist fest mit dem Magneten verbunden und rotirt mit demselben; *r* sind Gegengewichte, damit das Drahtsystem *cde* auf der Spitze *c* stabil stehe. Der Strom, der durch das Faraday'sche Pendelchen *cde*

---

[1] Siehe z. B. Pfaundler, Lehrbuch der Physik, III, S. 702—704, 1888 bis 1890 oder Wüllner, Lehrbuch der Physik, IV, S. 895, 1886.

geht, nimmt im Ganzen den Verlauf durch den Leiter *ab*, der fix ist, weiter durch *cde*, welcher durch elektromagnetische Einwirkung rotiren kann; der Strom geht dann aus der feststehenden Quecksilberrinne *e* in die feststehende Nachbarrinne *g*; in diese taucht der mit dem Magneten verbundene Draht *fh*, durch welchen der Strom in den Magneten eintritt, um durch einen (nicht gezeichneten) Schleifcontact bei *N* wieder zur Batterie zurückzukehren.

Steht der Elektromagnet fest, so rotirt das Drahtsystem *cde*, ich kann aber auch den wirkenden Elektromagneten mechanisch in Rotation versetzen. Weil gleichzeitig mit dem Magneten *fh* rotirt, muss *fh* in eine zweite Quecksilberrinne tauchen, um nicht durch Reibung die Rotation des eigentlichen Pendelchens zu beeinflussen. Stand der Elektromagnet ruhig, so fanden etwa 60 Umdrehungen des Pendelchens in 30 Sekunden statt; genau dieselben Zahlenverhältnisse wurden aber auch gefunden, wenn man den Elektromagneten mit beliebigen Geschwindigkeiten in gleicher oder entgegengesetzter Richtung rotirte.

Steht der Magnet ruhig, so geben beide Theorien das gleiche Resultat. Sowie durch den Leiter im Felde Strom fliesst, wird derselbe gegen die Kraftlinien gedrückt und rotirt immer rascher, bis seiner weiteren Beschleunigung durch die Reibung und Inductionsströme ein Ziel gesetzt wird. Die Energie dieser Rotation entsteht nach beiden Theorien durch den elektrischen Strom, der die durch die Rotation entstehende elektromotorische Gegenkraft überwinden muss.

Lassen wir nun durch mechanische Kraft den Magneten ebenso rasch rotiren, als es der Leiter unter dem Einflusse des Stromes thut, so verlangen wieder beide Theorien dasselbe, dass nämlich jetzt die Energie der Pendelrotation nicht mehr durch den Strom, sondern durch die mechanische Energie der Rotation des Magneten geliefert werde. Nur aus verschiedenen Gründen. — Nach Faraday stehen auch jetzt die Kraftlinien fest. Es entstehen sowohl einerseits in *cde*, als auch anderseits in der Strombahn im Magneten *hN* elektromotorische Gegenkräfte, die sich aber gegenseitig aufheben. (Das wird aus der Betrachtung der einen, in der Figur punktirt gezeichneten Kraft-

linie unmittelbar ersichtlich. *hf* kann nach Belieben klein gemacht werden, es ist daher seine Wirkung zu vernachlässigen.) Nach Preston bewegen sich Kraftlinien und Leiter gleich schnell, es findet also auch hier keine Schwächung des ursprünglichen Stromes statt, somit kommt die Rotationsenergie des Pendelchens von der Rotationsenergie des Magneten.

Nach Maxwell sucht ein vom Strome durchflossener Leiter im magnetischen Felde jene Lage einzunehmen, bei welcher er die möglichst grösste Anzahl von Kraftlinien umschliesst. Das gilt aber in unserem Falle nicht, weil hier der Magnet sich bewegt.[1]

Somit liefert dieser Versuch auch keine Entscheidung.

Unipolare Induction in einem Eisenrahmen. Folgender Versuch wäre vom Standpunkte der Theorie Faraday's sehr leicht zu erklären, während er nach der Preston's eine eigenthümliche Schwierigkeit bietet. Diese Schwierigkeit tritt aber auch bei Beibehaltung der Idee Faraday's, wiewohl an anderer Stelle (siehe S. 979) auf.

Es wurde die Änderung der unipolaren Induction eines Magneten untersucht, wenn man die magnetischen Kraftlinien durch feststehende massive Eisenmassen gehen liess; der Magnet rotirte in einem Eisenrahmen oder aber ausserhalb desselben.

In nachstehender Fig. 10 sehen wir in *a* den verticalen Längsdurchschnitt, der die magnetische Axe enthält, in *b* eine perspectivische Ansicht des Eisenrahmens ohne Magneten und endlich in *c* einen auf die magnetische Axe senkrechten Verticalschnitt durch die Äquatorebene des Magneten. Es sei *NS* der Elektromagnet, der durch die Axenverlängerungen *e* und *i* in rasche Rotationen versetzt werden kann. Die Axe *ei*

[1] Ein analoger Fall auf mechanischem Gebiete wäre folgender: Es sei eine feststehende Kugel *a*, welche eine Kugel *b* mit der Newton'schen Gravitation anzieht. Die Kugel *b* fällt, indem sie von Orten minderen Potentiales zu solchen höheren Potentiales fortschreitet. Bewege ich aber die anziehende Kugel *a* mit einer Geschwindigkeit, welche ebenso gross ist und gleich gerichtet wie die von *b*, so ändert sich die Entfernung der beiden Kugeln nicht, die Kugel *b* bleibt stets auf Orten gleichen Potentiales und die Bewegungsenergie des gesammten Systemes rührt her von jener Energie, welche von aussen her in die Kugel *a* hineingesteckt wird.

geht ohne Berührung durch die Löcher des Rahmens und die Dimensionen des Magneten sind so gewählt, dass der Rahmen (Fig. 10 *a*) sowohl von oben und unten, als auch von rechts und links möglichst dicht an den Magneten heranreicht. Die

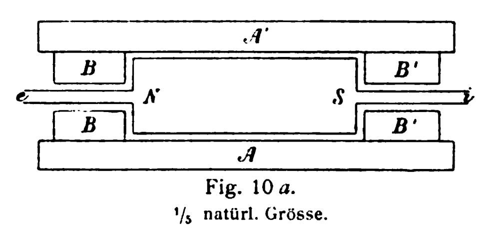


Fig. 10 *a*.
1/5 natürl. Grösse.

(nicht gezeichneten) Windungen des Elektromagneten rotiren mit demselben; der magnetisirende Strom wurde mittelst zweier

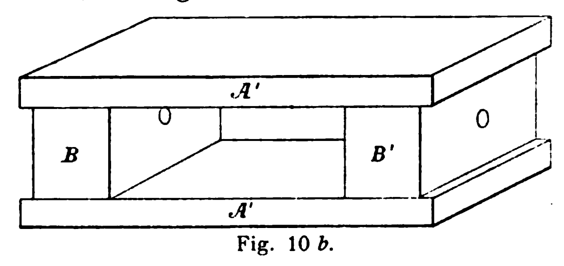


Fig. 10 *b*.

Schleifcontacte zugeführt und war auf das Sorgfältigste vom Magneten isolirt. Der Eisenrahmen, welchen man um diesen Magneten herumbauen konnte, bestand aus zwei Eisenplatten

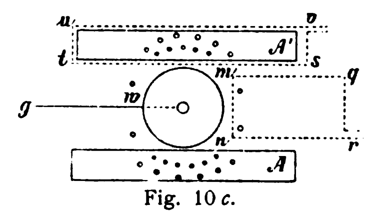


Fig. 10 *c*.

A und *A'* und aus zwei durchbohrten Eisenparallelepipeden *B* und *B'*.

Bevor ein Versuch über unipolare Induction gemacht wurde, untersuchte ich zuerst das Feld durch gewöhnliche Induction. Eine einfache, mit einem Galvanometer verbundene Drahtschlinge umgibt den Äquator des Magneten und man erhält, nach Anbringung aller Correctionen beim Commutiren des magnetisirenden Stromes einen Ausschlag von 2·21 ohne

Eisenrahmen und 7·37 mit Eisenrahmen, es ist somit die Gesammtanzahl aller Kraftlinien in Folge der Anwesenheit des Eisens 3·34 mal so gross geworden. Die Mehrzahl der Kraftlinien wird aber im zweiten Falle durch das Eisen hindurchgehen. Um das zu constatiren, wurde eine zweite rechteckige Schlinge *stuv* um die Eisenplatte *A* gelegt (siehe Fig. 10*c*). Die Induction in diesem Rechtecke war 3·01, somit gehen von 7·37 Kraftlinien 2×3·01 oder 6·02 durchs Eisen. Ich füge noch hinzu, dass eine Rotation des Magneten während dieser Messung keinen Einfluss hatte, es gingen also die Kraftlinien vom rotirenden Magneten gerade so weg, wie vom ruhenden.

Des Späteren wegen erwähne ich noch folgende Inductionsmessung. Eine rechteckige Spule *qmnr* (Fig. 10 *c*) ist in dem Luftraume des Eisenrahmens in der Äquatorebene eingeschoben. Beim Commutiren des magnetisirenden Stromes erhält man ohne Eisenrahmen 0·99 und mit Eisenrahmen 0·21, d. h. es wurde das Feld an der Stelle des Äquators durch Anbringung des Eisenrahmens 4·75 mal so schwach. Diese Zahl kann mit den vorigen nicht unmittelbar verglichen werden, weil diese Spule aus mehreren Windungen bestand und auch keine für die spätere Überlegung überflüssige Messungen der Dimensionen dieser Spule ausgeführt wurden.

Jetzt erst wurde zur Bestimmung der unipolaren Induction geschritten. Ein Schleifcontact *wg* (Fig. 10 *c*) und die Axe *e* (Fig. 10 *a*) führen zum Galvanometer; die unipolare Induction beträgt 12·6 im Eisenrahmen und 3·6 ohne Eisenrahmen. Es ist somit die unipolare Induction durch Anwendung des Eisens 3·5 mal vergrössert worden. Nach Faraday's Theorie ist die Erklärung sehr einfach. Alle Kraftlinien gehen durch das Innere des Magneten. Der Sitz der elektromotorischen Kraft liegt in *ow* (Fig. 10 *c*), wo durch den rotirenden Magneten die im Innern des Magneten liegenden feststehenden Kraftlinien geschnitten werden. Alles was aussen im magnetischen Felde die Anzahl der Kraftlinien ändert, muss auch die Anzahl der Kraftlinien innerhalb des Magneten und daher auch den Betrag der unipolaren Induction um gleich viel verändern. Durch den Eisenrahmen erhielten wir eine 3·34 fache Vermehrung der

Kraftlinien und eine 3·5fache Vergrösserung der unipolaren Induction. Diese beiden Zahlen sind mit Rücksicht auf die Fehlerquellen an den Schleifcontacten u. dgl. als gleich anzusehen.

Viel complicirter wird die Erklärung, wenn wir uns auf die Anschauungsweise stellen, dass die Kraftlinien mitrotiren. Der Sitz der elektromotorischen Kraft ist dann im feststehenden Draht *gw* zu suchen (Fig. 10*c*). Wir haben aber früher gesehen, dass durch Anbringung des Eisenrahmens die Anzahl der Kraftlinien an der Stelle *gw* auf den etwa fünften Theil $\left(\frac{0\cdot 99}{0\cdot 21}\right)$ verkleinert wird und trotzdem ist die unipolare Induction an dieser Stelle 2·5mal so gross. Es stellen in Fig. 10 *c* die Punkte den Äquatorialdurchschnitt der Kraftlinien dar, von je 7·37 gehen nach den früheren Messungen 6·02 durch das Eisen, nur 20% gehen durch den Luftraum. Gleichwohl müssen bei einer Umdrehung alle Kraftlinien die Strecke *gw* passiren, da ja die unipolare Induction in *gw* ihrer Grösse nach dem Schneiden aller Kraftlinien entspricht. Daraus folgt, dass die Kraftlinien mit sehr grosser Geschwindigkeit rotiren; sie werden im oberen *A* längere Zeit verweilen und dann plötzlich mit einer Geschwindigkeit, die viel grösser ist, als die Rotationsgeschwindigkeit des Magneten, in das untere *A* hinunterspringen, um die versäumte Rotation nachzuholen. Nur so glaube ich vom Standpunkte Preston's aus meine Resultate erklären zu können.

Diese Rotationsversuche im Eisenrahmen lassen sich nach Faraday viel ungezwungener erklären; es wäre aber voreilig, dies zu Gunsten dieser Theorie deuten zu wollen, da wir eben dasselbe »Springen der Kraftlinien« bei Erklärung einer anderen Thatsache (S. 979) vom Standpunkte Faraday's nicht werden entbehren können.

Eine ähnliche Schwierigkeit wird auch von Ermacora[1] angegeben. Er kommt zur Ansicht, dass in solchen eisen-

[1] Ermacora, Ein fundamentaler Punkt der elektrodynamischen und Inductionstheorie und die wahrscheinliche Existenz eines vierten elektrischen Feldes. (Rend. della Soc. Ital. di Elettricità pel progresso degli studi e delle applic. I. Mai 1891. Übersetzt in Zeitschr. für Elektrotechnik, Kareis, Wien, IX. S. 424, 1891.)

geschirmten Räumen die durch Schwingungen einer Magnetnadel und dergl. bestimmte Feldstärke für die durch das Schneiden derselben Kraftlinien hervorgebrachte Induction nicht massgebend sei. Ich werde auf diesen interessanten Fall am Schlusse der Arbeit noch einmal kurz zurückkommen.

II. Elektrometrische Versuche.

Die bis jetzt geschilderten Überlegungen haben keine Entscheidung geliefert. Nach der Ansicht Faraday's muss ein unipolar gedrehter Magnet elektrische Spannungen aufweisen, und es liegt daher die Idee nahe, diese Spannungen elektrometrisch nachzuweisen, wie dies wohl zuerst Beer verlangt hat.[1] Wiewohl ich auf diese Weise durchaus keine einwurfsfreien Resultate erhielt, möchte ich mir doch erlauben, einige Worte über meine diesbezüglichen, oft sehr complicirten Versuche zu sagen.

Die Schwierigkeit bei allen derlei Versuchen liegt natürlich darin, dass man an dem rotirenden Magneten keine Erdleitung anbringen kann und daher zu Tropfelektroden und ähnlichen Hilfsmitteln greifen muss.

Potentialverschiebung in einem ruhenden Leiter. Am einfachsten erschiene es, die eventuelle Ladung oder Nichtladung eines dem rotirenden Magneten benachbarten feststehenden Leiters zu constatiren. Es sei NS (Fig. 11) ein um eine verticale Axe rotirender Magnet, der in der Axenrichtung SO zur Erde abgeleitet sei, ab sei ein Leiter, der nach der Theorie Preston's Spannungsdifferenzen zwischen a und b aufweisen muss. Der obere Theil des Leiters sei durch E zum Elektrometer abgeleitet. Wegen der grossen Capacität des Elektrometers würde der ganze Potentialanstieg an dem Punkte b sitzen. Wir können nun aber durch einen Draht, der vom Punkte b zur Erde führt, keine Ableitung vornehmen, da ja dieser Draht durch dieselben Kraftlinien wie Eb, aber im entgegengesetzten Sinne

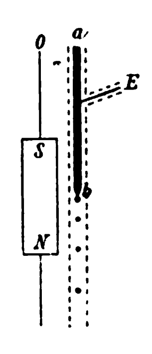


Fig. 11.

---

[1] Pogg. Ann. 94, S. 192, 1855.

geschnitten würde. Es liegt nun die Idee nahe, in *b* eine Tropfelektrode anzubringen. Die Potentialdifferenzen, mit welchen ich im günstigsten Falle arbeiten konnte, waren $^1/_{100}$ Volt; es wäre daher nothwendig, um die Elektrisirung der Tropfelektrode durch Reibung der Luft, und um die Influencirung der Tropfelektrode, welche nach der Faraday'schen Theorie vom rotirenden Magneten ausströmen würde, zu vermeiden, die Tropfelektrode mit einer zur Erde abgeleiteten Röhre (in der Figur punktirt gezeichnet) zu umgeben. Diese Röhre unterliegt aber nach der Theorie Preston's gleichfalls durch das Schneiden der rotirenden Kraftlinien einer magnetischen Induction, die Tropfelektrode tropft von allem Anfange an in einem Gehäuse, welches genau jenes Potentiale im Innern erzeugt, das die Tropfelektrode von allem Anfange an gehabt hat. Eine Ableitung findet daher nicht statt. Ich weiss nicht, durch welche Art von Kunstgriffen man dieses Hinderniss umgehen könnte.

Potentialverschiebung im rotirenden Magneten. Ich habe in Folge dessen die Spannung des rotirenden Magneten selbst nachzuweisen versucht, wobei ich zunächst die Idee verfolgte, die Tropfelektroden mitrotiren zu lassen. Ein grosser, isolirter Elektromagnet rotirte um eine horizontale Axe, ein Draht führte in der Richtung der Axe zum Elektrometer. Nach der anderen Richtung war die Axe hohl und stand mit einem isolirten Wasserreservoir in Verbindung, der Wasserkanal ging bis in die Mitte des Magneten und bog dort senkrecht gegen den Äquator des Magneten ab, wo das Wasser bei einer raschen Rotation des Magneten in Form eines feinen Sprühregens herausgeschleudert wurde. Der ganze Magnet befand sich in einem Metallkasten von 1·5 *m* im Gevierte, der zur Erde abgeleitet war. Ich dachte so eine Ableitung jener Elektricitäten, die am Äquator sich anhäuften, bewerkstelligen zu können. Bei raschen Rotationen war aber die Reibung des ausströmenden Wassers viel zu gross, der Magnet wurde so stark negativ elektrisch, dass das Elektrometer weit über die Scala hinausging.

Ich liess nun an derselben Axe zwei in der eben geschilderten Art construirte Magnete rotiren, der magnetisirende

Strom wurde aber in beiden Magneten nach entgegengesetzter Richtung herumgeführt. Die Axe des einen Magneten war mit dem einen Quadrantenpaar, die Axe des zweiten Magneten mit dem zweiten Quadrantenpaar des Elektrometers verbunden. Ich hatte so gehofft, dass die Elektrisirung durch die Reibung des ausspritzenden Wassers sich compensiren würde, während durch die Anwendung der zwei Magnete die Wirkung der unipolaren Induction beim Commutiren sich verdoppeln würde. Das Elektrometer blieb zwar innerhalb des Gesichtsfeldes, war aber so unruhig, dass die grosse Mühe, die ich mir mit diesem Versuche gegeben, leider resultatlos blieb. Gleichwohl glaube

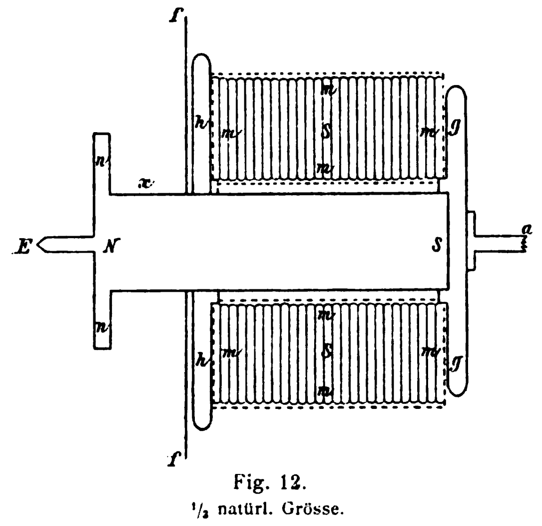


Fig. 12.
$^1/_2$ natürl. Grösse.

ich, dass diese Anordnung bei Anwendung besserer Hilfsmittel noch am ehesten Aussicht auf Erfolg hätte. Ich habe mich nicht weiter mit derselben bemüht, weil mir inzwischen die auf S. 976 zu schildernden Versuche entscheidend zu sein schienen.

Nur noch einen elektrometrischen Versuch will ich beschreiben, der unter einer gewissen Annahme zu Gunsten der Faraday'schen Hypothese spricht und bei dessen Schilderung ich einige der Fehlerquellen, die auf diesem Gebiete auftreten, erwähnen kann. *NS* (Fig. 12) ist der Eisenkern eines Elektromagneten. Dieser Eisenkern hat nach links eine Polscheibe *nn*; die Axe *E* führt zum Elektrometer. *hh* und *gg* sind zwei Hartgummischeiben. Die Axe *a* ist durch die Hartgummischeibe *gg*

vom Magneten isolirt; *m...m* ist eine zur Erde abgeleitete Metallhülle, in welcher die magnetisirende Spule *s*, *s* aufgewickelt ist. Diese Spule wird durch zwei nicht gezeichnete Schleifcontacte mit dem magnetisirenden Strom versehen. Die zur Erde abgeleitete Einhüllung *m* der Spule ist nothwendig, weil der magnetisirende Strom sonst durch statische Influenz auf den Eisenkern und das Elektrometer wirkt. Das Ganze befindet sich in einem grossen, zur Erde abgeleiteten Kasten von 1·5 *m* im Gevierte. Die Verlängerung der Axe *a* führt durch die Wand des Kastens hindurch, der Schnurlauf zum Antrieb des Magneten befindet sich so natürlich ausserhalb des Kastens, da die Reibung der Schnur viel zu viel Elektricität erzeugen würde. *ff* ist eine dünne Eisenplatte, um den Punkt *x*, wo die Ableitung der Elektricität stattfinden soll, vor dem Einflusse der Hartgummiplatte *hh* zu schützen. Dieses ganze, eben beschriebene und in der Figur dargestellte System rotirt circa 80mal in der Secunde.

Lässt man bei *x* einen zur Erde abgeleiteten Draht schleifen, so zeigt das Elektrometer beim Commutiren Spannungsänderungen von circa $^1/_{60}$ Volt. Die Frage ist jetzt natürlich, ob diese elektromotorische Kraft im Magneten oder in dem bei *x* schleifenden Drahte ihren Sitz hat. Um das zu entscheiden, muss an Stelle des schleifenden Drahtes eine andere discontinuirliche Ableitung ersonnen werden.

Auch hier versuchte ich es zunächst mit Tropfen, welche von oben her auf *x* auffielen; es waren aber die störenden Ursachen zu vorwiegend und selbst ein Doppelsystem mit Gegenschaltung (analog dem oben geschilderten) hatte keinen Erfolg. Nun wurde um *x* ein Papierstreifen so gewickelt, dass, mit Hilfe zweier unterlegter Drahtringe, zwischen dem Magneten und dem Papierstreifen etwa 1 *mm* Luftschichte war. Die Oberfläche des Papiers war berusst und stand in leitender Verbindung mit dem Magneten. Wurden nun die Strahlen einer kräftigen Wechselstrombogenlampe mit Hilfe eines vergoldeten Hohlspiegels so auf *x* concentrirt, dass *x* den Brennpunkt des Lichtkegels bildete, so trat beim Rotiren und Commutiren ein Ausschlag von derselben Grössenordnung auf, wie wenn auf *x* ein zur Erde abgeleiteter Draht schleifte. Ich verhehle mir aber

nicht, dass ich mit diesem Versuche keine einwurfsfreie Stütze der Anschauung Faraday's geschaffen. Abgesehen von der Elektrisirung durch die Bestrahlung, welche bald —, bald + war, der Unruhe des Elektrometers und sonstiger Fehlerquellen geschieht hier die Ableitung durch Wärmewirkung, und man könnte immerhin annehmen, dass nach Preston eine Induction in dem aufsteigenden warmen Luftstrom stattgefunden habe.

Ich habe die Ergebnisse dieses Capitels, in welchem eine fast zweijährige, angestrengte experimentelle Arbeit steckt, nur desswegen kurz mitgetheilt, um die Schwierigkeiten einer Entscheidung der aufgeworfenen Frage mittelst elektrometrischer Messung darzuthun.

III. Entscheidende Versuche.

Folgende Versuche scheinen mir aber nur im Sinne einer Entscheidung der untersuchten Frage zu Gunsten der ursprünglich Faraday'schen Theorie gedeutet werden zu können. Ein

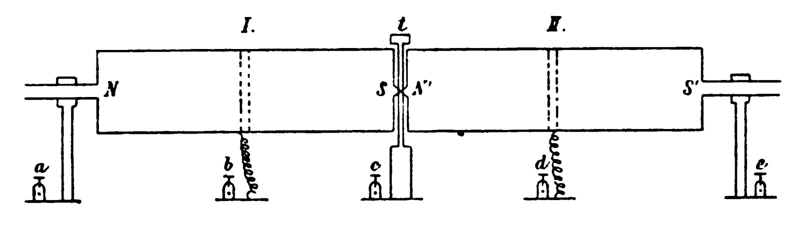


Fig. 13.
$^1/_4$ natürl. Grösse.

Magnet ist im Äquator durch einen zur Axe senkrechten Schnitt gleichsam in zwei Theile getheilt und es kann jetzt jeder dieser zwei Theile für sich allein gedreht werden. In Fig. 13 sind NS und $N'S'$ zwei Elektromagnete, deren ungleichnamige Pole S und N' möglichst knapp aneinanderstossen. Die Entfernung der beiden Magnete betrug 9 *mm*, weil ja die Stütze t zwischen denselben eine gewisse Festigkeit haben musste; die Länge jedes Magnetes war 16 *cm*. Die (in der Figur nicht gezeichnete) Drahtwicklung war fest mit den Magneten verbunden und rotirte mit denselben. Jeder der Magnete besass zwei Schleifcontacte zur Zuführung des magnetisirenden Stromes, der aber von dem Eisenkerne selbst sehr sorgfältig isolirt war. Die beiden Magnete wurden stets in derselben Richtung erregt,

indem der magnetisirende Strom zuerst um I und dann in derselben Richtung um II herumfloss. Beim Commutiren kehrte sich die Richtung in beiden um, so dass immer zwei ungleichnamige Pole zusammenstiessen, das Ganze somit gleichsam einen einzigen Magneten darstellte. Fig. 14 gibt den experimentell gefundenen Verlauf der Kraftlinien in quantitativ richtiger Weise (willkürliches Masssystem).[1]

Zur Untersuchung der Unipolar-Induction dienen die Klemmen *abcde* (Fig. 13); *b* und *d* führen zu zwei Schleifcontacten am Äquator der beiden Magnete, metallisch verbunden

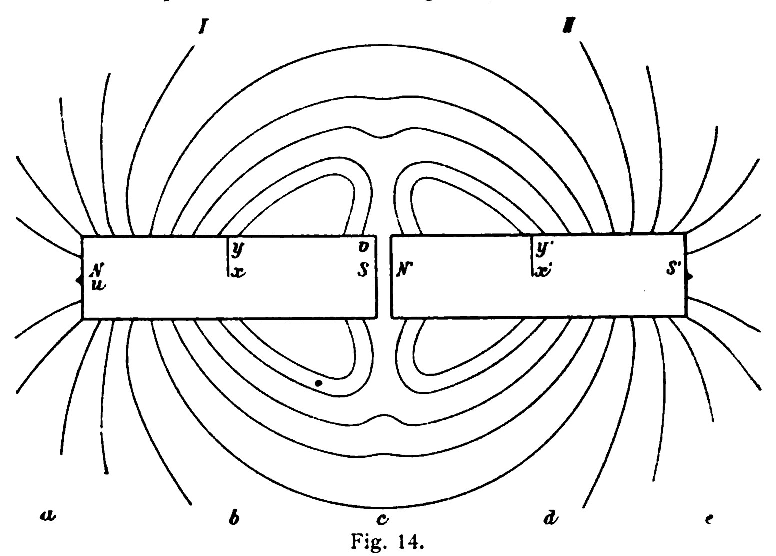


Fig. 14.

mit den Eisenkernen und wohl isolirt von der magnetisirenden Spule; die Klemme *c* ist in Verbindung mit der Axe *S* und *N'*, *a* mit der Axe *N*, *e* mit der Axe *S'*.

Es sei nun zunächst *c* und *d* mit dem Galvanometer verbunden, Magnet I steht fest, II rotirt einmal per Sekunde (directer Antrieb ohne Übersetzung). Wir erhalten nach Anbringung aller Correctionen im Mittel einen Ausschlag von 38. Ist hingegen *de* mit dem Galvanometer verbunden, so haben

[1] Siehe Anmerk. S. 955. In der citirten Arbeit von Zuchristian ist auch die eigenthümliche Knickung der Kraftlinien in der Mitte begründet. In Fig. 14 sind die Kraftlinien zwischen *S* und *N'* weggelassen, weil der Raum *SN'* für eine Beobachtung zu schmal war.

wir einen Ausschlag von 39, in beiden Fällen fliesst der Strom vom Äquator gegen die Axe (oder bei Rotations- respective Stromwechsel umgekehrt). Diese beiden Zahlen sind gleich, da ja der Magnet II in beiden Fällen ganz symmetrisch abgeleitet wird.

Nach Faraday sitzt die elektromotorische Kraft in beiden Fällen in der Strecke $x'y'$ (Fig. 14). Eine genaue Besichtigung dieser Zeichnung zeigt aber, dass diese beobachtete Gleichheit nach Preston schon schwer zu erklären wäre. Des Ferneren aber sollen die Kraftlinien an den Magneten festgebunden sein. Ich frage nun: an dem rotirenden Magneten II oder an den feststehendem I? Ja ich kann bei diesen beiden Versuchen, währenddem II gleichmässig fortrotirt, I in derselben oder in entgegengesetzter Richtung rotiren lassen, ohne dass das Resultat sich ändert.

Folgender Versuch ist nur eine Art von Wiederholung und Erweiterung des vorhergehenden. Es rotire I, Galvanometerleitung sei bc und II sei ruhig, so erhalte ich einen Strom von der Grösse 40. Diese Zahl ist etwas grösser als die oben gefundene analoge 38, weil die Schleifcontacte nicht absolut gleich aufsitzen u. s. w. Jetzt verbinde ich b und d mit dem Galvanometer. Rotire ich II, während I ruhig ist, erhalte ich einen Strom 38, rotirt hingegen I, und II ist ruhig, erhalte ich einen Strom von 40. Das ist wieder nur eine Wiederholung der bereits gemachten Versuche. Jetzt lasse ich aber beide Magnete entgegengesetzt rotiren und erhalte einen Ausschlag von 79 (fast gleich 38+40). Dieser merkwürdige Versuch erklärt sich nach Faraday sehr einfach. Alle Kraftlinien, die wir aussen haben, gehen durch das Innere der Magneten so ziemlich parallel der Axe, die Kraftlinien stehen aber fest; durch das Drehen des Magneten II werden die Kraftlinien in $x'y'$ geschnitten, durch die entgegengesetzte Drehung des Magneten I die Kraftlinien in xy, und diese beiden gleichgerichteten Ströme können nun, wenn die beiden Magnete sich einzeln drehen, einzeln hervorgerufen werden; drehen sich jedoch beide Magnete gleichzeitig, aber entgegengesetzt, so summiren sie sich; drehen sich beide Magnete in gleichem Sinne, so heben sie sich auf.

Wollen wir diesen Versuch nach Preston erklären, so müssen wir zu einer ziemlich gezwungenen Annahme unsere Zuflucht nehmen. Sehen wir zunächst von der Zeichnung Fig. 14 ab, so wirken, nach den wirklichen Versuchsergebnissen beurtheilt, die Magnete I und II ungefähr so, wie wenn sie ganz weit von einander wären; die Kraftlinien des Magneten II drehen sich nach Preston mit diesem Magneten, ebenso sind die Kraftlinien des Magneten I an dem Magneten I fixirt. Nun sind aber in facto die Magnete ja nebeneinander; die in Fig. 14 wiedergegebenen experimentellen Resultate zeigen uns ja ein Ineinanderfliessen der Kraftlinien; wir müssen da folgerichtig, wollen wir die Preston'sche Anschauung beibehalten, dieses

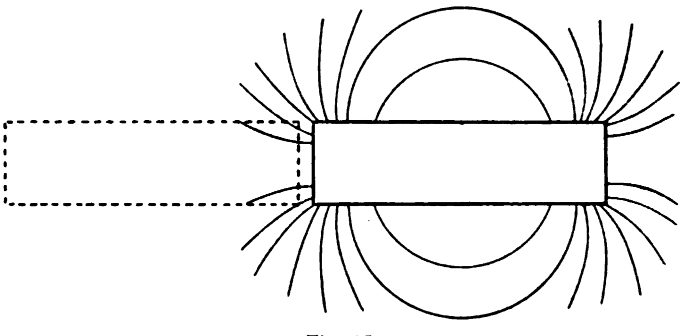


Fig. 15.

Ineinanderfliessen als eine secundäre Erscheinung auffassen und müssen etwa folgendermassen schliessen: Es seien die wirklichen Kraftlinien, deren Rotation die unipolare Induction verursacht, einerseits und jene Kraftlinien, welche die gewöhnliche Induction und das Ausrichten der Eisenfeile bewirken, anderseits, etwas Verschiedenes. Wir hätten es im letzteren Falle bereits mit einer resultirenden Wirkung beider Systeme zu thun, welche die Einzelwirkung des einzelnen Magneten verdeckt, während bei der Unipolarinduction gerade diese Einzelwirkung in Thätigkeit tritt.

Trotz diesem etwas gezwungenen Erklärungsversuche bleibt aber noch immer eine Schwierigkeit übrig. Wenn wir den einen Magneten in grosser Entfernung vom zweiten untersuchen, so gibt er für sich allein das in Fig. 15 dargestellte Feld.

Die Kraftlinien sind jetzt weniger geworden; es gibt auch die unipolare Induction *dc* statt 38 nur 33. Wenn wir nun auch annehmen, dass, was unipolare Wirkung anlangt, das Feld jedes Magneten so für sich bestünde, wie wenn der zweite Magnet nicht da wäre, so müssten wir auch noch ganz eigenthümliche Annahmen machen, weil durch Hinzufügen des zweiten Magneten ja die Anzahl der Kraftlinien vermehrt wurde und sich diese Vermehrung in der unipolaren Induction der nebeneinander rotirenden Magneten zeigte. Wir müssten also etwa so schliessen: Die Anwesenheit des zweiten Magneten vermehrt die Kraftlinien des ersten, welche Kraftlinien aber dann unabhängig vom zweiten Magneten mit dem ersten rotiren und vice versa.[1]

Aber selbst dieser Rattenschwanz von Ausflüchten scheint mir folgendem Experimentum crucis nicht Stand zu halten.

Es wurde an dem Apparat Fig. 13 folgende Änderung vorgenommen. Fig. 16 stellt in $^1/_2$ der natürl. Grösse (doppelter Massstab der Fig. 13) jene Stelle dar, wo die Magnete I und II einander gegenüberstehen, es sind in S und N' die Hartgummispitzen r und r' eingedreht und die Magnete liegen jetzt auf der mittleren Stütze t mit Hilfe dieser isolirenden Spitzen auf. Ferner ist an diese beiden Endflächen S und N' der Magneten je eine Kupferplatte c, respective c' aufgelöthet, deren Durchmesser den des Eisencylinders und seiner Umwicklung um Weniges überragt, so dass die Platte c unten in eine Quecksilberrinne h eintauchen kann, respective c' in h'. Während also in den früheren Versuchen die Axen der beiden Magneten in leitender Verbindung waren, muss jetzt der inducirte Strom aus dem Magneten S durch c in das Quecksilbernäpfchen h gelangen; dies ist in

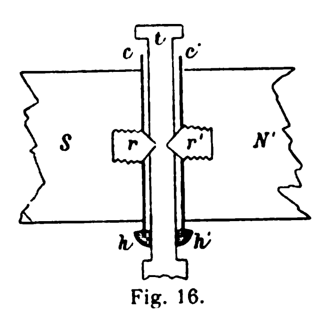


Fig. 16.

[1] Schaltet man die Magnete so, dass gleichnamige Pole einander gegenüberstehen, so lassen sich auch verschiedene interessante Combinationen der Ableitungen treffen, die aber dann, wo ja jedes Feld für sich existirt, zur Klärung obiger Frage nichts beitragen können.

metallischer Verbindung mit *h'* und von hier geht der Strom über *c'* nach *N'*, sonst ist der Apparat und die Bezeichnung der einzelnen Theile dieselbe wie früher; *h* und *h'* stehen in leitender Verbindung mit der Klemme *c* der Figuren 13 und 14.

Zur einleitenden Orientirung zunächst folgende Versuche: *ab* ist mit dem Galvanometer verbunden, wir erhalten einen Ausschlag 40, ob nun II mitrotirt oder ruhig ist, *cb* gibt einen Ausschlag von 7 nach entgegengesetzter Richtung, wobei es wieder gleichgiltig ist, ob II mitrotirt oder nicht. *ac* gibt uns die Differenz dieser beiden Werthe 32. Dass diese Ergebnisse jetzt anders aussehen müssen wie früher, zeigt eine einfache Überlegung der in Fig. 16 dargelegten Verhältnisse, da jetzt die Kupferplatte *cc* mitrotirt. Nach Faraday stammen diese elektromotorischen Kräfte von dem Durchschneiden der Kraftlinien entlang der Mantelfläche *uy*, respective *uv*. Ob wir das Schneiden durch die Mantelflächen oder durch Linien, welche senkrecht auf den Axen stehen, uns bewerkstelligt denken, ist gleichgiltig, da es ja immer nur auf die Endpunkte des Leiters *u* und *y*, respective *y* und *v* ankommt. *yv* wirkt in entgegengesetztem Sinne, weil hier die Kraftlinien zum grössten Theil wieder zurückgehen, während *u (y) v* durch die Differenz dieser beiden Werthe bedingt ist. Selbst das Verhältniss 32 : 7 lässt sich innerhalb der Fehlergrenzen (der Schleifcontact bei *x* war so breit, dass er etwa zwei Kraftlinien umfasste) aus den Kraftlinien mit 8 : 2 wiederfinden. Ich will die Schwierigkeit, welche die Anschauung Preston's bei Erklärung dieser Resultate mit sich bringt, nicht auseinander setzen, da folgender analoge Hauptversuch noch geeigneter zu diesem Zwecke erscheint.

Ich verbinde nämlich *a* und *e* mit dem Galvanometer, die Galvanometerleitungen sind so geführt, dass sie die Verlängerungen der magnetischen Axen bilden. Rotirt jetzt I allein (Versuch 1), erhalte ich einen Strom von 33, rotirt II allein und in entgegengesetzter Richtung (Versuch 2) erhalte ich wieder einen Strom 33·5 von derselben Richtung. Rotiren aber beide Magnete gleichzeitig und nach entgegengesetzten Richtungen (Versuch 3), erhalte ich die Summe der beiden Ausschläge, nämlich 66. Findet die Rotation nach gleichen Richtungen statt, so tritt kein Strom auf.

Nach Faraday ist die Erklärung sehr einfach. Die Kraftlinien stehen fest, die Mantelfläche des einen Magneten schneidet sie in der einen Richtung, die Mantelfläche des zweiten Magneten in entgegengesetzter Richtung, und wir können wieder nach Belieben jede dieser elektromotorischen Kräfte einzeln oder auch ihre Summe oder ihre Differenz in Thätigkeit treten lassen.

Stellen wir uns aber auf den Standpunkt, dass jeder Magnet mit seinem eigenen Kräftesystem, trotz Fig. 14 rotire; es war dies das letzte Auskunftsmittel, unter dem wir die Preston'sche Theorie — und das nicht befriedigend — halten konnten. Die Kraftlinien des einen Magneten II ohne Anwesenheit von I stellt Fig. 15 dar. Denken wir uns nun, dass in Bezug auf die unipolare Wirkung die Anwesenheit von I das Feld II, wenigstens was die Richtung der Kraftlinien anbelangt, nicht ändere. Wenn nur II allein rotirt, haben wir einen Ausschlag von 33. Soll die Induction in einem feststehenden Leiter stattfinden, so steht uns nur die Mantelfläche *ab* zur Verfügung und die daselbst geschnittenen Kraftlinien sind viel zu wenig, um unsere Resultate erklären zu können. Statt 33 hätten wir etwa 5—10 bekommen müssen.

Um vollständig objectiv zu bleiben, wollen wir noch einen letzten Rettungsversuch der Theorien Preston's überlegen.

Aus den eben geschilderten Versuchen 1, 2 und 3 müssen wir folgern, dass die Kraftlinien trotz der Rotation der Magneten feststehen. Man könnte nun dieses Fixiren der Kraftlinien als ausnahmsweise und bedingt durch die Anwesenheit des zweiten Magneten hinstellen. In dem Falle z. B. wo beide Magnete mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Seite rotiren, erschien es ja ganz plausibel, anzunehmen, dass die Kraftlinien gleich grosse, aber entgegengesetzte Drehungsimpulse erführen und daher in Ruhe blieben. Da aber müsste, sowie wir den einen Magneten immer langsamer rotiren und schliesslich sogar stille stehen lassen, der Einfluss des rotirenden Magneten auf die Kraftlinien immer steigen, und dieselben, wenigstens theilweise, mit diesem rotiren. Dem widerspricht aber vollständig, dass Versuch 3 uns die Summe der Versuche 1 und 2 gibt.

Schlussbemerkung.

In consequenter Überlegung aller mitgetheilter Versuche erscheint mir die Thatsache kaum abzuweisen, dass bei unipolarer Induction das Kraftfeld eines rotirenden Magneten feststeht, dass die erste Anschauung Faraday's somit die richtige war.

Daraus ergeben sich aber einige Folgerungen, die ich noch kurz erwähnen will. Es muss, wie schon Plücker[1] behauptet, die Erde als ein Magnet, der durch die eigenen feststehenden Kraftlinien rotirt, am Nordpol positive und am Äquator negative Elektricität zeigen.

Ebenso hat jeder mit der Erde rotirende Leiter Potentialdifferenzen. Denken wir uns in irgend einem Punkte des mittleren Deutschland, senkrecht auf der Tangente der Erdrotation und senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien der Erde einen 1 *m* langen Draht in (gegen die Erde relativer) Ruhe, so wird derselbe Potentialdifferenzen von 0·013 Volt haben. Der Nachweis dieser Potentialdifferenzen ist aber in Folge derselben Schwierigkeiten, mit denen ich in Abschnitt II kämpfte, fast kaum zu erbringen. Abgesehen von der Kleinheit ist weder eine directe galvanometrische, noch eine elektrometrische Messung möglich; erstere weil jeder geschlossene Leitungsdraht von jeder (geschlossenen) Kraftlinie zweimal in entgegengesetztem Sinne geschnitten wird, letztere weil eine Ableitung des einen Potentiales mittelst Tropfelektrode oder dergl. darum nicht zum Ziele führt, weil die Leiter, die gegen einen Punkt hingehen, alle an derselben Stelle dieselben Potentiale haben müssen, die Tropfelektrode also stets in einer Umgebung arbeitet, welche von allem Anfange an eben dasselbe Potentiale hat, welches sie ableiten soll.

Theoretisch möglich erschiene mir nur folgende Methode. Wir drehen einen Leiter um eine Axe, welche in der Richtung der Erdbewegung senkrecht steht auf den Kraftlinien. Dann werden an den beiden Drahtenden die Potentialdifferenzen bei jeder Umdrehung um 180° wechseln und wir haben in diesem ungeschlossenen Drahte einen minimalen Wechselstrom. Es ist

[1] Pogg. Ann. 87, S. 357, 1852.

unmöglich, die Capacitäten der Drahtenden durch condensatorische Wirkung gegenüberstehender Leiter zu verstärken, weil in Folge der Ableitung dieser feststehenden Leiter, welche ja auch von den Kraftlinien geschnitten werden, dieselben von allem Anfange an gleichen Potentiale haben, wie die gegenüberstehenden Drahtenden.

Schliesslich möchte ich noch einen nebensächlichen Punkt erörtern, auf den bereits S. 963 hingewiesen wurde. Es geschieht dies erst an dieser Stelle, weil kraft der gewonnenen Vorstellungen dieser Punkt jetzt rascher erörtert werden kann. Es sei *d* der Durchschnitt eines Leiters, der auf der Richtung der Erdbewegung *e* senkrecht steht. *d* ist auch senkrecht auf die

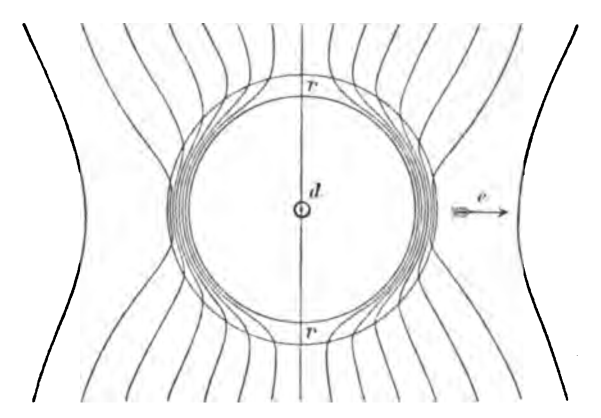


Fig. 17.

Richtung der Kraftlinien und muss bei seiner Rotation mit der Erde alle feststehenden Kraftlinien schneiden. Denken wir uns nun um *d* herum einen Eisencylinder *r*, so gehen die Kraftlinien, wie die Figur zeigt, zum grössten Theil durch den Eisenring. Da nun eine Kraftlinie nie reissen kann, sondern stets eine in sich selbst geschlossene Curve darstellt, so müssen wir uns bei der Bewegung von *d* und *r* gegen die Kraftlinien folgende Vorstellung bilden. Die Kraftlinien, die rechts durch den Ring gehen, werden, wenn Ring und Draht sich nach rechts bewegt, aus dem Ring herausspringen, *d* sehr rasch schneiden und dann auf der andern Seite links in *r* hineinspringen, so dass *d*, ob es nun im Eisencylinder ist oder ausserhalb desselben, immer von gleich viel Kraftlinien geschnitten werden muss;

nur werden im ersteren Falle die Kraftlinien *d* mit grösserer Geschwindigkeit, wenn auch in gleichen Zeitintervallen passiren. Durch diese raschere Bewegung innerhalb des Eisenringes wird aber bewirkt, dass in der inneren Lichte des Ringes de facto weniger Linien sind, als im homogenen Feld ausserhalb des Eisenringes. So erklärt sich die bereits erwähnte von Ermacora als Curiosum hingestellte Thatsache, dass die Inductionswirkung in derartigen Fällen von der durch magnetische Messungen (Schwingungen einer Magnetnadel und dergl.) bestimmten Feldstärke scheinbar unabhängig ist; nach obiger Auffassung ist aber auch in unserem Falle einerseits die Inductionswirkung abhängig von der Anzahl der geschnittenen Kraftlinien und anderseits die Feldstärke von der Anzahl der wirklich vorhandenen Kraftlinien. Die von Ermacora vorgeschlagene Änderung elektromagnetischer Grundbegriffe erscheint somit überflüssig.

XXI. SITZUNG VOM 18. OCTOBER 1894.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter übermittelt einen Abdruck der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages für das Jahr 1894, Capitel IX, »Ministerium für Cultus und Unterricht«, Abtheilung *A*, *B*, *C* und *D*, ferner ein Exemplar des Finanzgesetzes vom 29. Mai 1894, mit dem Beifügen, dass die ordentlichen, sowie die ausserordentlichen Ausgaben der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften unverändert nach der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages genehmigt worden sind.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt ein im Wege des k. italienischen Ministeriums des Äussern für die kaiserl. Akademie eingelangtes Exemplar des IV. Bandes des Werkes: »Le Opere di Galileo Galilei«.

Herr Prof. Dr. V. Uhlig in Prag dankt für seine Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung für die Denkschriften, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss der Kreideflora Australiens«.

Herr Regierungsrath emerit. Prof. J. Luksch übersendet den in Gemeinschaft mit Prof. J. Wolf an der k. k. Marine-Akademie in Fiume verfassten Bericht über die auf der IV. Reise S. M. Schiffes »Pola« im Jahre 1893 ausgeführten physikalischen Untersuchungen im östlichen Mittelmeer und im Ägäischen Meer.

Herr Stefan v. Heinrich in Wien übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Über Kräfte im Raume«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine im mineralogischen Museum der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. P. Philipp Heberdey, Capitularpriester des Stiftes Schotten in Wien, unter dem Titel: »Krystallmessungen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii Sua Maestà il Re d'Italia. Vol. IV. Firenze 1894; 4°.

Berard, E., Trois ans de séjour à la Clinique Ophthalmologique Universitaire de M. le Professeur Fuchs à Vienne. Rapport adressé à M. le Ministre de l'Intérieur et de l'Instruction publique. Bruxelles, 1892; 8°.





SITZUNGSBERICHTE

DER

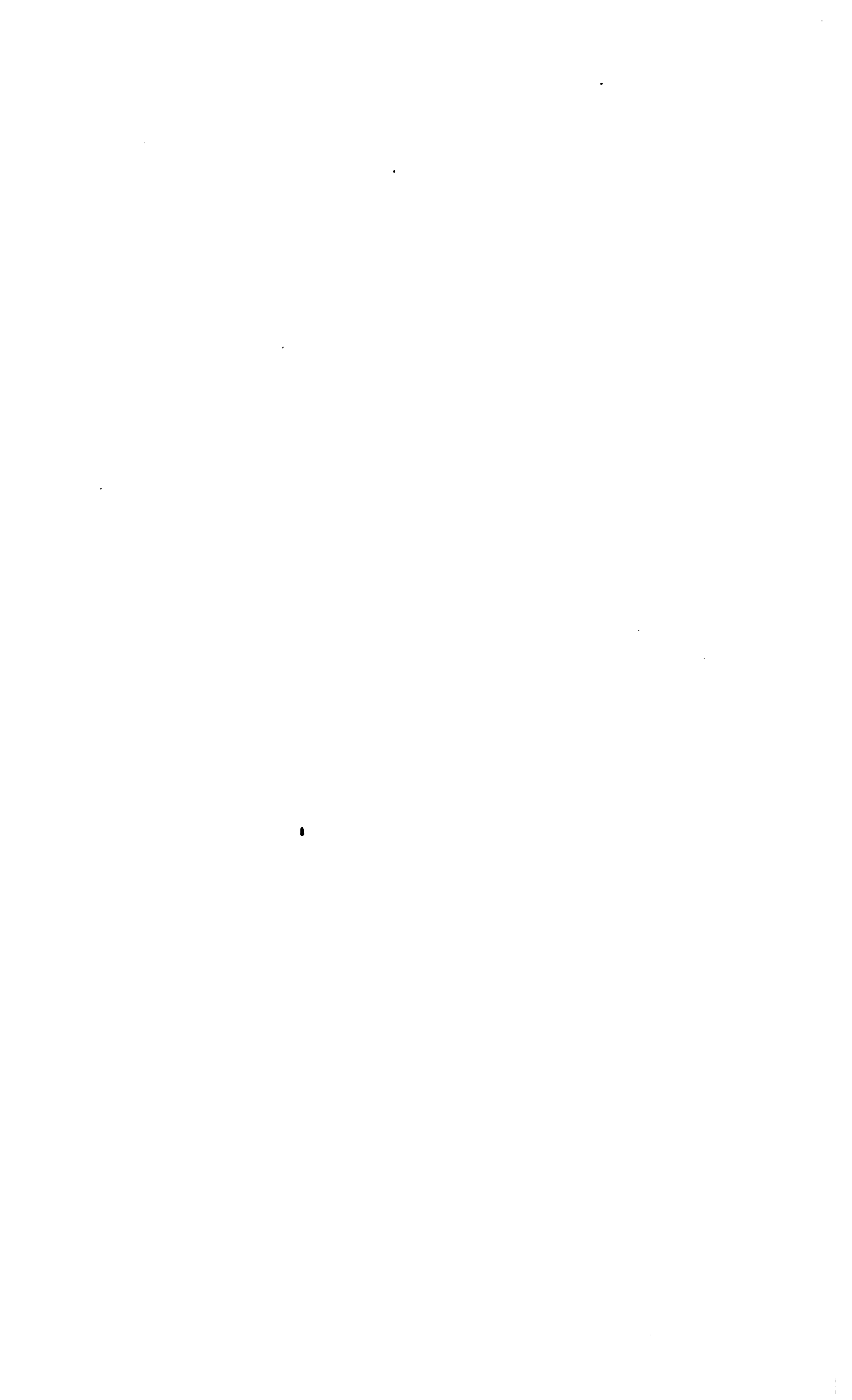
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XXII. SITZUNG VOM 2. NOVEMBER 1894.

Der Secretär legt das erschienene Heft VI—VII (Juni und Juli 1894), Abtheilung I und das Heft VI—VII (Juni und Juli 1894), Abtheilung II. b. des 103. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von den Herren J. Herzig und H. Meyer ausgeführte Untersuchung: »Über den Nachweis und die Bestimmung des am Stickstoff gebundenen Alkyls«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht für die Publicationen der Tiefseeforschungen in den Denkschriften eine von Herrn Anton König in Wien ausgeführte Untersuchung, betitelt: »Die Sergestiden des östlichen Mittelmeeres, gesammelt in den Jahren 1890, 1891, 1892 und 1893«.

Herr Dr. Wilh. Trabert in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Museo de la Plata, Anales, T. I (1890—1891); Seccion Geologica y Mineralogica. P. I (1892); Seccion de Arqueologia. P. II y III (1892); Seccion de Historia General (Fotografía). P. I (1892); Seccion Zoologica. P. I (1893); Paleontologia Argentina (1893). La Plata; Folio. — Revista, T. I (1890—1891); T. II (1891); T. III (1892); T. IV (1893). La Plata; 8°.

XXIII. SITZUNG VOM 8. NOVEMBER 1894.

Herr Prof. Dr. Ph. Knoll in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Graphische Versuche an den vier Abtheilungen des Säugethierherzens«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Beiträge zur Kenntniss der regenscheuen Blüthen, nebst Nachträgen zu meinen phytodynamischen Untersuchungen«, von Prof. Dr. Anton Hansgirg an der k. k. böhm. Universität in Prag.
2. »Über Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten«, von Dr. Jan de Vries, Docent an der polytechnischen Schule in Delft.

Herr Dr. Norbert Herz in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodus gefundene astronomische Inschrift«.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, überreicht einen vorläufigen Bericht von Prof. Dr. V. Hilber in Graz über seine im Auftrage der kaiserl. Akademie unternommene geologische Reise in Nordgriechenland und Makedonien 1894.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht folgende zwei Abhandlungen:

1. »Über die Äquivalenz der reducirten binären quadratischen Formen von positiver Determinante«.

2. »Über den quadratischen Reciprocitätssatz und die Summen von Gauss«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Institut Botanico-Géologique Colonial de Marseille, Annales. Ière Série, Ière Année, Ier Vol. (1893). Publiées sous la direction de M. Le Professeur Ed. Heckel. Paris, 1893; 8°.

Bemerkungen über Wärmeleitung

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1894.)

Entgegen der gewöhnlichen Annahme, dass die Wärme der Körper in einer gegenseitigen Bewegung ihrer Atome bestehe, bei welcher man die Existenz des Äthers ganz ausser Betracht lassen könne, habe ich vor Kurzem[1] die Vermuthung ausgesprochen, die in einem Körper enthaltene Wärmemenge bestehe ihrem wesentlichen Theile nach aus einer zwischen seinen Atomen durch diffuse Reflexion angesammelten Strahlenmenge. Diese aktinische oder Strahlenwärme ist es dann, welche bei den festen Grundstoffen das Gesetz von Dulong und Petit bedingt; die hier zugleich obwaltende Atombewegung macht von der Gesammtwärme nur einen kleinen Theil aus, wodurch das Product aus Äquivalentgewicht und specifischer Wärme um einen mehr oder weniger geringen Betrag grösser erscheint, als es sein müsste, wenn keine Atombewegung stattfände.

Die sogenannte Leitung der Wärme oder deren Fortbewegung im Inneren eines Körpers von Schichten höherer zu solchen von niedrigerer Temperatur wird nach dieser Anschauung durch zwei sehr verschiedene Vorgänge bewerkstelligt: erstens durch Übertragung von Ätherbewegung oder aktinischer Wärme, zweitens durch Übertragung von Atombewegung oder kinetischer Wärme. Es ist klar, dass die Gesetze der Wärmeleitung sich sehr verschieden gestalten können, je nachdem bei derselben entweder der eine oder der andere der zwei genannten Vorgänge sich überwiegend betheiligt. Dass es unzulässig sei, die Wärmeleitung ganz allgemein als eine ledig-

[1] Diese Berichte, Bd. CIII, Abth. II. a, S. 809—831.

lich durch Atombewegung bewirkte Erscheinung aufzufassen, wird durch die Thatsache bewiesen, dass zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und der inneren Reibung der Flüssigkeiten sich kein oder nur ein sehr schwacher Zusammenhang zeigt. In seiner diesbezüglich grundlegenden Arbeit[1] spricht H. F. Weber, ohne sie näher zu erörtern, die Ansicht aus, die Wärmeleitung geschehe in durchsichtigen, nichtmetallischen Flüssigkeiten durch Atombewegung, in Metallen dagegen und namentlich im Quecksilber durch innere Strahlung. Bei dem auf diesem Gebiete noch herrschenden Dunkel könnte es aber immerhin sein, dass es sich gerade umgekehrt verhält.

Denken wir uns einen Körper, dessen Atome durch genügend starke Kräfte in Gleichgewichtslagen unbeweglich festgehalten seien. Nach der kinetischen Theorie würde ein solcher Körper keine Temperatur haben; nach meiner Hypothese ist seine Temperatur durch die zwischen seinen zahllosen Atomen hin- und hergeworfene Strahlenmenge bestimmt, vermöge welcher derselbe auch beständig durch seine Oberfläche Wärme ausstrahlt und deren Abgang daher, wenn seine Temperatur constant bleiben soll, durch gleichzeitige Einstrahlung von aussen ersetzt werden muss. Hat der Körper die Dichte ρ und ist c seine specifische Strahlenwärme, so enthält er bei der absoluten Temperatur T in der Gewichtseinheit die Strahlenmenge cT und in der Volumeinheit die Strahlenmenge ρcT, welche man als dessen Strahlendichte bezeichnen kann. Für eine in diesem Körper angenommene Schicht von unendlich kleiner Dicke dz herrsche auf einer Seite die Temperatur T und auf der anderen die Temperatur $T-dt$; dann wird durch die Flächeneinheit derselben während einer bestimmten Zeit bei constant erhaltener Temperaturdifferenz dt um eine gewisse Strahlenmenge mehr von der wärmeren nach der kälteren Seite, als umgekehrt übergehen, und dieser Mehrabfluss wird die einzige im gedachten Körper mögliche Art der Wärmeleitung bilden.

Die durch diesen Wärmestrom in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit geführte Wärmemenge kann man dem Unter-

[1] Wiedemann's Annalen, Bd. X, S. 103.

schiede der beiderseits der angenommenen Schicht herrschenden Strahlendichten, bezogen auf die Schichtdicke dz, proportional setzen und also durch den Ausdruck

$$\eta \rho c \frac{dt}{dz},$$

wo η eine von der chemischen Natur des Körpers unabhängige Constante ist, vorstellen, und somit hat man für das Wärmeleitungsvermögen k seiner Bedeutung gemäss die Gleichung:

$$k = \eta \rho c,$$

unter c, wie erwähnt, die specifische Strahlenwärme verstanden, welche nach meiner Hypothese in festen oder flüssigen Körpern immer nur wenig von ihrer wirklichen specifischen Wärme verschieden ist und daher für solche Körper mit letzterer ohne besonderen Fehler identificirt werden kann.

Nach voriger Gleichung müsste der Quotient $\frac{k}{\rho c}$ für Körper, in welchen die Wärmeleitung nur durch innere Strahlung vermittelt wäre, einen gleichen Werth haben. Man wird sonach, wenn für eine Classe von Körpern dieser Quotient sich thatsächlich nahe gleich ergibt, schliessen dürfen, dass die Wärmeleitung in denselben weit überwiegend durch innere Strahlung und nur zu einem geringen Theile durch Atombewegung vor sich geht. Eine solche Körperclasse scheinen nach den Versuchen von Weber die durchsichtigen, nichtmetallischen Flüssigkeiten zu bilden.

Für Körper, in welchen die Wärmeleitung mehr durch Atombewegung als durch innere Strahlung vermittelt wird, muss demnach der Werth von $\frac{k}{\rho c}$ entsprechend grösser sein, als in durchsichtigen Flüssigkeiten. Derselbe ist in der That sowohl bei den Metallen, als auch bei den Gasen viel und sehr ungleich grösser; man muss daher annehmen, dass in diesen zwei Classen von Körpern die Wärmeleitung weit überwiegend durch Atombewegung vor sich geht, was bezüglich der Gase, wo die innere Strahlendichte verhältnissmässig klein ist, während die kinetische Wärme einen grossen Theil (bei der

Luft $\frac{2}{5}$) der Gesammtwärme ausmacht, ohnehin keinem Zweifel unterliegt.

In den Metallen ist dem Gesetze von Dulong und Petit gemäss die lebendige Kraft der Atome, wie in festen oder flüssigen Körpern überhaupt, gegen die in ihrem Volumen diffundirte Strahlenmenge nur gering. Es scheint mir aber, dass, wenn die Summe der leeren Räume zwischen den Atomen vom Körpervolumen blos einen kleinen Theil beträgt, die Übertragung kinetischer Wärme von Atom zu Atom viel ausgiebiger vor sich gehen muss, als wenn die Summe der leeren Zwischenräume gegen den von der Substanz der Atome erfüllten Raum gross ist. Wie ich glaube, ist letzteres in den gewöhnlichen Flüssigkeiten, ersteres aber in den Metallen der Fall und bedingt deren vergleichsweise gute Wärmeleitung.

Wenn dieser Grund der richtige ist, so muss man erwarten, dass bei den Metallen schon eine geringe Volumvergrösserung, wie sie durch Erwärmung eintritt, eine verhältnissmässig sehr starke Verminderung des Wärmeleitungsvermögens zur Folge habe. Dies trifft denn auch thatsächlich zu. Nach Stewart[1] lässt sich für Eisen der Verlauf von k als Function der Temperatur t zwischen 15° und 220° durch die Formel

$$k = k_0(1-0\cdot0011\,t)$$

ausdrücken; es nimmt also k für dieses Metall durch Erwärmung in einem 32mal stärkeren Verhältnisse ab als die Dichte. Man kann diese Abnahme eine rapide nennen; sie wird sich weiterhin natürlich mehr und mehr verlangsamen. Bei Kupfer nimmt k nur halb so schnell als bei Eisen, aber immer noch 11mal schneller als seine Dichte ab. Durch Ausdehnung bei constanter Temperatur würde für beide Metalle die Abnahme von k wahrscheinlich eine noch etwas stärkere sein.

Dass in Metallen die Atome einander mit ihren Oberflächen bereits nahe kommen, geht aus meiner Hypothese auch auf einem ganz anderen Erscheinungsgebiete hervor. Nach derselben wird nämlich ein Lichtstrahl in einem durchsichtigen

[1] Wiedemann's Beiblätter, Bd. 18, S. 742.

Körper nicht durch den Äther allein, sondern auch durch die Substanz der getroffenen Atome hindurch fortgepflanzt, und hieraus ergibt sich, wenn d die Dichte und n den Brechungsindex des Körpers, δ die Dichte und ν den Brechungsindex der Atomsubstanz bedeutet, die einfache Beziehung:[1]

$$\frac{n-1}{d} = \frac{\nu-1}{\delta}.$$

Für gewöhnlich ist $n > 1$, wobei $\nu > n$ sein muss. Bei einigen Metallen (Silber, Gold, Kupfer) fand aber Kundt[2] $n < 1$, woraus für dieselben $\nu < n$, daher

$$\frac{d}{\delta} > 1-n$$

und als Verhältniss des für den Äther freibleibenden Theiles zum ganzen Körpervolumen

$$\frac{\delta-d}{\delta} < n$$

folgt. Bei Silber ist für weisses Licht im Mittel aus vielen Bestimmungen

$$n = 0\cdot 27;$$

man sieht also, dass bei diesem bestleitenden Metalle die Summe der leeren Räume zwischen den Atomen jedenfalls weniger als 0·27 des Körpervolumens beträgt. Bei so geringer Dicke der zwischen den Atomflächen übrig bleibenden Ätherschichten würde es begreiflich sein, dass eine locale Wärmedifferenz weit schneller durch Atombewegung als durch innere Strahlung sich ausgleicht.

Die oben abgeleitete, von Weber empirisch für durchsichtige Flüssigkeiten von gewöhnlicher Temperatur aufgestellte Formel betreffend, erlaube ich mir noch die folgende Bemerkung beizufügen.

---

[1] Die Schlüsse, welche sich aus dieser Gleichung ergeben, sind in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Ihr gemäss erklärt sich auf einfache Weise auch die Mitbewegung des Lichtes in einem bewegten durchsichtigen Mittel.

[2] Wiedemann's Annalen, Bd. 34, S. 469.

Das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten scheint im Allgemeinen durch ihre Erstarrung sich nur wenig zu ändern. Wenn dem wirklich so ist, dann wird die genannte Formel mit einiger Annäherung auch für nichtmetallische feste Körper gelten, und es dürfte bei solchen, weil hier Strömungen absolut ausgeschlossen sind, die diesfalls noch offene Frage nach dem Einflusse der Temperatur auf das Wärmeleitungsvermögen, welcher nach Weber bei Flüssigkeiten auffallend gross wäre, am sichersten eine definitive Lösung finden. Da übrigens dieses Vermögen, es mag wie immer bedingt sein, durch Abnahme der Temperatur selbstverständlich in keinem Falle Null werden kann, so ist, wie ich glaube, eine erheblich starke Veränderlichkeit desselben mit der Temperatur bei nichtmetallischen festen Körpern und bei den entsprechenden Flüssigkeiten, wenn sie von ihrem Erstarrungspunkte nicht allzu weit entfernt sind, von vornherein unwahrscheinlich.

Über die Äquivalenz der reducirten binären quadratischen Formen von positiver Determinante

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

In dem Folgenden soll ein einfacher Beweis für den Hauptsatz der Lehre von den reducirten binären quadratischen Formen positiver Determinante — dass zwei reducirte Formen nur dann äquivalent sein können, wenn sie derselben Periode angehören — gegeben werden. Dieser Satz wird in den Disquisitiones arithmeticae[1] von Gauss etwas umständlich bewiesen, so dass Dirichlet[2] sich veranlasst sah, einen einfacheren Beweis zu suchen.

1.

Man kann eine reducirte Form von positiver nicht quadratischer Determinante D folgendermassen definiren. Bezeichnet d die grösste in $\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl und $\bar{a}$ den Zahlenwerth von a, so wird die Form (a, b, c) reducirt genannt, wenn

$$0 \leqq d-b < \bar{a} \leqq d+b$$

ist.

Die äusseren Coëfficienten a, c einer reducirten Form (a, b, c) haben der Gleichung

$$a.c = b^2-D$$

zufolge immer entgegengesetzte Vorzeichen.

[1] Art. 193.

[2] Vereinfachung der Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante (Berliner Akad. 1854).

Wenn (a, b, c) eine reducirte Form ist, so ist (c, b, a) ebenfalls eine solche. Denn man hat

$$\bar{a}.\bar{c} = D - b^2$$

und daher einerseits

$$\bar{a}.\bar{c} < (d+1)^2 - b^2 = (d-b+1)(d+b+1);$$

da aber $d-b < \bar{a}$ ist, so folgt

$$d-b+1 \leqq \bar{a}$$

$$\bar{a}.\bar{c} < \bar{a}(d+b+1),$$

also

$$\bar{c} < d+b+1$$

$$\leqq d+b.$$

Anderseits ist

$$\bar{a}\bar{c} > d^2 - b^2 = (d-b)(d+b);$$

da aber $d+b \geqq \bar{a}$ ist, so folgt

$$\bar{a}.\bar{c} > (d-b)\bar{a},$$

also

$$\bar{c} > d-b.$$

Es ist demnach

$$0 \leqq d-b < \bar{c} \leqq d+b.$$

2.

Jede reducirte Form (a, b, c) besitzt eine und nur eine nach rechts benachbarte reducirte Form und ebenso eine einzige nach links benachbarte reducirte Form.

Soll nämlich (a', b', c') eine nach rechts benachbarte Form von (a, b, c) sein, so muss

$$a' = c \qquad b'+b \equiv 0 \pmod{c}$$

sein. Soll überdies (a', b', c') reducirt sein, so muss

$$0 \leqq d-b' < \bar{c}$$

sein. Da aber

$$d-b' \equiv d+b \pmod{c}$$

ist, so muss $d-b'$ der echte, d. h. nicht negative und den Zahlenwerth des Moduls nicht erreichende Rest von $d+b$ in Bezug auf c sein. Diese Bedingung genügt aber auch, da die Form $\left(c, b', \frac{b'^2-D}{c}\right)$ dann eine reducirte ist. Denn man hat zunächst

$$0 \leqq d-b' < \bar{c}.$$

Da ferner $\bar{c} \leqq d+b$ ist, so folgt

$$d+b-(d-b') = b+b' > 0$$

und $b+b'$ muss als Vielfaches von c wenigstens $= \bar{c}$ sein. Man hat also

$$\bar{c} \leqq b+b' \leqq d+b'.$$

Da jede nach links benachbarte reducirte Form von (a, b, c) durch Vertauschung der äusseren Coëfficienten in eine nach rechts benachbarte reducirte Form von (c, b, a) übergeht, so gibt es also auch nur eine nach links benachbarte reducirte Form von (a, b, c) und dieselbe geht aus der nach rechts benachbarten reducirten Form von (c, b, a) durch Vertauschung der äusseren Coëfficienten hervor.

Geht man von irgend einer reducirten Form f aus, bestimmt ihre nach rechts benachbarte reducirte Form f_1, hierauf wieder die nach rechts benachbarte reducirte Form f_2 von f_1, dann die nach rechts benachbarte reducirte Form f_3 von f_2 und fährt so fort, so ergibt sich eine beliebig weit fortsetzbare Reihe von Formen

$$f, f_1, f_2, f_3, \ldots,$$

welche die Formenreihe der Form f genannt wird. Setzt man diese Reihe so weit fort, dass die Anzahl ihrer Glieder die Anzahl aller reducirten Formen übersteigt, so muss sich wenigstens eine Form wiederholt haben. Die erste sich wiederholende Form f_n kann nur f sein, da sich sonst f_{n-1} als nach links benachbarte reducirte Form von f_n auch schon wiederholt haben müsste. Von f_n an wiederholen sich dann alle Formen in derselben Reihenfolge, so dass allgemein $f_\lambda = f_\mu$ ist, wenn $\mu \equiv \nu$ (mod$n$.). Man nennt den Inbegriff der Formen

$$f, f_1, f_2, \ldots f_{n-1},$$

welche alle unter einander verschieden sind, eine Periode, und zwar die Periode der Form f. Die Anzahl der Formen einer Periode ist immer gerade, da die ersten Coëfficienten der Formen $f, f_1, f_2, \ldots$ abwechselnde Vorzeichen haben. Jede der Formen $f, f_1, f_2, \ldots$ hat dieselbe Periode, wenn man von der Reihenfolge absieht.

Alle reducirten Formen einer positiven Determinante bilden eine oder mehrere getrennte Perioden.

Man gehe von irgend einer reducirten Form aus und stelle ihre Periode P auf. Umfasst dieselbe noch nicht alle reducirten Formen, so stelle man wieder die Periode Q irgend einer nicht in P enthaltenen reducirten Form auf. Die Perioden P, Q haben dann keine Form gemein und können entweder alle reducirten Formen umfassen oder nicht. Im zweiten Falle würde man eine dritte Periode aufstellen und so fortfahren, bis alle reducirten Formen erschöpft sind.

3.

Alle Formen einer Periode sind untereinander äquivalent, da je zwei benachbarte reducirte Formen es sind.

Umgekehrt gehören zwei äquivalente reducirte Formen immer derselben Periode an.

Der Beweis dieses Satzes soll hier mittelst folgender Hilfssätze geführt werden.

I. Wenn zwei Formen $(a, b, -c)$ und $(a', b', -c')$ mit positiven ersten und negativen dritten Coëfficienten äquivalent sind und die erste durch die Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y' \qquad\qquad y = \gamma x' + \delta y'$$

in die zweite übergeht, so ist das Product $\alpha\delta$ immer positiv.

Multiplicirt man die zweite und dritte Transformationsgleichung

$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) - c\gamma\delta$$
$$-c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta - c\delta^2$$

beziehungsweise mit β, $-\alpha$ und addirt, so ergibt sich der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

zufolge

$$b'\beta+c'\alpha = c\delta-b\beta. \tag{1}$$

Anderseits lässt sich die dritte Transformationsgleichung in der Gestalt

$$2(c\delta-b\beta)\delta = c'+a\beta^2+c\delta^2 \tag{2}$$

schreiben. Da aber auch $(a', b', -c')$ durch die reciproke Substitution

$$x' = \delta x-\beta y, \qquad y' = -\gamma x+\alpha y$$

in $(a, b, -c)$ übergeht, so lässt sich der auf diese Substitution sich beziehenden dritten Transformationsgleichung

$$-c = a'\beta^2-2b'\beta\alpha-c'\alpha^2$$

in ähnlicher Weise die Gestalt

$$2(c'\alpha+b'\beta)\alpha = c+a'\beta^2+c'\alpha^2 \tag{3}$$

geben.

Durch Multiplication der Gleichungen (2), (3) ergibt sich

$$4(c\delta-b\beta)(b'\beta+c'\alpha)\alpha\delta = (c'+a\beta^2+c\delta^2)(c+a'\beta^2+c'\alpha^2)$$

und es wird nach (1)

$$4(c\delta-b\beta)^2\alpha\delta = (c'+a\beta^2+c\delta^2)(c+a'\beta^2+c'\alpha^2) > 0.$$

Hieraus folgt aber

$$\alpha\delta > 0.$$

II. Es sei

$$f_0 = (a_0, b_0, -a_1)$$

eine reducirte Form mit positivem ersten Coëfficienten,

$$f_{i-1} = ((-1)^{i-1}a_{i-1}, b_{i-1}, (-1)^i a_i)$$

die i^{te} Form in der Formenreihe von f_0, h_i die ganze positive Zahl

$$h_i = \frac{b_i+b_{i+1}}{a_{i+1}}$$

und A_i, B_i Zähler und Nenner des $i$ten Näherungswerthes des regelmässigen Kettenbruches

$$(h_0, h_1, h_2, \ldots).$$

Bezeichnet man die Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y' \qquad y = \gamma x' + \delta y'$$

ohne Rücksicht auf die Unbestimmten x, y, x', y' mit $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ und setzt zur Abkürzung

$$S_m = ((-1)^m B_{m-1}, B_m; (-1)^m A_{m-1}, A_m),$$

so haben die Substitutionen

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$$

folgende Eigenschaften.

Die Substitution S_m verwandelt f_0 in f_m und hat die Determinante 1.

Jede Substitution

$$\mathfrak{S} = (\alpha, \beta; \gamma, \delta)$$

von der Determinante 1, welche keinen negativen Coëfficienten enthält und f_0 in eine reducirte Form

$$F = (A, B, -A')$$

mit positivem ersten Coëfficienten verwandelt, muss mit einer der Substitutionen $S_0, S_2, S_4, \ldots$ von geradem Stellenzeiger zusammenfallen.

Wird in üblicher Weise

$$A_{-1} = 0, \qquad B_{-1} = 1,$$
$$A_0 = 1, \qquad B_0 = 0$$

gesetzt, so verwandelt die Substitution

$$S_0 = (1, 0; 0, 1)$$

in der That f_0 in f_0. Es genügt daher noch darzuthun, dass S_{m+1} die Form f_0 in f_{m+1} verwandelt, wenn S_m dieselbe in f_m überführt.

Da f_m in f_{m+1} durch die Substitution

$$(0, (-1)^m; (-1)^{m+1}, h_m)$$

übergeht, so verwandelt die zusammengesetzte Substitution

$$S_m(0, (-1)^m; (-1)^{m+1}, h_m) =$$
$$= ((-1)^{m+1}B_m, B_{m-1}+h_m B_m; (-1)^{m+1}A_m, A_{m-1}+h_m A_m)$$

f_0 in f_{m+1}; diese zusammengesetzte Substitution fällt aber den Gleichungen

$$A_{m+1} = h_m A_m + A_{m-1}$$
$$B_{m+1} = h_m B_m + B_{m-1}$$

zufolge mit S_{m+1} zusammen.

Hieraus folgt zugleich, dass die Determinante von S_{m+1} mit der von S_m und daher die Determinanten aller Substitutionen $S_1, S_2, S_3, \dots$ mit der von S_0 zusammenfallen, welche $= 1$ ist.

Versteht man unter S_m^{-1} die reciproke Substitution von S_m und setzt

$$S_m^{-1}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_m$$
$$\mathfrak{S}_{2m} = (\alpha_m, \beta_m; \gamma_m, \delta_m),$$

so verwandelt $\mathfrak{S}_m$ die Form f_m in F und es wird

$$\mathfrak{S}_{2m-1} = (-\gamma_m, -\delta_m; \alpha_{m-1}, \beta_{m-1})$$
$$\gamma_m = \gamma B_{2m-1} - \alpha A_{2m-1} \tag{4}$$
$$\alpha_m = \alpha A_{2m} - \gamma B_{2m}. \tag{5}$$

Da $\mathfrak{S}_{2m}$ die Form f_{2m} in F verwandelt und die ersten Coëfficienten dieser Formen positiv, die dritten negativ sind, so ist $\alpha_m \delta_m$ nach I positiv. Aus demselben Grunde ist $\alpha_m \delta_{m+1}$ positiv, weil $\mathfrak{S}_{2m+1}$ die Form

$$f_{2m+1} = (-a_{2m+1}, b_{2m+1}, a_{2m+2})$$

in F, also die Substitution

$$(0, 1; -1, 0)\mathfrak{S}_{2m+1} = (\alpha_m, \beta_m; \gamma_{m+1}, \delta_{m+1})$$

die Form $(a_{2m+2}, -b_{2m+1}, -a_{2m+1})$ in F verwandelt. Die Zahlen

$$\alpha_0, \delta_0, \alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2, \dots$$

sind also alle von Null verschieden und besitzen dasselbe Vorzeichen, und zwar das positive, weil $\alpha_0 = \alpha$ positiv ist.

Hieraus folgt, dass die Differenz $\gamma_m - \gamma_{m+1}$, welche nach (4), (5) die Gestalt

$$(A_{2m+1} - A_{2m-1})\alpha - (B_{2m+1} - B_{2m-1})\gamma =$$
$$= h_{2m}(A_{2m}\alpha - B_{2m}\gamma) = h_{2m}\alpha_m$$

annimmt, positiv ist. Man hat also

$$\gamma_0 > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots$$

Da überdies $\gamma_0 = \gamma$ nach der Annahme nicht negativ ist, so gibt es in der Zahlenreihe

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

eine letzte nicht negative Zahl γ_λ.

Das Product $\gamma_{\lambda+1}\beta_\lambda\gamma_\lambda$ ist dann sowohl in der Gestalt $\gamma_{\lambda+1}(\alpha_\lambda\delta_\lambda - 1)$, als auch in der Gestalt $\gamma_\lambda(\alpha_\lambda\delta_{\lambda+1} - 1)$ darstellbar und kann daher weder positiv noch negativ sein, weil einerseits $\gamma_{\lambda+1}$ negativ und $\alpha_\lambda\delta_\lambda - 1$ nicht negativ, und anderseits weder γ_λ noch $\alpha_\lambda\delta_{\lambda+1} - 1$ negativ ist. Es muss also $\gamma_{\lambda+1}\beta_\lambda\gamma_\lambda$ und daher auch $\beta_\lambda\gamma_\lambda = 0$ sein.

Dann muss aber

$$\beta_\lambda = \gamma_\lambda = 0, \qquad \alpha_\lambda = \delta_\lambda = 1$$

sein. Denn es ist $\alpha_\lambda\delta_\lambda = 1$, also $\alpha_\lambda = \delta_\lambda = 1$ und die zweite Transformationsgleichung, welche sich auf die Umwandlung von $f_{2\lambda}$ durch $\mathfrak{S}_{2\lambda}$ in F bezieht, lautet:

$$B = a_{2\lambda}\alpha_\lambda\beta_\lambda + b_{2\lambda}(\alpha_\lambda\delta_\lambda + \beta_\lambda\gamma_\lambda) - a_{2\lambda+1}\gamma_\lambda\delta_\lambda$$
$$= a_{2\lambda}\beta_\lambda + b_{2\lambda} - a_{2\lambda+1}\gamma_\lambda,$$

oder

$$d - b_{2\lambda} - (d - B) = a_{2\lambda}\beta_\lambda - a_{2\lambda+1}\gamma_\lambda.$$

Da nun $\beta_\lambda\gamma_\lambda = 0$ ist, so muss entweder $\beta_\lambda = 0$ oder $\gamma_\lambda = 0$ sein. Ist $\beta_\lambda = 0$, so wird

$$A' = a_{2\lambda+1},$$
$$d - b_{2\lambda} - (d - B) = -a_{2\lambda+1}\gamma_\lambda;$$

weil aber die Zahlen $d-b_{2\lambda}$, $d-B$ beide nicht negativ und kleiner als $a_{2\lambda+1}$ oder A' sind, so kann ihre Differenz nur durch $a_{2\lambda+1}$ theilbar sein, wenn sie $=0$ ist, und es muss also $\gamma_\lambda = 0$ sein. Ist $\gamma_\lambda = 0$, so folgt ähnlich

$$A = a_{2\lambda}$$
$$d-b_{2\lambda}-(d-B) = a_{2\lambda}\beta_\lambda = 0,$$

weil die Zahlen $d-b_{2\lambda}$, $d-B$ beide nicht negativ und kleiner als $a_{2\lambda}$ oder A sind und ihre Differenz durch A theilbar ist, und es muss $\beta_\lambda = 0$ sein.

Wenn aber die Substitution $\mathfrak{S}_{2\lambda} = S_{2\lambda}^{-1}\mathfrak{S}$ mit $(1, 0; 0, 1)$ zusammenfällt, so ist

$$\mathfrak{S} = S_{2\lambda}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$F = f_{2\lambda}$$

und die Form F ist also eine der Formen der Periode von f_0.

Insbesondere sind alle Substitutionen $\mathfrak{S}$, welche keinen negativen Coëfficienten enthalten und eine reducirte Form f_0 mit positivem ersten Coëfficienten in sich selbst verwandeln, durch die Formel

$$\mathfrak{S} = S_{kn} = (B_{kn-1}, B_{kn}; A_{kn-1}, A_{kn})$$

gegeben, wo n die Anzahl der Formen der Periode von f_0 bezeichnet und k alle Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots$ annehmen kann. Denn eine solche Substitution verwandelt f_0 in eine reducirte Form f_0 mit positivem ersten Coëfficienten und es muss daher $\mathfrak{S} = S_{2\lambda}$ sein. Ist aber ρ der echte Rest von 2λ in Bezug auf den Modul n, so verwandelt $S_{2\lambda}$ die Form f_0 in $f_{2\lambda} = f_\rho$ und es muss also $\rho = 0$, $2\lambda = kn$ sein.

Dies vorausgeschickt, seien irgend zwei äquivalente reducirte Formen f und F gegeben und es gehe f in F durch die Substitution $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ über. Um darzuthun, dass diese Formen derselben Periode angehören, darf unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass dieselben positive erste Coëfficienten besitzen, da man andernfalls, ohne an dem Inhalte des zu beweisenden Satzes etwas zu ändern, f oder F, oder f und F

durch ihre benachbarten reducirten Formen ersetzen könnte. Das Product $\alpha\delta$ ist dann positiv und man darf α, δ positiv annehmen, da im Falle eines negativen α und δ die Substitution $(-\alpha, -\beta; -\gamma, -\delta)$ ebenfalls f in F verwandelt.

Ist nun keine der Zahlen β, γ negativ, so enthält die Substitution $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ keinen negativen Coëfficienten und es muss daher F nach II mit einer Form der Periode von f zusammenfallen.

Ist dagegen eine der Zahlen β, γ negativ, so kann die andere, der Gleichung $\beta\gamma = \alpha\delta - 1$ zufolge, nicht positiv sein und die reciproke Substitution $(\delta, -\beta; -\gamma, \alpha)$ enthält keinen negativen Coëfficienten. Da dieselbe F in f verwandelt, so muss f nach II in der Periode von F vorkommen.

Über den quadratischen Reciprocitätssatz und die Summen von Gauss

von

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

1.

Bezeichnet p eine ungerade Primzahl, a eine nicht durch p theilbare Zahl und μ die Anzahl derjenigen echten, d. h. nicht negativen und p nicht erreichenden Reste der Zahlen

$$a, 2a, 3a, \ldots \frac{p-1}{2}a$$

in Bezug auf den Modul p, welche $> \frac{1}{2}p$ sind, so besteht der Hilfssatz, welchen Gauss[1] zum Beweise des quadratischen Reciprocitätssatzes aufgestellt hat, bekanntlich in der Gleichung

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\mu}.$$

Ein Hilfssatz von gleicher Verwendbarkeit ist der folgende. Sind

$$r_a, r_{2a}, r_{3a}, \ldots r_{(p-1)a}$$

die echten Reste der Zahlen

$$a, 2a, 3a, \ldots (p-1)a$$

in Bezug auf den Modul p und $\Pi(x_1, x_2, \ldots x_{p-1})$ das Differenzenproduct

[1] Theorematis arithmetici demonstratio nova 1808.

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_{p-1}-x_1)$$
$$(x_3-x_2)\dots(x_{p-1}-x_2)$$
$$\dots\dots$$
$$(x_{p-1}-x_{p-2}),$$

so ist

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\frac{\Pi(r_a, r_{2a},\dots r_{(p-1)a})}{\Pi(1, 2,\dots p-1)}. \tag{1}$$

Um diesen Satz zu beweisen, ist zunächst zu bemerken, dass die Zahlen $r_a, r_{2a},\dots r_{(p-1)a}$ bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen $1, 2,\dots p-1$ zusammenfallen und die Producte

$$\Pi(r_a, r_{2a},\dots r_{(p-1)a}),\quad \Pi(1, 2,\dots p-1)$$

demzufolge sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden können. Es ist also

$$\frac{\Pi(r_a, r_{2a},\dots r_{(p-1)a})}{\Pi(1, 2,\dots p-1)}=\varepsilon, \tag{2}$$

wo ε den Werth $+1$ oder -1 hat.

Anderseits ist den Congruenzen

$$\begin{aligned} r_a &\equiv a \\ r_{2a} &\equiv 2a \\ &\dots\dots \\ r_{(p-1)a} &\equiv (p-1)a \qquad (\text{mod. } p) \end{aligned}$$

zufolge

$$\Pi(r_a, r_{2a},\dots r_{(p-1)a})\equiv \Pi(a, 2a,\dots (p-1)a) \qquad (\text{mod. } p);$$

es ist aber

$$\Pi(a, 2a,\dots (p-1)a)=a^{\frac{1}{2}p(p-1)}\,\Pi(1, 2,\dots p-1)$$
$$a^p\equiv a \qquad (\text{mod. } p)$$

also

$$a^{\frac{1}{2}p(p-1)}\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(\frac{a}{p}\right) \qquad (\text{mod. } p)$$

und

$$\Pi(a, 2a,\dots (p-1)a)\equiv\left(\frac{a}{p}\right)\Pi(1, 2,\dots p-1) \qquad (\text{mod. } p).$$

Man hat demnach

$$\Pi(r_a, r_{2a}, \ldots r_{(p-1)a}) \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \Pi(1, 2, \ldots p-1) \qquad (\text{mod. } p).$$

Nach (2) folgt hieraus

$$\Pi(1, 2, \ldots p-1) \left(\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right)\right) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Da aber $\Pi(1, 2, \ldots p-1)$ nicht durch p theilbar ist, so muss

$$\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

und daher

$$\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right) = 0$$

sein, weil $\varepsilon - \left(\frac{a}{p}\right)$ ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $< p$ ist.

Man kann die Gleichung (1) auch so aussprechen:

Ist ν die Anzahl der negativen Factoren des Productes $\Pi(r_a, r_{2a}, \ldots r_{(p-1)a})$, so ist

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\nu}.$$

Die Substitution (Permutation) $\begin{pmatrix} r_a, r_{2a}, \ldots r_{(p-1)a} \\ 1, 2, \ldots p-1 \end{pmatrix}$ ist positiv oder negativ, je nachdem $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$ oder $= 1$ ist.

2.

Bezeichnet a eine positive Zahl und $E(y)$ die grösste in y enthaltene ganze Zahl, so ist

$$r_{ma} = ma - pE\left(\frac{ma}{p}\right).$$

Ist daher $m > n$, so wird

$$r_{ma} = ma - pE\left(\frac{ma}{p}\right)$$

$$r_{na} = na - pE\left(\frac{na}{p}\right)$$

$$r_{(m-n)a} = (m-n)a - pE\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)$$

und man hat

$$r_{ma} - r_{na} = r_{(m-n)a} - p\left(E\left(\frac{ma}{p}\right) - E\left(\frac{na}{p}\right) - E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)\right).$$

Hienach hat der Ausdruck

$$E\left(\frac{ma}{p}\right) - E\left(\frac{na}{p}\right) - E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)$$

den Werth 0 oder 1, je nachdem die Differenz $r_{ma} - r_{na}$ positiv oder negativ ist, und die Anzahl ν aller negativen Factoren des Productes $\Pi(r_a, r_{2a}, \ldots r_{(p-1)a})$ ist die Summe der Ausdrücke

$$E\left(\frac{ma}{p}\right) - E\left(\frac{na}{p}\right) - E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right), \tag{3}$$

welche allen Zahlenpaaren m, n entsprechen, die sich aus den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ bilden lassen und in denen $m > n$ ist.

Da die Zahl $E\left(\frac{ma}{p}\right)$ die Grenze $a-1$ nicht überschreitet, wenn $m < p$ ist, so kann dieselbe in bekannter Weise als Anzahl der negativen Factoren des Productes

$$(p - ma)(2p - ma) \ldots ((a-1)p - ma) = \Pi(sp - ma)$$

aufgefasst werden, wo s von 1 bis $a-1$ läuft. Ähnliches gilt von $E\left(\frac{na}{p}\right)$ und $E\left(\frac{(m-n)a}{p}\right)$. Der Ausdruck (3) ist demnach bis auf ein Vielfaches von 2 die Anzahl der negativen Factoren des Productes

$$\Pi(sp - ma) . \Pi(sp - na) . \Pi(sp - (m-n)a)$$

und ν fällt demzufolge bis auf ein Vielfaches von 2 mit der Anzahl der negativen Factoren des Productes

$$\Pi(sp-2a)^1 . \Pi(sp-3a)^2 \ldots \Pi(sp-(p-1)a)^{p-2}$$
$$\times \Pi(sp-a)^{2(p-2)} . \Pi(sp-2a)^{2(p-3)} \ldots \Pi(sp-(p-2)a)^2$$

zusammen.

Das Vorzeichen des Legendre'schen Symbols $\left(\frac{a}{p}\right)$ stimmt also mit dem Vorzeichen des Productes

$$\Pi(sp-2a) . \Pi(sp-4a) \ldots \Pi(sp-(p-1)a)$$

oder des Productes

$$\Pi(sp-2ta)$$

überein, in welchem s von 1 bis $a-1$ und t von 1 bis $\frac{p-1}{2}$ laufen.

Setzt man $a = 2$, so fällt das Vorzeichen von $\left(\frac{2}{p}\right)$ mit dem des Productes

$$(p-4)(p-8) \ldots \left(p-4 \cdot \frac{p-1}{2}\right)$$

zusammen. Dieses Product hat $\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{4}\right)$ negative Factoren. Da aber

$$\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p-(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{4}$$

$$1 \equiv \frac{p+(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2} \qquad (\text{mod. } 2)$$

ist, so ergibt sich durch Multiplication

$$\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{p}{4}\right) \equiv \frac{1}{8}(p^2-1) \qquad (\text{mod. } 2)$$

und es wird

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Ist q eine von p verschiedene ungerade Primzahl und trennt man die Factoren des Productes $\Pi(sp-2tq)$, in welchen s gerade ist, von denen, in welchen s ungerade ist, indem man, einmal $s=2u$, einmal $s=q-2u$, setzt, so ergibt sich

$$\Pi(sp-2tq)=\Pi(2up-2tq).\Pi(pq-2up-2tq),$$

wo t die Werthe $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ und u die Werthe $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(q-1)$ durchläuft, und das Vorzeichen von $\left(\frac{q}{p}\right)$ fällt mit dem des Productes

$$\Pi(2up-2tq).\Pi(pq-2up-2tq)$$

zusammen.

Vertauscht man p mit q, so stimmt das Vorzeichen von $\left(\frac{p}{q}\right)$ mit dem des Productes

$$\Pi(2tq-2up).\Pi(pq-2tq-2up)$$

überein, in welchem t und u dieselben Werthe durchlaufen, Das Product $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$ hat daher das Vorzeichen des Productes

$$\Pi(2up-2tq).\Pi(2tq-2up).\Pi(pq-2tq-2up)^2$$
$$=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.\Pi(2up-2tq)^2\Pi(pq-2tq-2up)^2,$$

und es wird

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

3.

Es seien x, z Veränderliche und man setze

$$(z-x)(z-x^2)\ldots(z-x^{p-1})-(1+z+z^2+\ldots+z^{p-1})=F(x)$$
$$1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}=X.$$

Wird der Rest, welcher bei der Division einer ganzen Function φ von x durch eine andere, f, bleibt und den Grad von f in x nicht erreicht, als echter Rest von φ in Bezug auf f

und eine durch f theilbare ganze Function von x kurz mit $[f)$ bezeichnet, so ist der echte Rest von $F(x)$ in Bezug auf X bekanntlich $= 0$.

Ist nämlich m eine der Zahlen $1, 2, \ldots p-1$, so stimmen die echten Reste

$$\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$$

der Zahlen

$$m, 2m, \ldots (p-1)m$$

bis auf die Reihenfolge mit den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ überein und es ist

$$\begin{aligned} x^m &= x^\alpha + [x^p - 1) \\ x^{2m} &= x^\beta + [x^p - 1) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^{(p-1)m} &= x^\varepsilon + [x^{p-1} - 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Hieraus folgt

$$F(x^m) = F(x) + [x^p - 1) \tag{5}$$

Ist nun

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1}$$

der echte Rest von $F(x)$ in Bezug auf $x^p - 1$, so hat man

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} + [x^p - 1) \tag{6}$$

und daher

$$F(x^m) = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^{2m} + \ldots + a_{p-1} x^{(p-1)m} + [x^{mp} - 1).$$

Nach (4), (5) ist also auch

$$F(x) = a_0 + a_1 x^\alpha + a_2 x^\beta + \ldots + a_\varepsilon x^\varepsilon + [x^p - 1). \tag{7}$$

Zieht man die Identität (7) von (6) ab, so ergibt sich

$$(a_\alpha - a_1) x^\alpha + (a_\beta - a_2) x^\beta + \ldots + (a_\varepsilon - a_{p-1}) x^\varepsilon = [x^p - 1)$$

und hieraus

$$a_\alpha - a_1 = a_\beta - a_2 = \ldots = a_\varepsilon - a_{p-1} = 0.$$

Insbesondere ist also für jedes m

$$a_\alpha = a_m = a_1$$

und demzufolge

$$F(x) = a_0 + a_1(x+x^2+\dots+x^{p-1}) + [x^p-1)$$
$$= a_0 - a_1 + [X).$$

Da $a_0 - a_1$ eine ganze Function von z ist, welche den Grad $p-1$ nicht erreicht, so kann man

$$a_0 - a_1 = b_0 + b_1 z + \dots + b_{p-2} z^{p-2}$$

setzen und erhält für $z = x$

$$-X = b_0 + b_1 x + \dots + b_{p-2} x^{p-2} + [X)$$

oder

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_{p-2} x^{p-2} = [X).$$

Hieraus folgt aber

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{p-2} = 0$$

und

$$F(x) = [X).$$

Für $z = 1$ wird insbesondere

$$p = (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{p-1}) + [X). \tag{8}$$

4.

Es sei

$$f(x) = \Pi(x, x^2, \dots x^{p-1})$$
$$= (x^2-x)(x^3-x)\dots(x^{p-1}-x)$$
$$(x^3-x^2)\dots(x^{p-1}-x^2)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(x^{p-1}-x^{p-2})$$

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m) = P_m.$$

Da

$$x^a - x^b = -x^b(1-x^{a-b})$$

und

$$p-2+2(p-3)+3(p-4)+\dots+(p-2)1 = \frac{1}{6}p(p-1)(p-2)$$

ist, so ergibt sich

$$f(x) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-2)(p-1)} x^{\frac{1}{6}p(p-1)(p-2)} P_1 P_2 \dots P_{p-2}.$$

Da ferner

$$P_m = (-x)(1-x^{p-1})(-x^2)(1-x^{p-2})\ldots(-x^m)(1-x^{p-m})+[X]$$

$$= (-1)^m x^{\frac{1}{2}m(m+1)}(1-x^{p-1})(1-x^{p-2})\ldots(1-x^{p-m})+[X]$$

ist, so wird nach (8)

$$P_m P_{p-1-m} = (-1)^m x^{\frac{1}{2}m(m+1)} P_{p-1} + [X] \qquad (9)$$

$$= (-1)^m p x^{\frac{1}{2}m(m+1)} + [X]$$

und man hat

$$P_1 P_2 \ldots P_{p-2} = P_1 P_{p-2} . P_2 P_{p-3} \ldots P_{\frac{p-3}{2}} P_{\frac{p+1}{2}} . P_{\frac{p-1}{2}}$$

$$= (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}} p^{\frac{p-3}{2}} x^{\frac{1}{48}(p^2-1)(p-3)} P_{\frac{p-1}{2}} + [X].$$

Überdies ist

$$\frac{1}{2}(p-1)(p-2) + \frac{1}{8}(p-1)(p-3) \equiv \frac{1}{2}(p-1) + $$

$$+ \frac{1}{8}(p-1)(p-3) \qquad (\text{mod. } 2)$$

$$\equiv \frac{1}{8}(p^2-1) \qquad (\text{mod. } 2)$$

$$\frac{1}{6}p(p-1)(p-2) + \frac{1}{48}(p^2-1)(p-3) = \frac{(p-1)(p^2-1)}{16} +$$

$$+ \frac{(p-1)(p-3)}{8} . p$$

$$\equiv \frac{1}{2}(p-1) . \frac{1}{8}(p^2-1) \qquad (\text{mod. } p).$$

Es wird also

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} x^{\frac{1}{2}(p-1) . \frac{1}{8}(p^2-1)} P_{\frac{p-1}{2}} + [X]. \qquad (10)$$

Aus (9) folgt dann

$$f(x)^2 = p^{p-3} x^{(p-1)\cdot\frac{1}{8}(p^2-1)} P^2_{\frac{p-1}{2}} + [X) \qquad (11)$$

$$= (-1)^{\frac{(p-1)}{2}} p^{p-2} + [X).$$

Ferner ist, wenn m eine nicht durch p theilbare Zahl bezeichnet,

$$f(x^m) = \Pi(x^m, x^{2m}, \ldots x^{(p-1)m})$$
$$= \Pi(x^\alpha, x^\beta, \ldots x^\varepsilon) + [X),$$

wo $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ die echten Reste von $m, 2m, \ldots (p-1)m$ in Bezug auf p bedeuten.

Es ist aber nach 1

$$\Pi(x^\alpha, x^\beta, \ldots x^\varepsilon) = \left(\frac{m}{p}\right) \Pi(x, x^2, \ldots x^{p-1})$$

und sonach

$$f(x^m) = \left(\frac{m}{p}\right) f(x) + [X). \qquad (12)$$

5.

Mit Hilfe der Function $f(x)$ lässt sich der quadratische Reciprocitätssatz ähnlich wie bei Gauss beweisen.

Man hat

$$f(x)^q - f(x^q) = qG,$$

wo G in x ganz und ganzzahlig ist. Nach (12) folgt hieraus

$$f(x)^q - \left(\frac{q}{p}\right) f(x) = qG + [X).$$

Wird mit $(-1)^{\frac{p-1}{2}} f(x)$ multiplicirt, so ergibt sich

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} f^2(x) \left(f(x)^{2\cdot\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right)\right) = \pm qfG + [X),$$

welche Identität nach (11) die Form

$$p^{p-2}\left((-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{1}{2}(q-1)(p-2)} - \left(\frac{q}{p}\right)\right) = \pm qfG + [X)$$

annimmt. Da hienach der echte Rest der Zahl

$$p^{p-2}\left((-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{1}{2}(q-1)(p-2)} - \left(\frac{q}{p}\right)\right)$$

in Bezug auf X durch q theilbar ist, so gilt dasselbe von dieser Zahl selbst. Dann ist aber auch

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{1}{2}(q-1)(p-2)} - \left(\frac{q}{p}\right) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } q).$$

Da ferner

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{p}{q}\right) \qquad (\text{mod. } q),$$

also

$$p^{\frac{1}{2}(q-1)(p-2)} \equiv \left(\frac{p}{q}\right)^{p-2} = \left(\frac{p}{q}\right) \qquad (\text{mod. } q)$$

ist, so wird

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) - \left(\frac{q}{p}\right) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } q)$$

und daher auch

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) - \left(\frac{q}{p}\right) = 0.$$

6.

Man kann aber auch die Summen von Gauss mit Hilfe der Function $f(x)$ ermitteln.

Ist

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

der echte Rest der Function

$$x^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{8}(p^2-1)} P_{\frac{p-1}{2}}$$

in Bezug auf X, so wird

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots = (b_1 - b_0)x + (b_2 - b_0)x^2 + \dots + b_0 X$$

und $f(x)$ nimmt nach (10) die Gestalt

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} (c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{p-1} x^{p-1}) + [X]$$

an. Ersetzt man x durch x^m, wo m eine der Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ ist, und bezeichnet die echten Reste der Zahlen

$$m, 2m, \ldots (p-1)m$$

in Bezug auf den Modul p mit

$$\alpha, \beta, \ldots \varepsilon,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 + x^m + x^{2m} + \ldots + x^{(p-1)m} &= 1 + x^\alpha + x^\beta + \ldots + x^\varepsilon + [X) \\ &= [X) \end{aligned}$$

$$c_1 x^m + c_2 x^{2m} + \ldots + c_{p-1} x^{(p-1)m} = c_1 x^\alpha + c_2 x^\beta + \ldots + c_{p-1} x^\varepsilon + [X)$$

und demzufolge

$$f(x^m) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} (c_1 x^\alpha + c_2 x^\beta + \ldots + c_{p-1} x^\varepsilon) + [X).$$

Zieht man von dieser Identität die Identität

$$\left(\frac{m}{p}\right) f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} \left(\left(\frac{m}{p}\right) c_\alpha x^\alpha + \left(\frac{m}{p}\right) c_\beta x^\beta + \ldots \right) + [X)$$

ab, so ergibt sich nach (12)

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} \left(\left(c_1 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\alpha \right) x^\alpha + \left(c_2 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\beta \right) x^\beta + \ldots \right) &= [X) \\ &= [X). \end{aligned}$$

Es ist also auch

$$\left(c_1 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\alpha \right) x^{\alpha-1} + \left(c_2 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\beta \right) x^{\beta-1} + \ldots = [X).$$

Hieraus folgt aber

$$c_1 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\alpha = c_2 - \left(\frac{m}{p}\right) c_\beta = \ldots = 0.$$

Insbesondere ist

$$\left(\frac{m}{p}\right) c_\alpha = \left(\frac{m}{p}\right) c_m = c_1$$

oder für jedes m

$$c_m = \left(\frac{m}{p}\right) c_1.$$

Setzt man also

$$\left(\frac{1}{p}\right) x + \left(\frac{2}{p}\right) x^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right) x^{p-1} = \omega(x),$$

so wird

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} c_1 \omega(x) + [X]. \qquad (13)$$

Um c_1 zu bestimmen, entwickele man $\omega(x)$ nach Potenzen von $x-1$. Man hat

$$\omega(x) = \omega(1) + \frac{\omega'(1)}{1!}(x-1) + \frac{\omega''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^{(p-1)}(1)}{(p-1)!}(x-1)^{p-1}.$$

Nun ist, wenn m von 1 bis $p-1$ läuft,

$$\omega(x) \equiv \Sigma m^{\frac{p-1}{2}} x^m \qquad (\text{mod. } p)$$

also

$$\omega'(x) \equiv \Sigma m^{\frac{p-1}{2}} m x^{m-1}$$
$$\omega''(x) \equiv \Sigma m^{\frac{p-1}{2}} m(m-1) x^{m-2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\omega^{(\mu)}(x) \equiv \Sigma m^{\frac{p-1}{2}} m(m-1)\ldots(m-\mu+1) x^{m-\mu} \qquad (\text{mod. } p).$$

Man hat daher, wenn

$$1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k = s_k$$

gesetzt wird,

$$\omega\ (1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

$$\omega'(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)+1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

$$\omega''(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)+2} - s_{\frac{1}{2}(p-1)+1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

. . . .

Allgemein wird

$$\omega^{(\mu)}(1) \equiv s_{\frac{1}{2}(p-1)+\mu} + \lambda_1 s_{\frac{1}{2}(p-1)+\mu-1} + \ldots + \lambda_\mu s_{\frac{1}{2}(p-1)} \qquad (\text{mod. } p),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ganze Zahlen bezeichnen. Ist also $\mu < \frac{1}{2}(p-1)$, so ergibt sich

$$\omega^{(\mu)}(1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

also auch

$$\frac{\omega^{(\mu)}(1)}{\mu!} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Für $\mu = \frac{1}{2}(p-1)$ dagegen wird

$$\omega^{\frac{(p-1)}{2}}(1) \equiv s_{p-1} \equiv -1 \qquad (\text{mod. } p).$$

Multiplicirt man dann die Congruenz

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \frac{\omega^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}(1)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} \equiv -1 \qquad (\text{mod. } p)$$

mit $-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ und beachtet, dass nach dem Wilson'schen Satze

$$-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)!\left(\frac{p-1}{2}\right)! = -(p-1)! \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p)$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{\omega^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}(1)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \qquad (\text{mod. } p).$$

Es wird also

$$\omega(x) \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \, (1-x)^{\frac{p-1}{2}} + a_1(1-x)^{\frac{1}{2}(p+1)} +$$

$$+ a_2(1-x)^{\frac{1}{2}(p+3)} + \dots (\text{mod.} p),$$

wo $a_1, a_2, \dots$ ganze Zahlen bezeichnen.

Setzt man

$$P_{p-1} = (1-x)^{p-1} \varphi,$$

so nimmt $(1-x)^{\frac{1}{2}(p-1)} \varphi . \omega(x)$ die Gestalt

$$P_{p-1}\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)! + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \dots\right) + p(1-x)^{\frac{p-1}{2}} G$$

an, wo G ganzzahlige Coëfficienten besitzt, und man kann nach (8)

$$(1-x)^{\frac{p-1}{2}} \varphi . \omega(x) = p\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)! + Q(1-x)\right) + [X] \qquad (14)$$

setzen, wo Q ebenfalls ganzzahlig ist.

Da ferner

$$P_{\frac{p-1}{2}} = (1-x)^{\frac{p-1}{2}} (1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{\frac{p-3}{2}})$$

ist und der Ausdruck

$$x^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{8}(p^2-1)}(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{\frac{p-3}{2}}) - \left(\frac{p-1}{2}\right)!$$

für $x = 1$ verschwindet, so nimmt

$$x^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{8}(p^2-1)} P_{\frac{p-1}{2}}$$

die Gestalt

$$(1-x)^{\frac{p-1}{2}}\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!+Q'(1-x)\right)$$

an, wo Q' eine ganze ganzzahlige Function von x bezeichnet, und man hat

$$(1-x)^{\frac{1}{2}(p-1)}\varphi f(x)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}p^{\frac{1}{2}(p-1)}\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!+\right.$$
$$\left.+Q'(1-x)\right)+[X) \qquad (15)$$

Aus den Identitäten (13), (14), (15) folgt nun

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}p^{\frac{1}{2}(p-1)}\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!(c_1-1)+(c_1Q-Q')(1-x)\right)=[X).$$

Es muss also auch die Function

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!(c_1-1)+(c_1Q-Q')(1-x)$$

durch X theilbar sein und man hat

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!(c_1-1)+(c_1Q-Q')(1-x)=LX,$$

wo L ganzzahlig ist. Für $x=1$ wird dann

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!(c_1-1)\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

und daher

$$c_1-1\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \qquad (16)$$

Anderseits kann c_1 aber nur den Werth ± 1 haben. Denn aus (13) folgt

$$f(x)^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{p-2}+[X)$$
$$=p^{p-3}c_1^2\omega^2(x)+[X).$$

Bezeichnet daher $a+a_1x+\ldots$ den echten Rest von $\omega^2(x)$ in Bezug auf X, so wird

$$a_0p^{p-3}c_1^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{p-2}$$

oder

$$a_0 c_1^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

c_1^2 kann also als quadratischer Theiler von p nur den Werth 1 haben, und c_1 muss $= \pm 1$ sein. Dann folgt aber aus (16) $c_1 = 1$ und man hat

$$f(x) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\frac{1}{2}(p-3)} \omega(x) + [X),$$
$$\omega(x) = x^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{8}(p^2-1)} P_{\frac{p-1}{2}} + [X). \tag{17}$$

Für $x = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ ergibt sich hieraus die Gauss'sche Formel. Man hat

$$\omega(e^{\frac{2\pi i}{p}}) = e^{\frac{(p-1)(p^2-1)\pi i}{8p}} (1-e^{\frac{2\pi i}{p}})(1-e^{\frac{4\pi i}{p}})\ldots(1-e^{\frac{(p-1)\pi i}{p}})$$
$$= e^{\frac{(p-1)(p^2-1)\pi i}{8p}} \left(-2ie^{\frac{\pi i}{p}} \sin\frac{\pi}{p}\right) \cdot \left(-2ie^{\frac{2\pi i}{p}} \sin\frac{2\pi}{p}\right) \cdots$$
$$\cdots\left(-2ie^{\frac{(p-1)\pi i}{p}} \sin\frac{(p-1)\pi}{2p}\right)$$
$$= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} (-i)^{\frac{p-1}{2}} 2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{\pi}{p} \sin\frac{2\pi}{p} \cdots \sin\frac{(p-1)\pi}{2p};$$

es ist aber

$$(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} (-i)^{\frac{p-1}{2}} = i^{\frac{p^2-1}{4}} i^{-\frac{p-1}{2}} = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

und daher

$$\omega(e^{\frac{2\pi i}{p}}) = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} 2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{\pi}{p} \sin\frac{2\pi}{p} \ldots \sin\frac{(p-1)\pi}{2p}.$$

Anderseits folgt aus (17), (11)

$$f(e^{\frac{2\pi i}{p}})^2 = p^{p-3}\omega^2(e^{\frac{2\pi i}{p}})$$
$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}$$

Hienach wird

$$\omega^2\left(e^{\frac{2\pi i}{p}}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \left(2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{\pi}{p} \sin\frac{2\pi}{p} \cdots \sin\frac{(p-1)\pi}{2p}\right)^2$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$$

und es ergibt sich

$$2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{\pi}{p} \sin\frac{2\pi}{p} \cdots \sin\frac{(p-1)\pi}{2p} = \sqrt{p}$$

$$\omega\left(e^{\frac{2\pi i}{2}}\right) = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}.$$

Zur Theorie der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre

von

Dr. **Wilhelm Trabert,**

Docent an der Universität und Assistent der k. k. Centralanstalt für Meteorologie in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

I. Allgemeinster Ausdruck für die Abhängigkeit des Potentialgefälles von den äusseren Massen.

So viele »Theorien« zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen unserer Atmosphäre auch aufgestellt worden sind, so vermochten wir bisher doch nur zu sehr wenigen sicheren Ergebnissen der Forschung zu gelangen. Es hat dies einerseits seinen Grund darin, dass überhaupt erst in neuerer Zeit — und da nur spärlich — in systematischer Weise und nach absolutem Masse Messungen des Potentialgefälles an der Erdoberfläche angestellt worden sind, anderseits liegt aber doch wohl auch vielfach die Ursache darin, dass man sich zur Lösung des hier vorliegenden Problems nur sehr selten und öfters auf wenig exacter Grundlage des mathematischen Calcüls bediente. Gerade dieser letztere bietet aber das Mittel, das Problem vollkommen klar und präcis zu formuliren und dadurch die Fragestellung für den Physiker zu erleichtern.

In dem Vorliegenden soll der Versuch gemacht werden, die allgemeinste Darstellung einer Theorie der »Schönwetterelektricität« zu geben, soweit dies ohne specielle Annahmen geschehen kann, und damit in Form einer allgemeinen Gleichung einen Rahmen zu entwerfen, in welchen

sich jede specielle Theorie einordnen muss, solange sie den Anspruch erheben will, nicht mit den Thatsachen in Widerspruch zu stehen.

Die Beobachtungen lehren, dass wir unsere Atmosphäre jedenfalls als ein elektrisches Feld anzusehen haben. Wir messen dasselbe durch die Änderung des Potentials und speciell an der Erdoberfläche durch den Unterschied des Potentials in ein Meter Höhe gegen das überall constante Potential des Erdkörpers selbst.

Wenn wir uns erinnern, dass für jede Oberfläche eines Leiters ganz allgemein die Gleichung

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi\sigma$$

gilt, in welcher $\frac{dV}{dn}$ das Potentialgefälle längs der Normalen auf die Oberfläche und σ die elektrische Dichte in dem betreffenden Punkte bedeutet, so können wir auch sagen, wir messen durch das Potentialgefälle die Dichte, welche die elektrische Ladung der Erdoberfläche in dem betreffenden Punkte besitzt. Wir brauchen nur das Potentialgefälle in den entsprechenden Einheiten auszudrücken und durch -4π zu dividiren.

Hätten wir es nur mit einer Ladung des festen Erdkörpers zu thun, so wäre die Dichte allein von der Gestalt der Erdoberfläche abhängig, wobei wir aber unter »Erdoberfläche« auch die in die Atmosphäre ragenden Theile der Oberfläche jedes mit der Erde leitend verbundenen Körpers zu verstehen haben. Es wäre dann — und die Beobachtungen bestätigen dies ja auch — die Dichte in hohem Grade abhängig von den zufälligen Erhebungen und Krümmungen, und es versteht sich ganz von selbst, dass wir, wenn wir das Problem in seiner Wesenheit auffassen wollen, von diesen Zufälligkeiten absehen müssen.

Es hat deshalb auch F. Exner die selbst heute noch leider so wenig berücksichtigte und doch so wesentliche Forderung erhoben, alle Beobachtungen über Luftelektricität entweder auf einer vollkommenen Ebene anzustellen oder doch — da dies

ja selten möglich oder doch höchst umständlich wäre — auf die Ebene durch einmalige Feststellung des Reductionsfactors zu beziehen. Ist bei dem Beobachtungsmaterial diese Bedingung erfüllt, so haben wir es mit der Gestalt der Erdoberfläche im grossen Ganzen zu thun, und da auch die Abplattung der Erde so gering ist, dass dadurch, wie die Rechnung lehrt, die Dichtenvertheilung nicht wesentlich beeinflusst wird, so können wir bei allen unseren Betrachtungen, wenn, wie gesagt, das Beobachtungsmaterial, auf welches wir uns stützen können, auf die Ebene reducirt ist, die Erdoberfläche als eine Kugeloberfläche auffassen.

Auf einer Kugel aber wäre, wenn wir es nur mit einer Ladung derselben zu thun hätten, die Dichte überall dieselbe. Die Beobachtungen beweisen, dass dies nicht der Fall ist, dass vielmehr die Dichte der elektrischen Ladung der Erdoberfläche sowohl örtlich als auch zeitlich höchst veränderlich und von der Witterung abhängig ist.

Eine systematische Bearbeitung setzt deshalb voraus — auch diese Forderung wurde zuerst von Exner erhoben — dass die Beobachtungen bei schönem Wetter zunächst von den durch Wolken gestörten Beobachtungen getrennt werden. Es versteht sich von selbst, dass zuerst die ungestörte Erscheinung, die »Schönwetter-Elektricität«, studirt werden muss.

Auch die Schönwetter-Elektricität zeigt nun aber eine örtliche und zeitliche Veränderlichkeit. Die Dichte der Ladung nimmt von den höheren Breiten gegen den Äquator hin ab, sie zeigt eine Schwankung im Laufe des Tages, sowie auch im Laufe des Jahres, und vor Allem — hierin hat ja die Abnahme gegen den Äquator ihren Grund — sie nimmt ab mit dem zunehmenden Dampfgehalte der Luft und, wie Elster und Geitel neuerdings gezeigt haben, mit der Zunahme der ultravioletten Strahlung.

Es folgt aus dieser örtlichen und zeitlichen Verschiedenheit des Potentialgefälles an der Erdoberfläche oder, wie wir ja auch sagen können, der elektrischen Dichtigkeit, dass wir es ausser der Erdladung noch mit anderen Ladungen zu thun haben, welche influenzirend auf den Erdkörper wirken und dadurch die örtliche und zeitliche Verschiedenheit der Dichte

an der Erdoberfläche hervorbringen, und es ist die Hauptfrage in dem Problem, das die atmosphärische Elektricität darbietet, welches ist der Sitz dieser die jeweilige elektrische Dichte eines Punktes der Erdoberfläche bestimmenden Massen?

Es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung, dass die Beantwortung dieser Frage wesentlich erleichtert oder doch ein Anhaltspunkt für die weitere Fragestellung gewonnen wird, wenn man den Einfluss äusserer elektrischer Massen in seiner allgemeinsten Form ermittelt, d. h. durch eine ganz allgemeine Formel den Zusammenhang zwischen der Dichte in jedem Punkte der Erdoberfläche und dem Potential der äusseren, influenzirend wirkenden Massen aufstellt. Da thatsächlich die Dichte durch das Potential dieser Massen eindeutig bestimmt ist, so bietet die Aufstellung einer solchen Formel keine Schwierigkeit.

Die allgemeinste Annahme, welche wir machen können, ist offenbar die, dass erstlich die Erde selbst mit einer gewissen Elektricität E geladen sei und dass sie zweitens unter dem Einflusse irgendwelcher elektrischer Massen stehe, deren Potential in irgend einem Punkte wir ganz allgemein mit W bezeichnen wollen, von welchen wir es aber vorläufig unentschieden lassen wollen, ob sie ihren Sitz im Weltraum oder im Innern der Atmosphäre haben. Es wird, wenn wir die allgemeinste Formel entwickelt haben und wenn wir dieselbe den Beobachtungsthatsachen gegenüberstellen, sich dann schon von selbst ergeben, inwieweit die allgemeine Annahme modificirt werden muss, wenn sie nicht den Beobachtungen widerstreiten soll.

Wir bezeichnen die Dichte, welche in einem bestimmten Punkte der Erdoberfläche, die wir als Kugel auffassen, herrscht, mit σ und stellen uns die Aufgabe, diese Grösse auszudrücken durch die Ladung E der Erde und das Potential der äusseren elektrischen Massen. Auch die auf der Erdoberfläche ausgebreiteten elektrischen Massen werden für sich ein Potential haben, und wir nennen dieses U.

Ist dO ein Oberflächenelement der Erde an der Stelle, an welcher die Dichte σ herrscht, und ist u die Distanz des Oberflächenelementes von einem Punkte, für welchen wir das

Potential der Erdladung für sich berechnen wollen, so ist für diesen Punkt:

$$U = \int \frac{\sigma dO}{u},$$

wobei das Integral über die ganze Erdoberfläche auszudehnen ist.

Wenn für eben diesen Punkt das Potential der äusseren elektrischen Massen W heisst, dann ist das Gesammtpotential V, das hier herrscht, das sich also zusammensetzt aus dem Potential der Erdladung für sich (U) und dem Potential der äusseren Massen für sich (W), gegeben durch den Ausdruck

$$V = U + W.$$

Wir nennen für einen Punkt im Innern der Erdkugel diese Grössen V_i, U_i und W_i; für einen äusseren Punkt V_e, U_e und W_e; für einen Punkt der Erdoberfläche, deren Radius wir a nennen wollen, V_a, U_a und W_a und endlich für den Erdmittelpunkt V_0, U_0 und W_0.

Nachdem wir diese Bezeichnungen ein für allemal festgesetzt haben, können wir darangehen, einen geeigneten Ausdruck für σ zu gewinnen.

Für eine Kugeloberfläche gilt ganz allgemein, welches auch das Potential der äusseren wirkenden Massen sein möge,

$$4\pi\sigma = \frac{U_a}{a} + 2\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_{r=a} \qquad 1)$$

(Es möge, da diese Gleichung auch dem Physiker nicht immer geläufig sein wird, gestattet sein, ihre Ableitung hier kurz anzudeuten.

Wenn wir den Radius der Erdkugel mit a bezeichnen und die Distanz des Punktes, für welchen wir das Potential ins Auge gefasst haben, vom Erdmittelpunkte r nennen, und wenn der Winkel, welchen die beiden Radien a und r einschliessen, θ heisst, dann ist

$$u = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}.$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Gleichung für U ein, so haben wir

$$U = \int \frac{\sigma dO}{a\sqrt{1 - \frac{2r}{a}\cos\theta + \frac{r^2}{a^2}}} \quad \text{oder} \quad = \int \frac{\sigma dO}{r\sqrt{1 - \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a}{r^2}}}$$

Den ersten Ausdruck werden wir anwenden für innere Punkte ($r < a$), den zweiten Ausdruck für äussere Punkte ($r > a$).

Wir können beide Ausdrücke nach Kugelfunctionen entwickeln und erhalten dann für den ersten Ausdruck

$$\frac{1}{a}\int \sigma dO \left\{ P_0 + \frac{r}{a} P_1 + \frac{r^2}{a^2} P_2 + \ldots \right\}$$

und für den zweiten Ausdruck

$$\frac{1}{r}\int \sigma dO \left\{ P_0 + \frac{a}{r} P_1 + \frac{a^2}{r^2} P_2 + \ldots \right\}.$$

Nennen wir ganz allgemein den Ausdruck

$$\int \sigma dO \{ P_0 + x P_1 + x^2 P_2 + \ldots \}$$

kurz $f(x)$, dann können wir auch schreiben

$$U_i = \frac{1}{a} f\left(\frac{r}{a}\right) \quad \text{und} \quad U_e = \frac{1}{r} f\left(\frac{a}{r}\right).$$

Für $r = a$ gehen beide Ausdrücke in einander über

$$U_a = \frac{1}{a} f(1).$$

Nun gilt bekanntlich ganz allgemein für die Oberfläche eines Leiters (Theorem von Poisson):

$$\left(\frac{dU_e}{dr}\right)_a - \left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a = -4\pi\sigma.$$

Differenziren wir nun aber die oben gefundenen allgemeinen Ausdrücke für U_e und U_i nach r und setzen wir zum Schlusse $r = a$, so haben

$$\left(\frac{dU_e}{dr}\right)_{r=a} - \left(\frac{dU_i}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{1}{a^2} f(1) - \frac{2}{a^2} f'(1);$$

statt dessen können wir aber auch schreiben:

$$\left(\frac{dU_e}{dr}\right)_a - \left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a = -\frac{U_a}{a} - 2\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a.$$

Führen wir $4\pi\sigma$ ein, so folgt die obige Gleichung 1).

Es ist nun offenbar unsere Aufgabe, U_a und $\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a$ durch Werthe von W auszudrücken.

Im Innern eines Leiters ist das Potential constant, d. h.

$$V_i = U_i + W_i = U_0 + W_0 = \text{constans}.$$

Dieser Satz gilt aber auch noch für die Oberfläche, es ist somit auch

$$U_a + W_a = U_0 + W_0,$$

also, da

$$U_0 = \frac{E}{a},$$

$$U_a = \frac{E}{a} + W_0 - W_a. \qquad 2)$$

Wir hätten somit einen Theil unserer Aufgabe gelöst. U_a ist ausgedrückt durch die Ladung der Erde, den Werth des Potentials der äusseren Massen in dem Punkte, für welchen wir σ kennen wollen, und endlich durch den Werth des Potentials der äusseren Massen im Erdmittelpunkte.

Es bleibt uns noch übrig, $\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_{r=a}$ durch das Potential der äusseren Massen auszudrücken. Da $U_i + W_i$ eine Constante, folgt sofort:

$$\left(\frac{dU_i}{dr}\right)_a = -\left(\frac{dW_i}{dr}\right)_a. \qquad 3)$$

Also, wenn wir die Werthe aus Gleichung 2) und 3) in die Gleichung 1) einsetzen:

$$4\pi\sigma = \frac{E}{a^2} - \frac{W_a - W_0}{a} - 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_{r=a}. \qquad 4)$$

Wir brauchen somit nur die auf der Erdoberfläche aufgespeicherte Elektricitätsmenge und von den äusseren influenzirend wirkenden Massen nur das Potential im Erdmittelpunkt und jenem Punkte der Erdoberfläche, für welchen wir die Dichte σ bestimmen wollen, sowie die Änderung des Potentials längs der Normalen in diesem Punkte zu kennen, um die Dichte zu berechnen.

Da wir gewöhnlich nicht die Dichte, sondern $-4\pi\sigma$, d. h. das Potentialgefälle $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ für die Erdoberfläche unmittelbar

messen, so werden wir besser thun, auch in die Gleichung 4) das Potentialgefälle einzuführen und können dann schreiben:

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a. \qquad \text{I)}$$

Da, wie die Beobachtungen gelehrt haben, bei schönem Wetter die Potentialniveauflächen der Erdoberfläche parallel sind, so ist es leicht auch für einen Punkt, in einer beliebigen Höhe h über der Erdoberfläche, das Potentialgefälle $\frac{dV}{dh}$ zu ermitteln. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur zu wissen, welche Elektricitätsmenge in der verticalen Luftschichte vom Querschnitte eins und der Höhe h unterhalb des Punktes, für welchen wir $\frac{dV}{dh}$ rechnen wollen, zu kennen.

Nennen wir diese Elektricitätsmenge η, so wissen wir, dass bei Parallellagerung der Potentialniveaux der Unterschied des Potentialgefälles in zwei beliebigen Niveaux bestimmt ist durch die eingeschlossenen Massen, multiplicirt mit -4π.

Wir haben also

$$\frac{dV}{dh} - \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -4\pi\eta,[1]$$

somit

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a - 4\pi\eta. \qquad \text{II)}$$

Wir haben hiemit für einen beliebigen Punkt unserer Atmosphäre das in ihm herrschende Potentialgefälle ausgedrückt

---

[1] In dieser Formel ist nur die Höhe h gegenüber dem Erdradius a vernachlässigt. Da die Formel nur eine specielle Anwendung des Gauss'schen Satzes

$$\int \frac{dV}{dn} dO = -4\pi\eta$$

ist, so hat man streng genommen, weil die obere Grenzfläche nicht gleich eins, sondern $\left(\frac{a+h}{a}\right)^2$ zu setzen ist,

$$\left(\frac{a+h}{a}\right)^2 \frac{dV}{dh} - \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -4\pi\eta.$$

durch die schon oben näher bezeichneten Grössen E, W_a, W_0 und $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$, sowie die noch neu hinzugekommene Grösse η.

Diese Formel ist, woferne in der Lagerung der Potentialniveauflächen am Beobachtungsorte keine Störungen vorkommen, d. h. bei schönem Wetter, vollkommen exact. Sie wurde ohne Voraussetzungen und ohne Vernachlässigungen abgeleitet und stellt die Grundgleichung dar, von welcher man bei jeder Theorie, wenn dieselbe exact begründet werden soll, ausgehen muss. Es ist übrigens bemerkenswerth, dass für die Gleichung I, welche den Specialfall der Gleichung II für $h = 0$, d. h. für die Erdoberfläche darstellt, auch die beschränkende Bedingung, dass die Potentialniveaux der Atmosphäre parallel seien, nicht nöthig ist, dass dieselbe vielmehr ganz allgemein und vollkommen streng das Potentialgefälle in seiner Abhängigkeit von den äusseren Massen ausdrückt, somit auch für die »Störungen« des »normalen« Potentialgefälles gilt.

Da wir, wenn wir uns auf den Boden einer speciellen Theorie stellen, die Werthe von W_a, W_0 und $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$ auf Grund der dieser Theorie zu Grunde liegenden Annahme leicht werden berechnen können, so wird es uns leicht sein, alle speciellen Theorien an der Hand dieser allgemeinen Gleichung zu discutiren und zu untersuchen, ob und inwieferne nicht vielleicht ihre Annahme zu Consequenzen führen würde, welche den Beobachtungsthatsachen widerstreiten.

II. Discussion der allgemeinen Gleichung.

1. Die Grösse E. Wir beschränken uns vorläufig darauf, die als (I) bezeichnete Gleichung für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche, also die Gleichung

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$$

einer näheren Discussion zu unterziehen und beschäftigen uns vor Allem mit der Grösse E.

E bedeutete die Ladung des leitenden Erdkörpers, d. h. die auf der Erdoberfläche vorhandene freie Elektricität. Da, wie die Beobachtungen nicht bloss in unseren Breiten, sondern auch in den Tropen und auf dem Ocean gezeigt haben, auf der ganzen Erde das Potentialgefälle bei normalem Wetter einen positiven Werth besitzt, so folgt mit Sicherheit, dass die Erde überall (bei normalem Wetter) mit negativer Elektricität belegt ist, dass also die jeweilig an einem Orte beobachtete elektrische Dichte der Erdoberfläche nicht allein auf Rechnung der Influenz äusserer Massen zu setzen ist, sondern dass wirklich freie negative Elektricität auf der Erde vorhanden ist, dass also E einen bestimmten negativen Werth hat.

Diese Annahme, welche zuerst von Ermann und Peltier aufgestellt wurde, ist heute keine Hypothese mehr, sie ist eine Thatsache, welche sich unmittelbar aus den Beobachtungen ergibt.

Es fragt sich nun: Sind wir etwa im Stande, die Änderungen des Potentialgefälles, wenigstens zum Theile, durch die Annahme einer Änderung dieser Grösse E zu erklären? Da nicht bloss Exner annimmt, dass mit dem Wasserdampfe ein Theil der Ladung der Erdoberfläche in die Atmosphäre entweiche, sondern auch Elster und Geitel durch ihre Versuche nachgewiesen haben, dass die Erdrinde Bestandtheile enthalte, welche negativ geladen, unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlung einen Theil ihrer Ladung an die Atmosphäre abgeben, so wird local gewiss ein Theil der Erdladung von der Oberfläche in die Atmosphäre entweichen, gerade so wie anderwärts theils durch Blitzentladungen, theils durch den Niederschlag diese negative Elektricität dem Erdkörper wieder zugeführt werden wird.

Ist es möglich, wenn wir die gesammte Erdladung ins Auge fassen, eine Änderung dieser Grösse anzunehmen? Wenn wir beachten, dass sowohl die Verdampfung, als auch die Insolation nur local sehr verschieden sind, dass aber, wenn wir das Mittel für die ganze Erde ins Auge fassen, dieses gewiss für eine grössere Epoche constant ist, sicher aber keine tägliche Schwankung von nennenswerthem Betrage zeigt, so kann wohl nicht davon die Rede sein, die tägliche Periode oder die

Schwankungen des Potentialgefälles mit dem Dampfdruck oder der Insolation durch Veränderungen von E erklären zu wollen. Die localen Elektricitätsübergänge von der Erde zur Atmosphäre und umgekehrt, verschwinden gewiss für die gesammte Erdoberfläche.

Wohl aber wäre es möglich, eine jährliche Schwankung von E anzunehmen, da sich Sommer und Winter der beiden Hemisphären bekanntlich nicht ausgleichen, vielmehr die Jahreszeit der Nordhemisphäre ausschlaggebend ist, so dass die gesammte Erde im Laufe eines Jahres einen Sommer und einen Winter hat, welcher mit jenem der Nordhemisphäre gleichzeitig ist. Da somit auch die Verdampfungs- und Insolationsverhältnisse der gesammten Erde einen jährlichen Gang zeigen müssen, welcher ein Maximum im Sommer der Nordhemisphäre, ein Minimum im Winter derselben hat, so wäre es allerdings gar nicht ausgeschlossen, dass auch E, die Ladung der Erde, eine jährliche Periode besässe, welche ein Minimum im Sommer und ein Maximum im Winter der Nordhemisphäre aufweist.

Diese Möglichkeit müssen wir jedenfalls zugestehen und im Auge behalten. Ebenso gewiss ist es aber, dass wir durch eine derartige Schwankung von E allein den jährlichen Gang der Luftelektricität nicht erklären können, da sonst die Südhemisphäre nicht, wie dies Melbourne zeigt, einen umgekehrten jährlichen Gang aufweisen dürfte, wie die Nordhemisphäre. Jede Änderung von E müssten ja alle Erdpunkte streng gleichzeitig zeigen. Wir werden übrigens später sehen (das möge hier nur nebenbei bemerkt werden), dass wir gar nicht im Stande sind, an einem einzelnen Beobachtungsorte Änderungen von E zu constatiren.

Fassen wir diese Erwägungen kurz zusammen, so müssen wir sagen, dass die Ladung der Erde E im Allgemeinen als eine Constante angesehen werden muss und dass sie höchstens einen kleinen jährlichen Gang mit einem Maximum in unserem Winter und einem Minimum in unserem Sommer aufweisen könnte, dass also gewiss alle nicht periodischen zeitlichen Schwankungen des Potentialgefälles und dessen tägliche Periode, dann aber auch die jährliche Periode zum grösseren Theile durch Veränderungen der Grössen W, d. h. durch den

influenzirenden Einfluss äusserer Massen auf die Erdoberfläche zu erklären seien.

2. Einfluss elektrischer Massen im Weltraume. Nachdem wir gesehen haben, dass in erster Linie die Änderungen des Potentialgefälles an einem Punkte der Erdoberfläche oder, wie wir auch sagen können, der elektrischen Dichte daselbst eine Influenzwirkung ausserhalb der Erdoberfläche befindlicher Massen sind, können wir einen Schritt weiter gehen und die Frage aufstellen: Wo sind diese Massen?

Hier gibt es nun offenbar nur zwei Möglichkeiten, entweder diese Massen liegen ausserhalb unserer Atmosphäre irgendwo im Weltraume oder aber in unserer Atmosphäre selbst. Wir discutiren zunächst die erstere Möglichkeit.

Wenn die Erde, wie die Beobachtungen lehren, eine negative Ladung besitzt, dann ist es mehr als wahrscheinlich, dass auch die anderen Himmelskörper als elektrisch geladene Körper aufzufassen sind. In diesem Falle würde natürlich in erster Linie unsere Sonne in Betracht kommen, und es wäre die Möglichkeit zu erwägen, ob nicht ein Theil der Erscheinungen luftelektrischer Natur durch die Influenzwirkung der Sonne seine Erkärung fände. Wir untersuchen desshalb zunächst den Einfluss einer ausserhalb der Atmosphäre im Weltraume befindlichen elektrischen Masse, ohne zunächst anzunehmen, dass diese auf der Sonne ihren Sitz habe.

Wo immer aber auch diese elektrischen Massen ihren Sitz haben mögen, das eine ist klar, dass bei der Kleinheit des Erdkörpers im Vergleich zu cosmischen Verhältnissen für den Raum, welchen die Erde einnimmt, die Potentialniveaux dieser äusseren Massen als Ebenen und einander parallel angesehen werden dürfen. Wir wollen das Gefälle dieses Potentials C nennen.

In nebenstehender Figur repräsentire MN jenes Potentialniveau, welches die Erdoberfläche in M tangirt. Wenn das Potentialniveau pro Längeneinheit in der Richtung von M gegen O (Erdmittelpunkt) um den Betrag C wächst, und wenn wir das Potential der in Frage stehenden äusseren Massen in O, d. h. also das durch den Erdmittelpunkt hindurchgehende Potentialniveau mit W_0 bezeichnen, dann hat die Tangential-

ebene MN offenbar das Potential $W_0 - Ca$, wobei unter a der Erdradius MO zu verstehen ist. Wir nennen die Declination der Richtung, in welcher die elektrischen Massen ihren Sitz haben, δ.

Unsere Aufgabe ist nun die, das jeweilig durch den Punkt A, welcher die geographische Breite $AD = \varphi$ haben möge, hindurchgehende Potentialniveau zu berechnen.

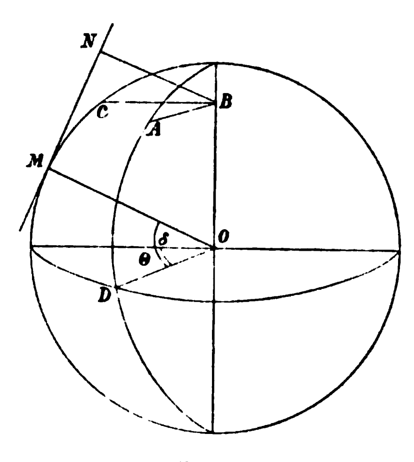


Fig. 1.

Wenn wir den senkrechten Abstand des Punktes A von der Tangentialebene MN mit p bezeichnen, dann ist offenbar dieses Niveau

$$W_a = W_0 - Ca + Cp.$$

Nun ist weiter

$$p = BN\text{—Projection von } AB \text{ auf } BN;$$

da nun, wie man leicht findet,

$$BN = a - a \sin\varphi \sin\delta$$

und die Projection von AB auf BN gleich ist

$$a \cos\varphi \cos\theta \cos\delta,$$

wenn θ den Stundenwinkel des Punktes A, von dem Meridian MC aus gezählt bedeutet, so ist

$$W_a = W_0 - Ca(\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\theta).$$

Da bekanntlich der Klammerausdruck nichts·anderes ist als sin h, wenn wir unter h die Höhe jenes Punktes verstehen, in welchem die elektrischen Massen ihren Sitz haben, also die Sonnenhöhe, wenn wir die specielle Annahme machen, dass die äusseren Massen auf der Sonne gelegen seien, so können wir auch schreiben

$$W_a = W_0 - Ca \sin h.$$

Würden wir statt des Punktes A auf der Erdoberfläche einen Punkt in der Distanz r vom Erdmittelpunkt betrachtet haben, so hätten wir für diesen erhalten

$$W = W_0 - Cr \sin h,$$

somit

$$\frac{dW}{dr} = -C \sin h.$$

Wir kennen nunmehr W_0, W_a und $\left(\frac{dW}{dr}\right)$, sind also in der Lage, den influenzirenden Einfluss einer im Weltraume befindlichen Elektricitätsmenge allein durch das von ihr im Gebiete der Erde hervorgebrachte Potentialgefälle C und als Function ihrer Zenithdistanz oder ihrer Höhe auszudrücken.

Wir erhalten

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_0 = -3\,C \sin h.$$

Wären somit andere äussere Massen nicht vorhanden und kämen nur die eben besprochenen in Betracht, also etwa nur die Ladung der Sonne, dann wäre das Potentialgefälle auszudrücken durch

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} - 3\,C \sin h.$$

Wir würden durch diese Annahme z. B. den jährlichen Gang recht gut erklären können. Hätte die Sonne auch eine negative Ladung, so wäre das Potentialgefälle, das letztere hervorbringt, positiv, also C positiv; wir würden also im Sommer (h gross) einen kleinen Werth für $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$, im Winter ($h$ klein)

dagegen einen grossen Werth für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche erhalten.

Trotzdem muss diese Annahme entschieden verworfen werden, denn wäre sie richtig, so müsste das Potentialgefälle an der Erdoberfläche eine einfache tägliche Schwankung zeigen, welche viel beträchtlicher wäre, als die jährliche. Diese tägliche Periode würde durch das Glied $3\,C \cos\varphi \cos\delta \cos\theta$ bestimmt werden, also eine Amplitude

$$6\,C \cos\varphi \cos\delta$$

zeigen. Für die Tropen würde sich zur Zeit der Äquinoctien $6\,C$ ergeben!

Wenn also die Sonne eine elektrische Ladung besitzen sollte, so ist dieselbe gewiss nur so gross, dass das Gefälle $C_{\prime}$, welches sie hervorbringt, eine kleine Grösse ist, welche gegen den jährlichen Gang gewiss verschwindet, aber möglicherweise zur Erklärung des täglichen Ganges des Potentialgefälles beitragen könnte, bei welchem ja bekanntlich die Schwankung nur sehr gering ist.

Es ist unter diesen Umständen wohl sehr unwahrscheinlich, dass noch etwa eine Ladung des Mondes in Frage kommen sollte. Trotzdem ist erst jüngst von N. Ekholm und Sv. Arrhenius der Versuch gemacht worden, den influenzirenden Einfluss einer Mondladung nachzuweisen.[1]

Da der Mond bereits der Erde so nahe ist, dass die Potentialniveaux nicht mehr als parallele Ebenen angesehen werden dürfen, muss zu dem Gliede $-3\,C \sin h$, welches die Influenzwirkung ausdrückt, mindestens noch ein Glied

$$-\frac{5}{2} pC(3 \sin^2 h - 1)$$

hinzutreten (man vergl. die unten citirte Abhandlung), worin p die Parallaxe des Mondes bedeutet.

Es gilt selbstverständlich auch hier, dass vor Allem die mondtägliche Periode sich zeigen müsste. Das von den beiden

---

[1] Über den Einfluss des Mondes auf den elektrischen Zustand der Erde. Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handlingar. Bd. 19, Afd. I, Nr. 8.

Verfassern discutirte Material zeigt aber, dass die monatliche Periode viel deutlicher ausgesprochen sei; woraus wohl unbedingt folgt, dass der aus diesen Beobachtungen folgende Mondeinfluss keine Influenzwirkung sein kann, sondern wohl als ein indirecter Einfluss aufgefasst werden muss, der erst einer weiteren Klarstellung bedarf.

Für diese Annahme spricht wohl auch das Resultat, zu welchem Ekholm und Arrhenius kommen, dass die untersuchte Erscheinung recht bedeutende Zeit zu ihrer Entwicklung nöthig hat. Wenn dies der Fall ist, kann wohl von einem Influenzvorgang nicht die Rede sein.

Zur Erklärung der grösseren Schwankungen ist also auch die Annahme von elektrischen Massen im Weltraume ausserhalb unserer Atmosphäre ungeeignet; es bleibt somit nur die eine Annahme übrig, dass die Schwankungen im Potentialgefälle an der Erdoberfläche durch den influenzirenden Einfluss von elektrischen Massen in der Atmosphäre selbst hervorgebracht werden.

3. Einfluss elektrischer Massen in der Atmosphäre. Wir haben somit das Gebiet, in welchem jene elektrischen Massen zu suchen sind, durch deren Influenzwirkung die wesentlicheren Schwankungen des Potentialgefälles hervorgerufen werden, ziemlich eng umgrenzt. Sie können ihren Sitz nur in unserer Atmosphäre haben.

Es gibt auch bekanntlich eine ganze Reihe von Theorien, welche den Sitz der wirkenden elektrischen Massen in der Atmosphäre suchen. Auch Thomson nimmt in den oberen Schichten der Atmosphäre eine positive Ladung an. Mag dieselbe nun vorhanden sein oder nicht, gewiss ist, dass, wenn sie auch vorhanden ist, im Innern des Raumes, welchen diese oberen Schichten einschliessen, das Potential einer derartigen gleichförmig elektrisirten Kugelschichte ein constantes ist, d. h. $W_a = W_0$ und $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = 0$. Eine solche Ladung vermag somit nicht das Potentialgefälle $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ zu beeinflussen.

Andere Theorien, wie die von Sohncke und Luvini, nehmen desshalb ein Heben und Senken einer positiv geladenen

Fläche (Isothermenfläche Null) und wohl auch einen wechselnden Betrag ihrer Ladung an. Und noch andere Theorien verlegen den Sitz der äusseren elektrischen Massen nicht in eine Fläche, sondern lassen dieselben sich über die ganze Atmosphäre ausbreiten, sei es nun, dass sie, wie Exner, annehmen, die elektrischen Massen hätten ihren Sitz auf den Wasserdampfmolekülen, sei es, dass sie, wie Elster und Geitel in ihrer Umgestaltung der Arrhenius'schen Theorie, annehmen, es werde die Elektricität von der Erdoberfläche unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlung weggeführt, und den eigentlichen Sitz vorläufig unerörtert lassen. Sicher befindet sich derselbe ja auf Theilchen der Atmosphäre.

Auch diese Theorien, wie alle, welche den Sitz der influenzirenden Elektricität in der Atmosphäre suchen, müssen sich in den Rahmen einer allgemeinen Formel einordnen, welche wir auf sehr einfache Weise ableiten können und welche es gestattet, die einzelnen Theorien an den Beobachtungsthatsachen zu prüfen.

Nennen wir die gesammte in der Atmosphäre befindliche Elektricität e und bezeichnen wir die Summe aus dieser letzteren und der Ladung E der Erdoberfläche kurz mit E_0, also

$$E_0 = E + e,$$

dann sind in einer genügend grossen Entfernung h von der Erdoberfläche die Potentialniveaux unter allen Umständen ja gewiss wieder Kugelflächen und das dort herrschende Potential ist

$$V = \frac{E_0}{a+h}.$$

Das Potentialgefälle in dieser Entfernung ist dann

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{(a+h)^2}.$$

Wir können nun wieder auf das Potentialniveau, welches die Erdoberfläche repräsentirt, und das Niveau mit dem Potentiale V den schon einmal verwendeten Satz anwenden, welcher das Gefälle in beiden Niveaux und die Elektricitätsmenge in

Beziehung bringt, welche in der zwischen beiden Niveaux über dem Querschnitt Eins errichteten verticalen Luftsäule enthalten ist. Nennen wir letztere, also die in der ganzen über der Flächeneinheit lagernden Luftsäule enthaltene Elektricität ε_0, so haben wir demnach[1]

$$\left(\frac{a+h}{a}\right)^2 \frac{dV}{dh} - \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -4\pi\varepsilon_0$$

oder, wenn wir für $\frac{dV}{dh}$ den obigen Werth einführen,

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0. \qquad \text{III)}$$

Wir ersehen aus dieser Gleichung, dass, wenn lediglich die in der Atmosphäre enthaltenen Massen in Betracht kommen, das Potentialgefälle an der Erdoberfläche allein abhängt von der gewiss constanten gesammten Elektricitätsmenge unseres Erdballes (Ladung der Oberfläche + Ladung der Atmosphäre) und jenen elektrischen Massen, welche unmittelbar über dem Beobachtungsort in der über der Flächeneinheit lagernden Luftsäule enthalten sind.[2]

Wäre die in der Atmosphäre vorhandene Elektricität nach Breite und Länge gleichförmig vertheilt, dann wäre $e = 4\pi a^2 \varepsilon_0$, also

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} - 4\pi\varepsilon_0 + 4\pi\varepsilon_0 = -\frac{E}{a^2}.$$

---

[1] Man vergl. die Anmerkung auf S. 8.

[2] Wir hätten auch wieder W_a, W_0 und $\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$ für die in der Atmosphäre befindlichen Massen rechnen können und hätten dann gesehen, dass sich

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a \text{ auf } -\frac{e}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0$$

reducirt, womit wir gleichfalls zur Gleichung III) geführt worden wären. Dieser Weg wäre aber ein umständlicherer gewesen und darum schien es gestattet, jene Gleichung auf einem anderen, einfacheren Wege abzuleiten. Der letztere ist ja auch bei Parallellagerung der Potentialniveaux über dem Beobachtungsort — und das ist ja bei schönem Wetter der Fall — vollkommen streng.

Es würde dann, was ja auch selbstverständlich ist, und was wir schon bei der Thomson'schen Theorie ersahen, die in der Atmosphäre enthaltene Elektricität auf das Potentialgefälle gar keinen Einfluss haben. Schwankungen des letzteren können wir somit allein durch die Annahme erklären, dass die in der Atmosphäre enthaltenen elektrischen Massen ungleichförmig vertheilt sind, wobei speciell die über dem Beobachtungsort befindlichen Massen allein massgebend sind.

Halten wir dieses Ergebniss mit der früher besprochenen Möglichkeit einer Veränderlichkeit der Erdoberflächenladung zusammen, so zeigt sich, dass, wenn auch eine solche vorhanden sein sollte, dieselbe jedenfalls von uns an einem einzelnen Beobachtungsort nie bemerkt oder nachgewiesen werden könnte, da eben allein die Gesammtmenge der Elektricität unserer Erde und die Massen über dem Beobachtungsort für den Werth seines Potentialgefälles bestimmend sind.

Auch für einen beliebigen Punkt in der Atmosphäre können wir nun sehr einfach das Potentialgefälle ausdrücken. Nennen wir die über dem Punkte, welchen wir uns in der Höhe h denken, in der gesammten darüber befindlichen Luftsäule (vom Querschnitte Eins) enthaltene Elektricitätsmenge ε, dann ist die früher (auf S. 8) η bezeichnete Grösse

$$\eta = \varepsilon_0 - \varepsilon,$$

also ist für einen Punkt in der Höhe h

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0 - 4\pi\eta$$

oder

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon. \qquad \text{IV)}$$

Für das Potentialgefälle in beliebiger Höhe entscheidet somit allein die in der Luftsäule (vom Querschnitte Eins) über dem betreffenden Punkte enthaltene Elektricitätsmenge.

III. Der Sitz der elektrischen Massen.

Fassen wir die Ergebnisse des vorigen Kapitels kurz zusammen, so hat sich als vollkommen sicher herausgestellt, dass

eine freie elektrische Ladung der Erdoberfläche vorhanden ist. Aus einzelnen Beobachtungen vermögen wir dieselbe indessen niemals abzuleiten; wohl aber könnten wir ihren Betrag angeben, wenn uns ein über die ganze Erde sich erstreckendes Beobachtungsmateriale zur Verfügung stünde. Würden wir für jede geographische Breite den Betrag von $\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ kennen, dann würden wir auch einen Mittelwerth dieses Potentialgefälles ableiten können. Es ist aber

$$\frac{1}{O}\int\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 dO = -\frac{1}{O}\int\frac{E+e}{a^2}\,dO + \frac{1}{O}\int 4\pi\varepsilon\,dO$$

$$= -\frac{E+e}{a^2} + \frac{4\pi e}{O} = -\frac{E}{a^2}.$$

Das heisst, wenn wir den Mittelwerth des Potentialgefälles für die Erdoberfläche $\left(\frac{dV}{dh}\right)_m$ nennen, so ist die Ladung der Erdoberfläche

$$E = -\left(\frac{dV}{dh}\right)_m . a^2.$$

Exner hat den Versuch gemacht,[1] das Potentialgefälle für verschiedene Breiten auf Grund seines umfangreichen Beobachtungsmateriales zu berechnen.

Acceptirt man seine Zahlen und berechnet mit Berücksichtigung der Grösse der einzelnen Kugelzonen den Mittelwerth, so ergibt sich

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_m = 130 \text{ Volt/Meter.}$$

Als einen ersten Näherungswerth wird man diesen Werth gewiss ansehen dürfen; dann ergibt sich für die Erdoberfiächenladung

$$E = -21\cdot 10^{14} \text{ statische Einheiten.}$$

---

1 Wiener Sitzungsber., Bd. 96, IIa. [1887], S. 459. (Auch Exner's Repertorium für Physik, Bd. XXIV, S. 276).

Eine jährliche Schwankung von E wäre, wie wir sahen, möglich, aber sie liesse sich nur dann nachweisen, wenn wir den Mittelwerth des Potentialgefälles aus einem über die ganze Erde sich erstreckenden Beobachtungsmateriale von Monat zu Monat berechnen könnten.

Zur Erklärung von Schwankungen des Potentialgefälles an einzelnen Orten (das war ein weiteres Resultat) können wir Änderungen von E jedenfalls nicht herbeiziehen.

Wir sind somit zu der Annahme gezwungen, dass die Schwankungen des Potentialgefälles in erster Linie durch den influenzirenden Einfluss äusserer Massen hervorgerufen werden. Als wir nun aber wieder die Möglichkeit ins Auge fassten, dass diese Massen im Weltraume, also etwa auf der Sonne, zu suchen seien, zeigte sich, dass dann vor Allem der tägliche Gang diesen Einfluss verrathen müsse.

Wenn die Sonne eine elektrische Ladung L besitzen würde, so wäre in der Distanz der Erde R das Potential dieser Ladung $V = \frac{L}{R}$, also das Potentialgefälle, welches wir mit C bezeichneten,

$$C = \frac{dV}{dR} = -\frac{L}{R^2}.$$

Bei einer Declinationsstellung δ würde nun ein Ort in der geographischen Breite φ eine tägliche Amplitude des Potentialgefälles

$$6\,C \cos\varphi \cos\delta$$

aufweisen.

Über den täglichen Gang liegen nur sehr wenige Messungen vor, und von den vorliegenden beziehen sich nur wenige auf die freie Ebene; so viel ist aber gewiss, dass die tägliche Schwankung überhaupt gering ist. Wenn wir als Beispiel den Gang von Perpignan[1] verwenden dürften, so hätten wir im Mittel aus Frühjahr und Herbst überhaupt nur eine Schwankung zwischen 39 und 73 Volt. Das Hauptminimum um 3^h a., das Hauptmaximum um 7^h p.

---

[1] Meteorolog. Zeitschrift, Bd. 26 (1891), S. 113.

Da die Sonne die extremen Werthe zu Mittag und Mitternacht verursachen würde, so hätten wir eigentlich nur die Beobachtungsdaten dieser Stunden in Betracht zu ziehen. Es beträgt nun um Mitternacht das Potentialgefälle 45, zu Mittag 52 Volt. Das sind wenig verschiedene Werthe, die wohl zeigen, dass, wenn eine Ladung der Sonne vorhanden ist, dieselbe sehr klein ist.

Wenn wir auch

$$6C \cos \varphi \cos \delta = 20 \text{ Volt (für } \delta = 0)$$

annehmen würden, hätten wir, da $\varphi = 42^1/_2{}^\circ$,

$$C = 4 \cdot 5 \text{ Volt pro Meter},$$

somit das Potentialgefälle an der Sonnenoberfläche

$$C_0 = 208000 \text{ Volt/Meter}.$$

Ein so hoher Werth des Potentialgefälles an der Sonnenoberfläche ist auch gewiss nicht zu erwarten, denn er würde besagen, dass die elektrische Dichte an der Sonnenoberfläche 1600mal so gross wäre, wie die an der Erdoberfläche. Exner hat auch schon gezeigt,[1] dass selbst dann, wenn die Sonnenladung zur Erdladung wie ihre Massen zu einander sich verhielten, das Gefälle im Gebiete der Erde, also unsere Grösse C nur 0·4 Volt pro Meter betragen würde.

Es ist also wohl zweifellos, dass der Einfluss der Sonne, wenn er vorhanden ist, ein nur sehr kleiner ist.

Ausschlaggebend für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche sind somit gewiss nur die in der Atmosphäre enthaltenen Massen, und da wurde gezeigt, dass sich das Potentialgefälle stets darstellen lasse durch die Formel

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon.$$

Diese Formel schliesst die Grösse E und somit auch deren eventuelle Schwankungen bereits ein. Die Grösse E_0, welche sich aus E und der Gesammtladung e der Atmosphäre zu-

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 93, II. a. S. 284.

sammensetzt, ist gewiss eine Constante; die einzig variable Grösse ist somit nur die Grösse ε.

Wenn nun aber durch diese Formel das Potentialgefälle bis auf die geringen, eventuell vorhandenen Schwankungen, welche ihren Grund in einer Sonnenladung hätten, vollkommen genau dargestellt wird, dann ist ein Heben oder Senken der in der Atmosphäre vorhandenen elektrischen Massen vollkommen gleichgiltig, nur die Menge, welche sich über dem Beobachtungsorte befindet, ist massgebend; wo sie sich befindet, ist gleichgiltig.

Es ist hiermit aber auch der unwiderlegliche Beweis erbracht, dass elektrische Massen sich jederzeit, auch bei schönem Wetter, in der Atmosphäre befinden müssen, und es erübrigt dann nur noch die eine Frage: An welche Bestandtheile unserer Atmosphäre sind diese elektrischen Massen gebunden? Sind es Wassertröpfchen, Eiskrystalle, der Wasserdampf, der Staub oder vielleicht die Luft selbst?

Sowohl Wassertröpfchen, als auch Eisnadeln sind gewiss Träger von Elektricität. Das beweisen nicht nur die directen Beobachtungen dieser Thatsache, sondern auch der störende Einfluss, den Wolken auf den normalen Verlauf des Potentialgefälles ausüben. Für die Verschiedenheiten dieser letzteren Grösse bei schönem Wetter, wo gewiss Wassertröpfchen und Eisnadeln, wenn sie schon unsichtbar vorhanden sein sollten, gewiss nur eine sehr untergeordnete Rolle spielen würden, müssen jedenfalls anderswo vorhandene Massen herbeigezogen werden.

Die Exner'sche Theorie, nach welcher der Wasserdampf der Sitz der elektrischen Massen wäre, schien bis in die neueste Zeit wohl als die am besten begründete. War auch die physikalische Grundlage, ob von einer geladenen Wasserfläche der Wasserdampf Elektricität mitführe, bisher noch eine Streitfrage, so konnte Exner doch auf den thatsächlich bestehenden Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und Dampfgehalt der Luft hinweisen, ein Zusammenhang, welcher sich sogar durch eine empirische Formel darstellen liess:

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1+4\pi k p_0},$$

wobei A und k Constanten, p_0 aber den Wasserdampfgehalt an dem Beobachtungsorte bedeutet.

Diese Formel würde sich sehr wohl in den Rahmen der Formel

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0$$

einordnen, wir brauchten nur anzunehmen, es wäre ε_0 die über dem Beobachtungsorte befindliche Elektricitätsmenge proportional dem Dampfgehalte p_0 und der Dichte der Erdladung am Beobachtungsorte, d. h. dem $-\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$. Dann wäre

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} - 4\pi k p_0 \left(\frac{dV}{dh}\right)_0,$$

woraus sich die Exner'sche Formel ergibt, wenn wir die Constante $-\frac{E_0}{a^2} = A$ setzen.

In jüngster Zeit zeigten nun Elster und Geitel,[1] dass sich eine ganz ebenso gut begründete Beziehung zwischen dem Potentialgefälle und dem Betrage der ultravioletten Strahlung nachweisen lasse, und dass auch diese sich durch eine, ebenso vortrefflich stimmende empirische Formel darstellen lasse, welche dieselbe Gestalt hat

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1+4\pi KJ},$$

wobei unter J die Intensität der ultravioletten Strahlung zu verstehen ist. Selbstverständlich ordnet sich auch diese Formel in den Rahmen unserer Formel III) ein unter der Annahme

$$\varepsilon_0 = -KJ.\left(\frac{dV}{dh}\right)_0.$$

Physikalisch ist diese Annahme sehr gut begründet. Die Erdoberfläche besitzt wirklich Substanzen, welche unter dem Einflusse ultravioletter Strahlung ihre negative Ladung abgeben.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, II. a. (1893).

Dann aber ist es auch sehr plausibel, dass die Menge der über dem Beobachtungsorte befindlichen Elektricität proportional ist erstlich der Intensität der Strahlung und zweitens der Dichte der Ladung.

Höchst merkwürdig bleibt übrigens das Nebeneinanderbestehen dieser beiden Beziehungen. Elster und Geitel legten sich desshalb auch in der citirten Arbeit die Frage vor, ob nicht etwa ein Zusammenhang zwischen Wasserdampfgehalt und ultravioletter Strahlung bestehe. Die diesbezüglichen Beobachtungen zeigten denn auch in der That einen derartigen Zusammenhang, und Elster und Geitel versuchten auch eine Erklärung für denselben zu geben.

Die Untersuchungen Aitken's haben gezeigt, dass dem Staube eine grosse Wichtigkeit bei der Wolkenbildung zukomme. Zur Wolkenbildung sind somit zwei Elemente nöthig: ein beträchtlicher Wasserdampfgehalt der Luft und ein gewisser Staubgehalt. Wenn nun bei grösserem Wasserdampfgehalt doch eine Condensation nicht eintritt, so liegt dies offenbar am Fehlen des zweiten Factors. Bei wolkenlosem Wetter wird somit der Staubgehalt umso geringer sein, je grösser die absolute Feuchtigkeit ist. Da nun besonders der Staub die ultraviolette Strahlung aufhält, so wird auch die ultraviolette Strahlung umso grösser sein, je grösser die Feuchtigkeit ist.

Wenn übrigens auch die von Elster und Geitel festgestellte Beziehung zwischen Potentialgefälle und ultravioletter Strahlung die ursprüngliche sein sollte, so bleibt damit doch noch die Frage offen, ob die von der Erdoberfläche weggeführte Elektricität auf die Luft oder etwa den Staub übergehe.

Da zwischen Wasserdampfgehalt, Staubgehalt und ultravioletter Strahlung eine so enge Beziehung besteht, ist diese Frage schwer zu entscheiden, doch wäre es unter verschiedenen klimatischen Verhältnissen wohl möglich festzustellen, von welcher Grösse eigentlich der Betrag von ε_0 unmittelbar abhängt.

Übrigens versprechen auch Beobachtungen in den höheren Schichten der Atmosphäre hier vielleicht einige Aufklärung zu geben. Die Beobachtungen auf Berggipfeln leiden an dem Übelstande, dass sie nicht in absolutem Maasse angestellt werden

können; doch bieten mitunter auch nur relative Messungen schon einiges Interesse.

Elster und Geitel haben bei ihrer Bearbeitung der luftelektrischen Messungen auf dem Sonnblick gezeigt, dass der jährliche Gang in dieser Höhe fast verschwindet. Sie fanden[1]

Oct.	Nov.	Dec.	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
0·87	0·84	1·05	0·98	1·13	1·00	1·06	1·07	1·01

Ein ausgesprochener Gang wie an den Stationen der Niederung ist hier nicht mehr zu ersehen. Da allgemein

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon,$$

so würde aus diesen Daten folgen, dass sich über der Höhe des Sonnblicks fast keine elektrischen Massen mehr befinden, durch deren wechselnden Betrag noch ein jährlicher Gang hervorgebracht werden könnte. Es würden somit nach diesen Beobachtungen die den jährlichen Gang des Potentialgefälles hervorrufenden Massen zum grössten Theile in der unterhalb 3000 *m* liegenden Luftschichte zu suchen sein.

Interessante Ergebnisse würden auch systematische Beobachtungen im Ballon versprechen. Man wäre wohl geneigt anzunehmen, dass bei heiterem Wetter derartige Beobachtungen in grösseren Höhen $\frac{dV}{dh}$ constant ergeben dürften.

Das so ermittelte $\frac{dV}{dh}$ wäre dann, wenn ε verschwindet, der Betrag von

$$-\frac{E_0}{a^2}.$$

Wir würden so den Betrag von E_0 leicht ermitteln können.

Wären wir sicher, dass wirklich der Betrag von ε_0 durch den Ausdruck $-kp_0\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$ dargestellt würde,[2] so wäre die Constante A in der Exner'schen Formel, wie wir bereits sahen,

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, II. a. (1893), S. 1311.

[2] Vergl. S. 1046.

gleich $-\frac{E_0}{a^2}$. Diese Voraussetzung ist aber, wenn wir auch an der Geltung der Exner'schen Gleichung festhalten, keineswegs selbstverständlich.

Auch dann, wenn ε durch die Gleichung

$$\varepsilon = C_0 - kp_0 \left(\frac{dV}{dh}\right)_0$$

dargestellt wäre, worin C_0 eine Constante bedeutet, würden wir zu der Exner'schen Formel gelangen, nur dass dann A eben eine andere physikalische Bedeutung hätte, nämlich durch den Ausdruck

$$A = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi C_0$$

gegeben wäre. Wir hätten dann, um E_0 zu finden, von der Constanten A erst den Betrag $4\pi C_0$ abzuziehen. Da wir nun nicht angeben können, wie gross die Constante C_0 in der Gleichung

$$\varepsilon = C_0 - kp_0 \left(\frac{dV}{dh}\right)_0$$

oder, wenn wir auf dem Standpunkte der Theorie von Elster und Geitel stehen, wie gross C'_0 in der Gleichung

$$\varepsilon = C'_0 - KJ \left(\frac{dV}{dh}\right)_0$$

ist, und nicht a priori annehmen können, dass sie Null sei, so ist es nicht gestattet, die Exner'sche Constante A (oder die entsprechende in der Gleichung von Elster und Geitel) als jene Ladung anzusehen, welche die Erdoberfläche besitzen würde, wenn alle Elektricität auf derselben niedergeschlagen wäre.

Die Grösse E_0 können wir somit allein durch Ballonfahrten ermitteln, und zwar durch Messungen in grossen Höhen. Da übrigens sowohl die Formel von Exner, als auch die von Elster und Geitel nur aus Beobachtungen an der Erdoberfläche abgeleitet wurde, so können wir nicht einmal sagen, ob die Constante C_0 oder C'_0 nicht etwa eine Function der Höhe sei.

Es ist ja auch das noch eine Streitfrage, ob die Luft selbst elektrisirbar sei oder nicht. Wenn der Luft selbst eine gewisse Ladung zukäme, würde ja sicher ein für dasselbe Niveau constanter, aber mit der Höhe abnehmender Betrag in dem Ausdrucke für ε enthalten sein müssen.

Über all' diese Fragen versprechen Messungen im Ballon bei schönem Wetter interessante Ergebnisse. Vor Allem ist aber zu beachten, dass unter allen Umständen

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon$$

und es handelt sich nun darum, den Betrag von E_0 und jenen von ε in seiner Abhängigkeit von Wasserdampfgehalt und ultravioletter Strahlung festzustellen.

Dr. Less hat kürzlich in der Zeitschrift für Luftschifffahrt[1] eine kleine Zusammenstellung der luftelektrischen Messungen im Ballon aus der jüngsten Zeit zusammengestellt. Wie sich aus diesen mit ziemlicher Übereinstimmung ergibt, besitzt das Potentialgefälle in den unteren Schichten ziemlich wechselnde Werthe. Nach einigen Beobachtungsreihen nimmt es in den unteren Schichten mit der Höhe zu, nach anderen ab; übereinstimmend aber zeigt sich in den höheren Schichten eine Abnahme des Potentialgefälles. In den Schichten 2500—3000 *m* fanden Börnstein, Le Cadet und Baschin Werthe von rund 15 Volt pro Meter!

Derartige Ergebnisse zeigen bereits, dass die Exner'sche Theorie mit den Thatsachen nicht ohne Weiteres in Einklang zu bringen ist. Nach der Theorie von Exner würden wir, wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, ein Potentialgefälle von etwa 1400 Volt pro Meter beobachten, und zwar nicht bloss an der Erdoberfläche, sondern auch in den höheren Schichten. Ebenso würden wir bei Erhebung über die Wasserdampfatmosphäre nothwendigerweise zu immer grösseren Werthen gelangen und in solchen Atmosphärenhöhen, in welchen der Wasserdampfgehalt der Luft nur mehr sehr gering ist, würden wir diesem Potentialgefälle von etwa 1400 Volt sehr nahe kommen.

---

[1] Zeitschrift für Luftschifffahrt, XIII (1894), S. 190.

Da thatsächlich in den höheren Schichten kleinere Werthe beobachtet werden, als an der Erdoberfläche, müssen ausser den Elektricitätsmengen, welche eventuell ja auf dem Wasserdampfgehalt ihren Sitz haben könnten, sicherlich noch andere, und zwar sehr beträchtliche Elektricitätsmengen vorhanden sein, welche vom Wasserdampfgehalt unabhängig sind.

Wenn wir also auch noch den Wasserdampf als Träger der Elektricität anerkennen wollten, so ist doch nach den Ergebnissen dieser Ballonfahrten gewiss, dass in der Grösse ε noch ein anderes vom Wasserdampf unabhängiges Glied wirklich vorkommt. Es wäre in der That

$$\varepsilon = C_0 - kp_0 \left(\frac{dV}{dh}\right)_0$$

und C_0 hätte einen positiven, mit der Höhe abnehmenden Werth.

Es folgt zugleich aber auch aus diesen Betrachtungen, dass aus der Abnahme des Potentialgefälles mit der Höhe nicht gefolgert werden darf, dass die Exner'sche Theorie ganz und gar unrichtig ist. Es wäre, wie wir sahen, noch immer möglich, eine Ladung des Wasserdampfes anzunehmen, aber insoferne ist Exner's Theorie gewiss unrichtig, als sie den Wasserdampf zum alleinigen Träger der atmosphärischen Elektricität macht. Es müssen ausser den möglicherweise vorhandenen negativen Massen auf dem Wasserdampf noch viel beträchtlichere positive Massen in der Atmosphäre vorhanden sein, die, wie es scheint, einen sehr constanten Betrag ausmachen und desshalb wohl einer Ladung der Luft selbst zugeschrieben werden müssen.

Wäre aller Wasserdampf aus der Luft ausgeschieden, so würden wir nach Exner an der Erdoberfläche ein Potentialgefälle von etwa 1410 Volt beobachten. Nach unserer Formel wäre also

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi C_0 = 1410 \text{ Volt},$$

worin C die Elektricitätsmenge in der über der Flächeneinheit aufruhenden verticalen Luftsäule bedeuten würde, wenn aller

Wasserdampf ausgeschieden wäre. Da nun in Höhen von 3000 *m* der Wasserdampfgehalt der Luft ohnehin sehr gering ist, so dass auf dem Wasserdampfe in der Luftsäule über dem Niveau von 3000 *m* auch nur mehr sehr wenig Elektricität sitzen kann, so würden wir in grossen Höhen, auch wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, nicht viel andere Werthe beobachten.

Wenn wir aber in 3000 *m*

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi C = 15 \text{ Volt}$$

beobachten, wobei unter C die Elektricitätsmenge in der Luftsäule über dem Niveau von 3000 *m* zu verstehen wäre, so hätten wir offenbar rund

$$4\pi(C_0 - C) = 1400 \text{ Volt/Meter.}$$

$C_0 - C$ ist aber nichts anderes, als die nicht an den Wasserdampf gebundene, sondern sonst wo sitzende Elektricität, welche in einer nur 3000 *m* hohen verticalen Luftsäule vom Querschnitte Eins enthalten ist, d. h. es ist in dieser Luftsäule beinahe ebensoviel positive Elektricität vorhanden, als nach Exner (bei Abwesenheit des Wasserdampfes) auf der Flächeneinheit der Erdoberfläche negative Elektricität sitzen würde. Exner nimmt ja an

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} = -4\pi\sigma = 1410 \text{ Volt/Meter,}$$

wobei unter σ die Dichte der Erdoberflächenladung zu verstehen ist.

Wenn sich in grösseren Höhen noch eine weitere Abnahme des Potentialgefälles mit der Höhe zeigen sollte, dann wäre es höchst wahrscheinlich, dass wir an der Grenze der Atmosphäre einen Werth Null beobachten würden, was besagen würde, dass, wie dies von Lord Kelvin ja auch behauptet wurde, die negative Ladung der Erdoberfläche und eventuelle negative elektrische Massen in den unteren Schichten der Atmosphäre vollkommen ausgeglichen würden durch eine entsprechende positive Ladung der Luft. In unserer Gleichung IV) würde in

diesem Falle E_0 verschwinden, d. h. es wäre das Potentialgefälle allein abhängig von der Elektricitätsmenge ε über dem Beobachtungspunkt. Es wäre

$$\frac{dV}{dh} = 4\pi\varepsilon$$

und für die Erdoberfläche

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = 4\pi\varepsilon_0.$$

Würden wir mit Exner dem Wasserdampfe eine negative Ladung zuschreiben, so würde sich ε_0 zusammensetzen aus einer wohl ziemlich constanten positiven Ladung C_0 der Luft (wir wollen diese Menge, um im Einklang mit der Exner'schen Formel zu bleiben, $C_0 = \frac{A}{4\pi}$ nennen), und einer negativen, vom Potentialgefälle und dem Dampfdrucke p_0 abhängigen Ladung $-kp_0\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$. Das heisst, es wäre

$$\varepsilon_0 = \frac{A}{4\pi} - kp_0\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$$

oder

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1+4\pi kp_0}.$$

Würden wir dagegen auf dem Standpunkte von Elster und Geitel stehen, dann würden wir wohl die Versuche, nach welchen gewisse negativ geladene Conductoren unter dem Einflusse ultravioletter Strahlen ihre Ladung verlieren, so deuten, dass wir annehmen, es finde unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlung ein Ausgleich statt zwischen den negativ geladenen Conductoren und den positiv geladenen Luftmolekülen, so dass von der Luftladung ein, der ultravioletten Strahlung und der Dichte der Ladung des Conductors proportionaler Antheil ausgeglichen würde.

Wir hätten wieder

$$\varepsilon_0 = \frac{A}{4\pi} - KJ\left(\frac{dV}{dh}\right)_0$$

oder

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1+4\pi KJ}.$$

Letzteres wäre aber die Formel, durch welche Elster und Geitel ihre Beobachtungen darstellen konnten.

Zu beantworten wäre dann nur noch die Frage: Wie erlangt die Luft wieder ihre normale Ladung? Steht man auf dem Standpunkt der Exner'schen Theorie, erledigt sich diese Frage wohl leicht, die von der Erde im Wasserdampfe weggeführte negative Elektricität würde im Niederschlag wieder herabkommen.

Nimmt man dagegen eine theilweise Entladung der positiv geladenen Luft unter dem Einfluss ultravioletter Strahlen an, dann können wir vorläufig auf die Frage: Wie ladet sich die Luft neu? Wieso kommt es, dass neuerliche Scheidung der Elektricität (die negative zur Erde, die positive zur Luft) eintritt?, keine Antwort geben.

IV. Störungen des normalen Potentialgefälles.

Die mit I bezeichnete Gleichung gilt für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche ganz allgemein. Wir können sie somit auch auf Störungen anwenden und den influenzirenden Einfluss einer Wolke oder Staubschichte durch den Ausdruck

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a$$

leicht berechnen.

Da, wie wir sahen, das ungestörte Potentialgefälle durch den Ausdruck

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0$$

dargestellt ist, so erhalten wir ganz allgemein für das Potentialgefälle an der Erdoberfläche, unter dem Einfluss störender Massen

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0 + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a.$$

Unsere Aufgabe ist somit allein die, wiederum für die störenden Massen das Potential W und W_0 zu berechnen. Wir wollen dies nur ganz allgemein für das Volumselement einer Wolke, welches die elektrische Dichte ρ haben möge, ausführen.

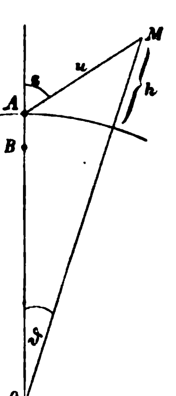


Fig. 2.

M sei jener Punkt der Atmosphäre, in welchem sich das Volumenelement dv befindet, A sei der Punkt der Erdoberfläche, für welchen wir den influenzirenden Einfluss berechnen wollen, h sei die Höhe des Punktes M über der Erdoberfläche, z sei seine Zenithdistanz.

Dann ist im Punkte A das Potential $W_a = \frac{\rho dv}{u}$.

In einem Punkte B in der Distanz r vom Erdmittelpunkte allgemein:

$$W = \frac{\rho dv}{\sqrt{r^2+(a+h)^2-2r(a+h)\cos\vartheta}},$$

somit

$$\frac{dW}{dr} \text{ für } r = a$$

$$\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = -\frac{\rho dv}{u^3}\{a-(a+h)\cos\vartheta\}$$

und, da $(a+h)\cos\vartheta - a = u\cos z$,

$$\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = \frac{\cos z}{u^2}\rho dv$$

also

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = \left(\frac{1}{au} - \frac{1}{a^2} + \frac{2\cos z}{u^2}\right)\rho dv.$$

Da im Allgemeinen u gegen a sehr klein ist, so kann das zweite Glied unberücksichtigt bleiben und wir erhalten somit

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0 + \left(\frac{2\cos z}{u} + \frac{1}{a}\right)\frac{\rho dv}{u}.$$

Solange der betreffende Punkt nahe dem Zenith ist, kann das Glied $\frac{1}{a}$ unbedingt vernachlässigt werden, wenn der Punkt nahe dem Horizont liegt, dann wird $\frac{2 \cos z}{u}$ von derselben Grössenordnung sein, wie $\frac{1}{a}$.

Wollen wir den Einfluss einer Wolke haben, brauchen wir bloss über ihre ganze Ausdehnung zu integriren, erhalten also

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0 + \int\left(2\frac{\cos z}{u} + \frac{1}{a}\right)\frac{\rho dv}{u}. \qquad \text{V)}$$

Diese Gleichung kann unter Umständen gestatten, den Werth der Ladung einer Wolke zu ermitteln.

V. Zusammenfassung.

Die mathematische Behandlung eines Problems bietet den grossen Vortheil, dass sie die Consequenzen irgend einer Annahme mit absoluter Sicherheit festzustellen gestattet. Aus diesem Grunde war es wohl auch erwünscht, das Potentialgefälle an der Erdoberfläche in seiner Abhängigkeit von der Vertheilung der elektrischen Massen mathematisch zu behandeln, um so eine sichere Entscheidung darüber zu ermöglichen, was bei dem Problem, welches die luftelektrischen Erscheinungen darbieten, als unbedingt sicher anzunehmen sei, was dagegen nur möglich ist, und was endlich unbedingt verworfen werden muss, weil es zu Consequenzen führt, die nicht mit den Erfahrungen in Einklang zu bringen sind.

Unzweifelhaft fest steht, wie wir sahen, die Thatsache, dass unsere Erdoberfläche eine negative Ladung besitzt. Aus dem Mittelwerthe des Potentialgefälles $\left(\frac{dV}{dh}\right)_m$ können wir sie berechnen nach der Formel

$$E = -\left(\frac{dV}{dh}\right)_m . a^2 \quad (a \text{ Erdradius}).$$

(Wir dürfen das mittlere Potentialgefälle zu etwa 130 Volt-Meter annehmen, also E auf $-21 . 10^{14}$ st. Einh. schätzen.)

Diese Ladung der Erdoberfläche ist als eine gewiss ziemlich unveränderliche Grösse anzusehen; doch ist es möglich, dass sie eine kleine jährliche Schwankung zeigt. Jedenfalls dürfen wir die Schwankungen des Potentialgefälles in ihren wesentlichsten Punkten nicht Änderungen in der Erdoberflächenladung zuschreiben.

Die Schwankungen des Potentialgefälles an der Erdoberfläche sind vielmehr, auch das ist sicher, auf den influenzirenden Einfluss ausserhalb der Erdoberfläche befindlicher Massen zurückzuführen. Wenn wir von diesen äusseren Massen das Potential im Erdmittelpunkt (W_0) und am Beobachtungspunkt (W_a), sowie das Gefälle im letzteren $\left(\frac{dW}{dr}\right)_{r=a}$ kennen, dann ist, wo immer die äusseren Massen ihren Sitz haben mögen, das Potentialgefälle an der Erdoberfläche gegeben durch den Ausdruck

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E}{a^2} + \frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a . \qquad \text{I)}$$

Bei ungestörtem Potentialgefälle (Potentialniveaux parallel der Erdoberfläche) ist in einer beliebigen Höhe das Potentialgefälle

$$\frac{dV}{dh} = \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 - 4\pi\eta, \qquad \text{II)}$$

wenn η die Elektricitätsmenge darstellt, welche in der zwischen beiden Niveaux liegenden Luftsäule vom Querschnitt eins enthalten ist.

Aus dieser Formel I folgt, dass die äusseren Massen nicht im Kosmos ihren Sitz haben können, sonst müssten sie sich vor allem in der täglichen Periode äussern, was aber nicht der Fall ist, nachdem letztere überhaupt nur einen sehr kleinen Gang aufweist.

Die elektrischen Massen, durch deren Influenzwirkung die Änderungen des Potentialgefälles zustande kommen, sind somit sicher in der Atmosphäre enthalten. Wenn dies aber der Fall ist, dann lässt sich der Influenzeinfluss sehr einfach darstellen, dann ist unter allen Umständen (bei normalem Wetter):

$$\frac{W_a - W_0}{a} + 2\left(\frac{dW}{dr}\right)_a = -\frac{e}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0,$$

worin e die gesammte, in der Atmosphäre vorhandene Elektricität, ε_0 aber nur jener Theil ist, welcher in der über der Flächeneinheit (am Beobachtungsort) aufruhenden Luftsäule enthalten ist.

Es ist dann, wenn man $E+e$, also die Gesammtelektricität des Erdballs E_0 nennt, ganz allgemein das Potentialgefälle an der Erdoberfläche durch die viel einfachere Gleichung dargestellt

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0 \qquad \text{III)}$$

und das Potentialgefälle in einer beliebigen Höhe

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon, \qquad \text{IV)}$$

wenn ε die Elektricitätsmenge in der entsprechenden Luftsäule über dem Niveau, in welchem sich der Beobachtungsort befindet, bedeutet.

Die Änderungen des Potentialgefälles werden somit allein hervorgebracht durch die influenzirenden Elektricitätsmengen, welche in der über dem Beobachtungsort befindlichen Luftsäule vom Querschnitt eins enthalten sind.

Hiernach vermögen sowohl die Theorie von F. Exner, welche den Sitz dieser Elektricität auf dem Wasserdampf sucht, als auch die Theorie von Elster und Geitel, nach welcher ein Theil der negativen Erdoberflächenladung in die Atmosphäre zerstreut wird, den Thatsachen gerecht zu werden.

Es darf aber nicht a priori angenommen werden, dass ausser der auf dem Wasserdampf eventuell vorhandenen Elektricität (nach Exner), oder ausser der vom Erdboden unter dem Einfluss der ultravioletten Strahlen entwichenen Elektricität (nach Elster und Geitel), keine anderen Elektricitätsmengen in der Atmosphäre enthalten seien.

Nach Exner würde, wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, an der Erdoberfläche ein Potentialgefälle 1410 Volt/Meter herrschen

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon_0' = 1410.$$

ε_0' wäre die Elektricitätsmenge in der Luftsäule über dem Beobachtungsort, wenn aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre.

Da nun nach Ballonbeobachtungen in einer Höhe von nur 3000 *m* ein Potentialgefälle von nur etwa 15 Volt/Meter herrscht, so hätte man

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{E_0}{a^2} + 4\pi\varepsilon' = 15.$$

Es ist also $\varepsilon_0' - \varepsilon$ ein ziemlich beträchtlicher positiver Werth, d. h. wenn auch aller Wasserdampf niedergeschlagen wäre, hätten wir noch eine beträchtliche positive Elektricitätsmenge in der Atmosphäre anzunehmen, vermuthlich auf der Luft selbst.

Es ist somit wahrscheinlich, dass eine der negativen Erdoberflächenladung entsprechende positive Luftladung vorhanden ist, derart, dass die Gesammt-Elektricität E_0 gleich Null wäre.

Auch nach der Theorie von Elster und Geitel müssten wir, um den Beobachtungen im Ballon gerecht zu werden, neben der von der Erdoberfläche entweichenden negativen Elektricität eine positive Ladung der Luft annehmen, würden also wohl die Thatsache der lichtelektrischen Zerstreuung so deuten, dass die positiv geladene Luft unter dem Einfluss der ultravioletten Strahlung befähigt werde, sich gegen gewisse negativ geladene Conductoren zu entladen und dadurch diesen ihre Elektricität zu entziehen. Sollte diese Auffassung durch das Experiment als richtig bewiesen werden, dann könnte wohl nur mehr die Theorie von Elster und Geitel zur Erklärung der luftelektrischen Erscheinungen herangezogen werden und die schöne Übereinstimmung der Exner'schen Formel mit den Beobachtungen, wäre allein durch den — man möchte fast sagen — zufälligen Zusammenhang zwischen ultravioletter Strahlung und Wasserdampfgehalt der Atmosphäre zu erklären.

Vorläufig steht wohl nur fest, dass wir es mit einer positiven, überall, wie es scheint, constanten Ladung der Atmosphäre zu thun haben, welche entweder superponirt ist von einer nega-

tiven Ladung, die auf dem Wasserdampf ihren Sitz hätte (proportional der Dichte der Erdoberflächenladung und dem Dampfgehalte der Luft); oder superponirt, beziehungsweise ausgeglichen wird, durch die unter dem Einfluss der ultravioletten Strahlung von der Erdoberfläche entweichenden negativen Elektricität (proportional gleichfalls der Dichte der Erdoberflächenladung und der Intensität der ultravioletten Strahlung).

Beide Annahmen ergeben die gleiche Formel

$$\left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi k p_0}, \text{ beziehungsweise } \left(\frac{dV}{dh}\right)_0 = \frac{A}{1 + 4\pi K J},$$

deren jede auch den Thatsachen der Beobachtung entspricht.

Hier vermag nur eine Erweiterung unseres Erfahrungswissens zu entscheiden; aber eine, den Umfang einer Annahme genau abgrenzende Formel kann hiebei sehr wesentliche Dienste thun.

Es liegt in der Natur der Sache, dass eine theoretische Erörterung sachlich wenig Neues bietet; ihre Hauptaufgabe ist die klare und präcise Zusammenfassung unseres bisherigen Erfahrungswissens und dessen, was mit Nothwendigkeit aus ihm folgt.

Über das Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung

von

Jos. Finger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1894.)

Bei Gelegenheit meiner theoretischen Untersuchungen der Elasticitätsverhältnisse aëolotroper Substanzen [1] ergab sich behufs Entscheidung der wichtigen Frage, wann in krystallinischen Substanzen die Deformationshauptaxen mit den Hauptdruckaxen übereinstimmen, die Nothwendigkeit, für zwei Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, deren allgemeine Gleichungen gegeben sind, jene Beziehungen zwischen den Coëfficienten dieser Gleichung aufzustellen, die in dem Falle nothwendig und hinreichend sind, wenn die Hauptaxen der einen Fläche mit jenen der anderen gleichgerichtet sind. Da nun, soweit dies mir bekannt ist, dieses Problem in den Handbüchern der analytischen Geometrie nicht behandelt ist, so erlaube ich mir, das von mir gefundene Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen, deren auf irgend ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Mittelpunktsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2 + 2 b_x yz + 2 b_y zx + 2 b_z xy &= d \\ a'_x x^2 + a'_y y^2 + a'_z z^2 + 2 b'_x yz + 2 b'_y zx + 2 b'_z xy &= d' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sind, hier bekannt zu machen.

Dieses Kriterion findet seinen Ausdruck in den drei Gleichungen

---

[1] »Über die allgemeinsten Beziehungen endlicher Deformationen zu den zugehörigen Spannungen in anisotropen und isotropen Substanzen«. Diese Sitzungsber., 1894 (Octoberheft).

$$\left.\begin{aligned}
u &= \begin{vmatrix} a_y - a_z, & b_x \\ a'_y - a'_z, & b'_x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_y, & b_z \\ b'_y, & b'_z \end{vmatrix} = 0 \\
v &= \begin{vmatrix} a_z - a_x, & b_y \\ a'_z - a'_x, & b'_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_z, & b_x \\ b'_z, & b'_x \end{vmatrix} = 0 \\
w &= \begin{vmatrix} a_x - a_y, & b_z \\ a'_x - a'_y, & b'_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_x, & b_y \\ b'_x, & b'_y \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Um zunächst nachzuweisen, dass diese drei Gleichungen für die Coaxialität der beiden Flächen (1) nothwendig sind, hat man nur etwa auszugehen von den auf die Hauptaxen $\xi\eta\zeta$ dieser Flächen bezogenen Gleichungen derselben, welche auf die Form

$$\left.\begin{aligned}
a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 &= d \\
a'\xi^2 + b'\eta^2 + c'\zeta^2 &= d'
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

gebracht werden können, wo, wenn $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$, $(\beta_x \beta_y \beta_z)$, $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$ die Richtungscosinus der der Annahme zufolge beiden Flächen gemeinsamen Axenrichtungen ξ, η, ζ bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= a\alpha_x^2 + b\beta_x^2 + c\gamma_x^2, & b_x &= a\alpha_y\alpha_z + b\beta_y\beta_z + c\gamma_y\gamma_z \\
a_y &= a\alpha_y^2 + b\beta_y^2 + c\gamma_y^2, & b_y &= a\alpha_z\alpha_x + b\beta_z\beta_x + c\gamma_z\gamma_x \\
a_z &= a\alpha_z^2 + b\beta_z^2 + c\gamma_z^2, & b_z &= a\alpha_x\alpha_y + b\beta_x\beta_y + c\gamma_x\gamma_y
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned}
a'_x &= a'\alpha_x^2 + b'\beta_x^2 + c'\gamma_x^2, & b'_x &= a'\alpha_y\alpha_z + b'\beta_y\beta_z + c'\gamma_y\gamma_z \\
a'_y &= a'\alpha_y^2 + b'\beta_y^2 + c'\gamma_y^2, & b'_y &= a'\alpha_z\alpha_x + b'\beta_z\beta_x + c'\gamma_z\gamma_x \\
a'_z &= a'\alpha_z^2 + b'\beta_z^2 + c'\gamma_z^2, & b'_z &= a'\alpha_x\alpha_y + b'\beta_x\beta_y + c'\gamma_x\gamma_y
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ist.

Aus diesen Werthen (4) und (5) ergibt sich nach einer einfachen Reduction, dass, wenn durch s die Summe

$$s = a'(b-c) + b'(c-a) + c'(a-b)$$

bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}
(a_y - a_z) . b'_x - b_x(a'_y - a'_z) &= s . \alpha_x \beta_x \gamma_x = b_y b'_z - b_z b'_y \\
(a_z - a_x) . b'_y - b_y(a'_z - a'_x) &= s . \alpha_y \beta_y \gamma_y = b_z b'_x - b_x b'_z \\
(a_x - a_y) . b'_z - b_z(a'_x - a'_y) &= s . \alpha_z \beta_z \gamma_z = b_x b'_y - b_y b'_x
\end{aligned}$$

ist, wodurch die Nothwendigkeit der Gleichungen (2) nachgewiesen ist.

Um auch nachzuweisen, dass die Voraussetzung der Bedingungsgleichungen (2) für die Coaxialität der Flächen (1) hinreichend ist, benütze man die Gleichungen (4), welche ausdrücken, dass $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$, $(\beta_x \beta_y \beta_z)$, $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$ die Richtungscosinus der Axenrichtungen $\xi \eta \zeta$ der ersten der beiden Flächen (1) sind, wofern die erste der Gleichungen (3) die auf diese Axen $\xi \eta \zeta$ bezogene Gleichung dieser Fläche ist.

Aus diesen Gleichungen (4) folgt zunächst

$$\left.\begin{aligned}
A_x &= a_y a_z - b_x^2 = bc.\alpha_x^2 + ca.\beta_x^2 + ab.\gamma_x^2 \\
A_y &= a_z a_x - b_y^2 = bc.\alpha_y^2 + ca.\beta_y^2 + ab.\gamma_y^2 \\
A_z &= a_x a_y - b_z^2 = bc.\alpha_z^2 + ca.\beta_z^2 + ab.\gamma_z^2 \\
B_x &= b_y b_z - a_x b_x = bc.\alpha_y \alpha_z + ca.\beta_y \beta_z + ab.\gamma_y \gamma_z \\
B_y &= b_z b_x - a_y b_y = bc.\alpha_z \alpha_x + ca.\beta_z \beta_x + ab.\gamma_z \gamma_x \\
B_z &= b_x b_y - a_z b_z = bc.\alpha_x \alpha_y + ca.\beta_x \beta_y + ab.\gamma_x \gamma_y
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Bildet man mit Zuhilfenahme der Gleichungen (2) die Summen $a_x u + b_z v + b_y . w$, $b_z u + a_y v + b_x w$, $b_y u + b_x v + a_z w$, so gelangt man, da $A_x = a_y a_z - b_x^2$, $A_y = a_z a_x - b_y^2, \ldots$ ist, zu den mit (2) ähnlich lautenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
U &= \begin{vmatrix} A_y - A_z, & B_x \\ a'_y - a'_z, & b'_x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_y B_z \\ b'_y b'_z \end{vmatrix} = 0 \\
V &= \begin{vmatrix} A_z - A_x, & B_y \\ a'_z - a'_x, & b'_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_z B_x \\ b'_z b'_x \end{vmatrix} = 0 \\
W &= \begin{vmatrix} A_x - A_y, & B_z \\ a'_x - a'_y, & b'_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_x B_y \\ b'_x b'_y \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Werden nun durch u_a, u_b, u_c, $v_a \ldots$ kürzehalber die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
u_a &= -\alpha_y \alpha_z (a'_y - a'_z) + (\alpha_y^2 - \alpha_z^2) b'_x + \alpha_x \alpha_y b'_y - \alpha_z \alpha_x b'_z \\
u_b &= -\beta_y \beta_z (a'_y - a'_z) + (\beta_y^2 - \beta_z^2) b'_x + \beta_x \beta_y b'_y - \beta_z \beta_x b'_z \\
u_c &= -\gamma_y \gamma_z (a'_y - a'_z) + (\gamma_y^2 - \gamma_z^2) b'_x + \gamma_x \gamma_y b'_y - \gamma_z \gamma_x b'_z \\
v_a &= -\alpha_z \alpha_x (a'_z - a'_x) + (\alpha_z^2 - \alpha_x^2) b'_y + \alpha_y \alpha_z b'_z - \alpha_x \alpha_y b'_x \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

bezeichnet, welche ähnlich gebildet sind, wie die Ausdrücke (2) und (7), so ersieht man aus denselben und aus den Werthen (4) und (6), dass

$$u = au_a + bu_b + cu_c, \qquad v = av_a + bv_b + cv_c,$$
$$w = aw_a + bw_b + cw_c;$$

$$U = bcu_a + cau_b + abu_c, \qquad V = bcv_a + cav_b + abv_c,$$
$$W = bcw_a + caw_b + abw_c$$

ist. Demgemäss ist den Gleichungen (8), (7) und (2) zufolge

$$\left.\begin{aligned} u_a + u_b + u_c &= 0 \\ a\,.\,u_a + b\,.\,u_b + c\,.\,u_c &= 0 \\ bc\,.\,u_a + ca\,.\,u_b + ab\,.\,u_c &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und dieselben Gleichungen (9) bestehen auch, wenn u_r durch v_r oder durch w_r ersetzt wird.

Sind nun abc von einander verschieden, so folgt aus diesen Gleichungen, dass nothwendigerweise alle u_r, v_r und w_r verschwinden müssen, also z. B. $u_a = 0$, $v_a = 0$ und $w_a = 0$, daher nach (8)

$$\frac{\alpha_x a'_x + \alpha_y b'_z + \alpha_z b'_y}{\alpha_x} = \frac{\alpha_x b'_z + \alpha_y a'_y + \alpha_z\,.\,b'_x}{\alpha_y} =$$
$$= \frac{\alpha_x b'_y + \alpha_y\,.\,b'_x + \alpha_z\,.\,a'_z}{\alpha_z} \tag{10}$$

ist, welche bekannte Beziehung sofort erkennen lässt, dass die Axe ξ, deren Richtungscosinus $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$ sind, auch eine Axe der zweiten Fläche (1) ist — und in gleicher Weise folgt aus $u_b = v_b = w_b = 0$, beziehungsweise aus $u_c = v_c = w_c = 0$, dass auch η, beziehungsweise ζ eine Hauptaxe derselben Fläche ist.

Sind dagegen zwei von den Grössen abc einander gleich, etwa $b = c$, also die erste der Flächen (1) eine Rotationsfläche, deren Rotationsaxe ξ ist, so folgt aus den Gleichungen (9) unmittelbar, dass entweder $a = b = c$, also die letztere Fläche eine Kugelfläche ist, in welchem Falle jedenfalls eine Co-

axialität der beiden Flächen (1) besteht, oder dass $u_a = 0$ und in gleicher Weise $v_a = 0$, $w_a = 0$ ist, demnach die Doppelgleichung (10) statthat, aus welcher Doppelgleichung zu folgern ist, dass diese Rotationsaxe ξ mit einer Axe der zweiten Fläche (1) gleichgerichtet ist und daher die beiden anderen Axen dieser letzteren Fläche in die Richtung zweier Äquatorialdurchmesser der ersteren Rotationsfläche fallen, so dass auch in diesem Falle die beiden Flächen (1) coaxial sind.

XXIV. SITZUNG VOM 16. NOVEMBER 1894.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine im Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag begonnene, im Universitätslaboratorium in Göttingen zu Ende geführte Arbeit des seither verstorbenen Dr. Heinrich Mach, betitelt: »Untersuchungen über Abietinsäure« (II. Mittheilung).

Herr Ingenieur H. Guzmann, Professor an der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz, übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Beschreibung und zugehörige Skizzen eines neuen Grundprincipes der Construction von Schiffsrädern und Schiffsschrauben«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner überreicht den fünften Theil seiner Pflanzenphysiologischen Mittheilungen aus Buitenzorg unter dem Titel: »Studien über die Anisophyllie tropischer Gewächse«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine Abhandlung von Dr. Josef Lartschneider, em. Assistent der II. anatomischen Lehrkanzel an der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Die Steissbeinmuskeln des Menschen und ihre Beziehungen zum M. Levator ani und zur Beckenfascie (eine vergleichend anatomische Studie)«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht eine im III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn Paul Cohn: »Über einige Derivate des Phenylindoxazens«.

XXV. SITZUNG VOM 29. NOVEMBER 1894.

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ludwig Salvators, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übermittelte Druckwerk: »Die Liparischen Inseln. VIII. Allgemeiner Theil« vor.

Ferner legt der Secretär den 44. Jahrgang des Almanach der kaiserl. Akademie für das Jahr 1894 und das erschienene Heft VIII (October 1894), Abtheilung II. a. des 103. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Herr Prof. Dr. V. Hilber in Graz dankt für die ihm zur Fortsetzung seiner geologischen Forschungen in der südlichen europäischen Türkei aus den Erträgnissen der Boué-Stiftung bewilligte Reisesubvention; desgleichen dankt Herr Prof. Dr. Ed. Richter in Graz für eine ihm zum Zwecke des Studiums der Terrainformen in der Hochregion des scandinavischen Gebirges von der Akademie gewährte Reisesubvention.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Alexander Bauer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz von Dr. G. v. Georgievics: »Über das Wesen des Färbeprocesses.«

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Beiträge zur Kenntniss der Laubmoosflora des Hochgebirgstheiles der Sierra Nevada in Spanien«, von Prof. Dr. F. v. Höhnel an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

2. »Die Wirkungsweise der Condensatoren im Wechselstromkreise«, von Dr. Gustav Benischke in Innsbruck.
3. Einige Bemerkungen zu J. Finger's Abhandlung: »Das Potential der inneren Kräfte etc. (I.)«, von Prof. Dr. Waldemar Voigt in Göttingen.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht folgende zwei im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeiten:

1. »Studien über Quercetin und seine Derivate« (X. Abhandlung), von Dr. J. Herzig.
2. »Über die Einwirkung von Alkalien auf bromirte Phloroglucinderivate«, von J. Herzig und J. Pollak.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Ernst Roithner: »Zur Kenntniss des Äthylenoxydes«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. VIII. Allgemeiner Theil. Prag, 1894; Folio.

Le Musée Bohême, Système silurien du centre de la Bohême par Joachim Barrande. Ière Partie: Recherches Paléontologiques. Continuation éditée par le Musée Bohême. Vol. VIII. Tome Ier. *Bryozoaires*, *Hydrozoaires* et partie des *Anthozoaires* par Ph. Počta. (Text et 21 Planches.) (De la part du Musée Bohême conformément au désir exprimé par Joachim Barrande dans son testament.) Prague, 1894; 4°.

Haeckel, E., Systematische Phylogenie der Protisten und Pflanzen. I. Theil des Entwurfs einer systematischen Phylogenie. Berlin, 1894; 8°.

Einige Bemerkungen zu Herrn Jos. Finger's Abhandlung „Das Potential der inneren Kräfte etc."

von

W. Voigt.

Die von Herrn J. O. Thompson im Jahre 1891 veröffentlichten Beobachtungen[1] über die elastischen Dehnungen von Drähten haben mehrfache Aufmerksamkeit dadurch erregt, dass der Verfasser schon bei sehr kleinen Dehnungen — sie betrugen im Maximum noch nicht 67 *mm* bei einer Gesammtlänge der Drähte von 22700 *mm* — bedeutende Abweichungen von der Proportionalität zwischen der Grösse der Dehnung und derjenigen des streckenden Gewichtes erhielt. Da ich bei zahlreichen elastischen Messungen, die sich auf Biegung und Torsion von Prismen — auch von Metallen — bezogen, der Frage der Proportionalität grosse Aufmerksamkeit zugewandt, aber Abweichungen von irgend welchem Belang nicht erhalten hatte, so bot sich mir naturgemäss die Frage nach der Ursache der Abweichungen zwischen den von Herrn Thompson und den von mir erhaltenen Beobachtungsresultaten. Die Behandlung dieser Aufgabe habe ich in zwei im Juli 1893[2] und Januar 1894[3] verfassten Arbeiten geliefert und den Inhalt dieser Abhandlungen später zusammengefasst an einer anderen Stelle[4] publicirt.

---

[1] Wied. Ann. Bd. 44, S. 555, 1891.

[2] Götting. Nachr. 1893, Nr. 13.

[3] Götting. Nachr. 1894, Nr. 1.

[4] Wied. Ann. Bd. 52, S. 536, 1894.

Gegen den Inhalt der ersten dieser Arbeiten hat Herr Jos. Finger,[1] der etwa gleichzeitig mit mir dieselbe Frage in Angriff genommen hat, schwere Bedenken erhoben, und ich sehe mich genöthigt, auf dieselben kurz einzugehen. Ein Theil der gemachten Einwände ist allerdings durch meine oben genannte zweite Abhandlung, die Herr Finger nicht kennen konnte, da sie fast genau zu derselben Zeit publicirt ist, wie die seinige, im Voraus erledigt worden; andere beruhen auf leicht erkennbarem Missverstehen meiner Worte; immerhin bleibt bestehen, dass Herr Finger für die Componenten der elastischen Drucke wesentlich complicirtere Ausdrücke erhält, als ich, und die seinigen als richtig, die meinigen als falsch bezeichnet.

Eine einfache Überlegung zeigt nun aber, dass die Aufgabe, die sich Herr Finger gestellt hat, überhaupt eine andere ist, als die, um deren Lösung ich mich bemüht habe.

Die ältere Elasticitätstheorie setzt Deformationen von solcher Kleinheit voraus, dass die Differentialquotienten der Verrückungen nach den Coordinaten — welche reine Zahlen sind – neben Eins vernachlässigt werden können. Es versteht sich also von selbst, dass bei Beobachtungen, deren Genauigkeit grösser ist, als der Werth der Deformationsgrössen, die Resultate der Theorie, vor allem die Proportionalität zwischen den wirkenden Kräften und den erzielten Deformationsgrössen, durch die Beobachtung nicht bestätigt werden können. Diese Abweichungen will ich daher die nothwendigen nennen.

Was mich an den Thompson'schen Resultaten besonders interessirte, weil es scheinbar im Widerspruch mit den Erwartungen und mit den Resultaten meiner zahlreichen und mühsamen Beobachtungen stand, war indessen etwas anderes: die Abweichungen von der Proportionalität zwischen Deformationen und Kräften unter Umständen, wo die Deformationsgrössen neben Eins vernachlässigt werden durften. Auf solche Verhältnisse bezogen sich nämlich alle meine Beobachtungen, die — schon unter dem Zwang der Zerbrechlichkeit der Krystallstäbchen — Deformationen unterhalb 1/1000 und eine Genauigkeit von etwa demselben Betrag benutzten. Diese

[1] Wiener Ber. Bd. 103, Abth. II a, S. 163, 1894.

Abweichungen könnte man als unerwartete bezeichnen, und auf ihre Untersuchung beziehen sich ersichtlicher Weise ganz allein meine Abhandlungen. So sage ich in der Einleitung: »Nachdem durch neuere Beobachtungen gezeigt ist, dass man unter Umständen, wo man früher die Giltigkeit der alten Formeln für selbstverständlich hielt, bereits erhebliche Abweichungen von der Proportionalität.... findet, scheint es angemessen, die Erweiterungen zu untersuchen, welche die ältere Theorie erfahren muss, um mit jenen Resultaten in Einklang zu kommen.« Die (erst hier) gesperrt gedruckten Worte charakterisiren vielleicht zu kurz, aber doch ziemlich deutlich das gestellte Problem, womit übereinstimmt, dass bei der Entwickelung desselben Resultate benutzt werden, in denen die Deformationsgrössen selbst neben Eins vernachlässigt sind.

Hiermit steht aber keineswegs im Widerspruch, dass ich in dem elastischen Potential die Glieder dritten Grades neben denen zweiten Grades eingeführt habe; denn die ersteren sind mit Constanten multiplicirt, welche von den Factoren der letzteren unabhängig sind und jedenfalls bei den Thompson'schen Beobachtungen eine solche Grösse gehabt haben, dass jene Glieder eine merkliche Wirkung äussern konnten.

Um dies hervortreten zu lassen, will ich aus den auf Messing bezüglichen Beobachtungsreihen, die übrigens den andern völlig gleichwerthig sind, einige Resultate zusammenstellen. Die erste Columne enthielt die angewandten Belastungen, die zweite die Mittelwerthe der beobachteten Dehnungen, die dritte die Differenzen der aufeinander folgenden Werthe der letzteren, d. h. also, die bei den verschiedenen Anfangsbelastungen bei 0·2 *kg* Übergewicht eintretenden Dehnungen.

0·2 *kg*	7·111 *mm*	7·111 *mm*
0·4	14·269	7·158
0·6	21·489	7·220
0·8	28·772	7·283
1·0	36·124	7·352 u. s. f.

Beachtet man, dass die Gesammtlänge des benutzten Drahtes 22700 *mm* war, so erkennt man, dass bei den vor-

stehenden Beobachtungen die Abweichungen von der Proportionalität um das Vielfache grösser waren, als die Beträge der Dilatationen, woraus die Berechtigung der von mir gewählten Fragestellung offenbar folgt.

Nachdem somit die specielle, aber in sich völlig abgeschlossene Aufgabe charakterisirt ist, die ich mir gestellt hatte, ist der Unterschied gegenüber der von Herrn Finger in Angriff genommenen leicht auszusprechen; am kürzesten in der Form, dass Herr Finger die Gesetze nicht nur jener unerwarteten, sondern auch der oben als nothwendig bezeichneten Abweichungen zum Ziel seiner Entwickelung gewählt hat. In der That geht er von der Annahme von Deformationen aus, die neben der Einheit nicht zu vernachlässigen sind.

Dass diese umfassendere Aufgabe zu complicirteren Resultaten führen muss, als die von mir behandelte speciellere, ist klar; jedenfalls müssen die von Herrn Finger abgeleiteten Werthe der Druckkräfte in die meinigen übergehen, wenn man die Differentialquotienten der Verrückungen nach den Coordinaten neben Eins vernachlässigt. Dies findet wirklich statt, und damit ist die Vereinbarkeit unserer beiderseitigen Resultate jedenfalls erwiesen.

Göttingen im November 1894.

Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aeolotropen und isotropen Substanzen[1]

von

Jos. Finger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1894.)

Bei einer jeden homogenen Deformation irgend eines Punktsystems ist, wenn man von dessen translatorischer Bewegung absieht,

$$\left.\begin{aligned} x_t &= a_{11}x_0+a_{21}y_0+a_{31}z_0 \\ y_t &= a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{32}z_0 \\ z_t &= a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wofern durch $(x_0 y_0 z_0)$ die anfänglichen und durch $(x_t y_t z_t)$ die zur beliebigen Zeit t bestehenden, auf ein an der translatorischen Bewegung des Punktsystems theilnehmendes Axensystem bezogenen Coordinaten irgend eines Punktes dieses Punktsystems bezeichnet sind und wofern die Coëfficienten

---

[1] Da sich in dieser Abhandlung öfter die Nothwendigkeit ergibt, auf zwei frühere Abhandlungen desselben Verfassers, nämlich

Finger, Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbarer Flächen zweiter Ordnung (diese Sitzungsber., Bd. CI, Abth. II. a, Mai 1892, S. 1105—1142) und

Finger, Das Potential der inneren Kräfte u. s. w., I. und II. Theil (diese Sitzungsber., Bd. CIII, Abth. II. a, Februar 1894, S. 163—200 und April 1894, S. 231—250),

hinzuweisen, so soll kürzehalber für die erste dieser Abhandlungen stets das Citat W. S. 1892, für die letztere W. S. 1894 zur Anwendung kommen.

$a_{11} a_{21} \ldots$ irgend welche Functionen der Zeit sind, die jedoch von $x_0 y_0 z_0$ nicht abhängen.

Bekanntlich kann nun eine jede Deformation eines beliebigen unendlich kleinen Körperelementes, dessen anfängliches Volum durch dv bezeichnet sei, als eine homogene angesehen werden, wofern die anfänglichen — auf ein an der Bewegung des Körpers nicht theilnehmendes orthogonales Axensystem sich beziehenden — Coordinaten (xyz) irgend eines Punktes m dieses Körperelementes durch diese Deformation, durch welche m zur Zeit t nach M gelangen möge, stets nur solche Werthe $X = x+\xi$, $Y = y+\eta$, $Z = z+\zeta$ erlangen, für welche die Componenten ξ, η, ζ der stattgefundenen Verschiebung mM dauernd stetige Functionen der anfänglichen Lage (xyz) und der Zeit t sind — und zwar ist dann, wie bekannt, in (1) $(x_0 y_0 z_0)$ durch (dx, dy, dz), ferner $(x_t y_t z_t)$ durch (dX, dY, dZ) zu ersetzen[1] und die Coëfficienten $a_{11} a_{21} \ldots$ haben dann die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= 1+\frac{\partial\xi}{\partial x} = 1+\lambda_x, & a_{21} &= \frac{\partial\xi}{\partial y} = \nu_z, & a_{31} &= \frac{\partial\xi}{\partial z} = \mu_y \\
a_{12} &= \frac{\partial\eta}{\partial x} = \mu_z, & a_{22} &= 1+\frac{\partial\eta}{\partial y} = 1+\lambda_y, & a_{32} &= \frac{\partial\eta}{\partial z} = \nu_x \\
a_{13} &= \frac{\partial\zeta}{\partial x} = \nu_y, & a_{23} &= \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \mu_x, & a_{33} &= 1+\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 1+\lambda_z
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wo durch $\lambda_x \mu_x \nu_x \ldots$ kürzehalber die entsprechenden Verschiebungsderivationen, d. i. die partiellen Differentialquotienten der Componenten $\xi\eta\zeta$ der Verschiebung bezeichnet sind.

In der allgemeinen Elasticitätstheorie sind von ganz hervorragender Bedeutung sechs Functionen $(a_x a_y a_z b_x b_y b_z)$, beziehungsweise $(\mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_y \mathfrak{a}_z b_x b_y b_z)$ der eben betrachteten neun Coëfficienten $a_{11} \ldots a_{33}$ der Grundgleichungen (1), nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1+2\mathfrak{a}_x \\
a_y &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1+2\mathfrak{a}_y \\
a_z &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1+2\mathfrak{a}_z \\
b_x &= a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} + a_{23} a_{33} \\
b_y &= a_{31} a_{11} + a_{32} a_{12} + a_{33} a_{13} \\
b_z &= a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + a_{13} a_{23}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

[1] Siehe Finger, W. S. 1894, S. 165 und 166.

George Green[1] war der erste, der diese sechs Functionen $a_x \ldots b_z$ in Betracht gezogen und nicht nur gezeigt hat, dass die Deformation eines Körperelementes (abgesehen von dessen Drehung) in jedem Falle durch diese sechs Grössen (die Green durch $a^2 b^2 c^2 \alpha' \beta' \gamma'$ bezeichnet) vollständig bestimmt ist, sondern der auch klar erkannt hat, dass das Potential dU der inneren Kräfte (das »elastische Potential«) bei einer jeden Deformation irgend eines Körperelementes dv durch

$$dU = f.dv \tag{4}$$

ausgedrückt ist, wobei die Potentialfunction[2] f (von Green durch φ bezeichnet), mag die Deformation und das Körperelement welcher Art auch immer sein, stets nur eine Function dieser sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ ist.

In Kürze sei auch auf die ferneren Untersuchungen über denselben Gegenstand, welche von Saint Vénant[3] — dessen Behauptung, dass durch $\mathfrak{a}_x = \frac{1}{2}(a_x - 1)$, $\mathfrak{a}_y = \frac{1}{2}(a_y - 1)$, $\mathfrak{a}_z = \frac{1}{2}(a_z - 1)$ die linearen Dilatationen in den zu den Coordinatenaxen parallelen Richtungen und durch $b_x b_y b_z$ die entsprechenden Masse der Schiebungen (fr. glissements, engl.

---

[1] George Green, On the propagation of light in crystallized media (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1839). — Green, On the laws of reflexion and refraction of light (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1838). — Siehe auch Mathematical Papers of George Green, edited by N. M. Ferrers (London 1871), p. 249, 296, 297.

[2] Es muss ausdrücklich bemerkt werden, dass hier und auch späterhin stets als »Potential« dU jene Function bezeichnet ist, deren dem Zeitelemente dt entsprechendes Differential $df.dv$ die von den inneren Kräften in diesem Zeitelemente dt geleistete mechanische Arbeit ausdrückt. Wird dagegen, wie dies häufig geschieht, das Potential $U = \int f.dv$ mit »potenzieller Energie« identificirt, so ist in den folgenden Gleichungen, besonders in (15), (17) u. s. w. statt f überall zu setzen $(-f)$.

[3] Saint Vénant, Mémoire sur l'équilibre des corps solides dans les limites de leur élasticité et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leur points ne sont pas très-petites. Comptes rendus, vol. XXIV (1847), p. 260—263.

slides) bestimmt sind, nur eine beschränkte Giltigkeit hat,[1] nämlich nur für den besonderen Fall, dass die zweiten und die höheren Potenzen der Verschiebungsderivationen $\lambda_x \mu_z \dots$ vernachlässigt werden — ferner von Lord Kelvin (W. Thomson),[2] Boussinesq[3] herrühren, hingewiesen.

Die geometrische Bedeutung dieser sechs Grössen $a_x \dots b_z$ erhellt aus folgender Betrachtung:

Es seien durch $A_{11} A_{12} \dots A_{33}$ die zu $a_{11} a_{12} \dots a_{33}$ adjungirten Unterdeterminanten der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\lambda_x, & \mu_z, & \nu_y \\ \nu_z, & 1+\lambda_y, & \mu_x \\ \mu_y, & \nu_x, & 1+\lambda_z \end{vmatrix} \qquad (5)$$

bezeichnet. Wie aus (1) unmittelbar zu ersehen ist, liegen bekanntlich jene Punkte, welche anfänglich auf einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt m und deren Radius 1 ist, zur Zeit t in jenem Ellipsoid — dem sogenannten Deformationsellipsoid —, dessen Mittelpunkt M und dessen Gleichung ist

$$(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z)^2 + (A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z)^2 + \\ + (A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z)^2 = D^2, \qquad (6)$$

wofern diese Gleichung bezogen wird auf die durch den Punkt M parallel zu den früheren Coordinatenaxen gelegten Axen.

Die Halbaxen a, b, c dieses Ellipsoids, welche die Richtungen ξ', η', ζ' der sogenannten Deformationshauptaxen

---

[1] Siehe Todhunter and Pearson, A History of the Theory of Elasticity (Cambridge 1886—1893), vol. I, p. 865—867.

[2] W. Thomson, Equations of Equilibrium of an elastic solid deduced from the Principle of Energy. Appendix to Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of incompressible liquid (Philos. Transactions, 1863, vol. 153, p. 610). — Sir Will. Thomson, Mathematical and Physical Papers (vol. III, p. 386—394). — Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, II. Edit., part. II, p. 462.

[3] Boussinesq, Théorie des ondes liquides périodiques (Mém. prés. à l'Acad. des Sciences, tome XX, Paris 1872, p. 592).

haben, genügen, wenn $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ die Hauptdilatationen bedeuten, den Gleichungen

$$a = 1+\lambda_1, \quad b = 1+\lambda_2, \quad c = 1+\lambda_3. \tag{7}$$

Das dem Deformationsellipsoid (6) adjungirte[1] Ellipsoid, dessen Halbaxen mit den Axen ξ', η', ζ' gleichgerichtet sind und die Längen $\frac{1}{1+\lambda_1}, \frac{1}{1+\lambda_2}, \frac{1}{1+\lambda_3}$ besitzen, ist jenes, dessen auf dieselben Axen bezogene Gleichung lautet:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)^2+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)^2+ \\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)^2 = 1. \tag{8}$$

Das dieser Fläche (8) congruente und derselben conjungirte[2] Ellipsoid ist in Bezug auf dieselben Axen durch die Gleichung bestimmt:

$$(a_{11}x+a_{21}y+a_{31}z)^2+(a_{12}x+a_{22}y+a_{32}z)^2+ \\ +(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z)^2 = 1. \tag{9}$$

Es ist dies — den Gleichungen (1) zufolge — jenes Ellipsoid, welches anfänglich alle jene Punkte in sich enthält, die zur Zeit t in einer Kugelfläche gelegen sind, deren Mittelpunkt M und deren Halbmesser 1 ist. Beachtet man die Werthe (3) der sechs Grössen $a_x \ldots b_z$, so ersieht man, dass die Gleichung des letzten Ellipsoids (9), dessen Axenrichtungen durch $\xi\eta\zeta$ bezeichnet seien, auch die Form annehmen kann:

$$a_x . x^2+a_y . y^2+a_z . z^2+2b_x . yz+2b_y . zx+2b_z . xy = 1, \tag{9'}$$

woraus sofort die geometrische Bedeutung der Grössen $a_x \ldots b_z$ ersichtlich ist.

Die cubische Dilatation ν des betrachteten Körperelementes, dessen Volum zur Zeit t durch dV bezeichnet sei, ist[3]

---

[1] Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1107 und 1112.

[2] Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1116.

[3] Siehe Finger, W. S. 1894, S. 167 und 184.

$$\nu = \frac{dV - dv}{dv} = D \quad 1 = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3) - 1 = abc - 1 \quad (10)$$

und die aus den Coëfficienten der Gleichung (9′) gebildete Determinante [1]

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & b_z & b_y \\ b_z & a_y & b_x \\ b_y & b_x & a_z \end{vmatrix} = D^2 = a^2b^2c^2 = (1+\lambda_1)^2(1+\lambda_2)^2(1+\lambda_3)^2 = $$
$$= (1+\nu)^2. \quad (11)$$

Die den einzelnen Gliedern $a_x \ldots b_z$ dieser Determinante entsprechenden, denselben adjungirten Unterdeterminanten $A_x \ldots B_z$ entsprechen zufolge (3) den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
A_x &= a_y a_z - b_x^2 = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 \\
A_y &= a_z a_x - b_y^2 = A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 \\
A_z &= a_x a_y - b_z^2 = A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 \\
B_x &= b_y b_z - b_x a_x = A_{21}A_{31} + A_{22}A_{32} + A_{23}A_{33} \\
B_y &= b_z b_x - b_y a_y = A_{31}A_{11} + A_{32}A_{12} + A_{33}A_{13} \\
B_z &= b_x b_y - b_z a_z = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23}
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

und zwar sind dies die Coëfficienten der Gleichung des dem Deformationsellipsoid (6) congruenten und demselben conjungirten Ellipsoids:

$$A_x . x^2 + A_y . y^2 + A_z . z^2 + 2B_x . yz + 2B_y . zx + 2B_z . xy = D^2, \quad (13)$$

dessen Halbaxen abc in die Richtungen der Axen $\xi\eta\zeta$ fallen.

Die in Betracht gezogene, durch die Gleichungen (1) bestimmte Deformation kann man bekanntlich zerlegen in eine reine Deformation, bei welcher nur eine einfache Dilatation (beziehungsweise Contraction) im Betrage $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ nach den Richtungen der drei Axen $\xi\eta\zeta$ stattfindet und durch welche die Kugelfläche vom Radius 1 die Form des Ellipsoids (13) annimmt, und in eine Rotation um irgend eine Axe C, deren Richtungscosinus durch $\varphi_x\varphi_y\varphi_z$ bezeichnet seien, durch

[1] Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1106 und 1112.

welche Rotation das Ellipsoid (13) nach einer Drehung ϑ in die schliessliche Lage des Deformationsellipsoids (6), das Ellipsoid (9) oder (9′) in die Lage (8), kurz das Axensystem $\xi\eta\zeta$ in die Lage des Axensystems $\xi'\eta'\zeta'$ gelangt.

Noch anschaulicher wird die geometrische Bedeutung der sechs in Betracht kommenden Grössen $a_x \ldots b_z$ durch die Betrachtung jenes Tetraëders, dessen anfänglich vom Punkte m ausgehenden Kanten mm_1, mm_2, mm_3 mit den Axen xyz gleichgerichtet und der Längeneinheit gleich sind. Die Eckpunkte $m m_1 m_2 m_3$ dieses Tetraëders gelangen durch die ins Auge gefasste Deformation zur Zeit t in solche Lagen $M M_1 M_2 M_3$, für welche die relativen Coordinaten der Punkte M_1, beziehungsweise M_2, beziehungsweise M_3 in Bezug auf ein durch M parallel zu xyz gelegtes Axensystem den Gleichungen (1) zufolge die Werthe $(a_{11} a_{12} a_{13})$, beziehungsweise $(a_{21} a_{22} a_{23})$, beziehungsweise $(a_{31} a_{32} a_{33})$ besitzen, so dass für die nunmehrigen Kanten $\overline{MM_1} = R_1$, $\overline{MM_2} = R_2$, $\overline{MM_3} = R_3$ und ihre Neigungswinkel $(R_2 R_3)$, $(R_3 R_1)$, $(R_1 R_2)$ sich aus (3) folgende Werthe ergeben:

$$\left.\begin{array}{c} a_x = R_1^2, \quad a_y = R_2^2, \quad a_z = R_3^2 \\ b_x = R_2 R_3 \cos(R_2 R_3), \quad b_y = R_3 R_1 \cos(R_3 R_1), \\ b_z = R_1 R_2 \cos(R_1 R_2) \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Es sind somit durch die Längen und gegenseitigen Lagen der Kanten des durch die betrachtete Deformation aus dem ursprünglichen Tetraëder $m m_1 m_2 m_3$ entstandenen Tetraëders $M M_1 M_2 M_3$, dessen Volum nach (5) $\frac{1}{6} D$ ist, die sechs Grössen $a_x \ldots b_z$ bestimmt und umgekehrt.

Um nun die der betrachteten Deformation entsprechenden Componenten $X_x Y_y \ldots Z_z$ der Spannung zu ermitteln, hat man auszugehen von den allgemein giltigen Gleichungen:[1]

---

[1] Diese neun Gleichungen wurden zuerst von Carl Neumann aufgestellt. Siehe C. Neumann, Zur Theorie der Elasticität (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, 1860, S. 281—318). Diese Gleichungen wurden auch vom Verfasser in einer einfachen, von Neumann's Deduction völlig verschiedenen Weise abgeleitet. Siehe Finger, W. S. 1894, S. 174.

$$\left.\begin{array}{ll}
D.X_x = a_{11}\frac{\partial f}{\partial a_{11}} + a_{21}\frac{\partial f}{\partial a_{21}} + a_{31}\frac{\partial f}{\partial a_{31}} & D.Y_x = a_{11}\frac{\partial f}{\partial a_{12}} + a_{21}\frac{\partial f}{\partial a_{22}} + a_{31}\frac{\partial f}{\partial a_{32}} \\
D.X_y = a_{12}\frac{\partial f}{\partial a_{11}} + a_{22}\frac{\partial f}{\partial a_{21}} + a_{32}\frac{\partial f}{\partial a_{31}} & D.Y_y = a_{12}\frac{\partial f}{\partial a_{12}} + a_{22}\frac{\partial f}{\partial a_{22}} + a_{32}\frac{\partial f}{\partial a_{32}} \\
D.X_z = a_{13}\frac{\partial f}{\partial a_{11}} + a_{23}\frac{\partial f}{\partial a_{21}} + a_{33}\frac{\partial f}{\partial a_{31}} & D.Y_z = a_{13}\frac{\partial f}{\partial a_{12}} + a_{23}\frac{\partial f}{\partial a_{22}} + a_{33}\frac{\partial f}{\partial a_{32}} \\
\multicolumn{2}{c}{D.Z_x = a_{11}\frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{21}\frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{31}\frac{\partial f}{\partial a_{33}}} \\
\multicolumn{2}{c}{D.Z_y = a_{12}\frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{22}\frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{32}\frac{\partial f}{\partial a_{33}}} \\
\multicolumn{2}{c}{D.Z_z = a_{13}\frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{23}\frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{33}\frac{\partial f}{\partial a_{33}}}
\end{array}\right\} \quad (15)$$

Da f als eine Function der sechs Grössen $a_x a_y \dots b_z$ oder, was sich hier mehr empfiehlt, als eine Function der sechs Grössen $\mathfrak{a}_x = \frac{1}{2}(a_x - 1)$, $\mathfrak{a}_y = \frac{1}{2}(a_y - 1)$, $\mathfrak{a}_z = \frac{1}{2}(a_z - 1)$, b_x, b_y, b_z anzusehen ist, so ist den Gleichungen (3) zufolge

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} a_{11} + \frac{\partial f}{\partial b_z} a_{21} + \frac{\partial f}{\partial b_y} a_{31} \\
\frac{\partial f}{\partial a_{12}} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} a_{12} + \frac{\partial f}{\partial b_z} a_{22} + \frac{\partial f}{\partial b_y} a_{32} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}\right\} \quad (16)$$

u. s. w. Führt man diese Werthe in (15) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
D.X_x &= a_{11}^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} + a_{21}^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y} + a_{31}^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z} + 2a_{21}a_{31}\cdot\frac{\partial f}{\partial b_x} + 2a_{31}a_{11}\cdot\frac{\partial f}{\partial b_y} + 2a_{11}a_{21}\cdot\frac{\partial f}{\partial b_z}\\
D.Y_y &= a_{12}^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} + a_{22}^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y} + a_{32}^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z} + 2a_{22}a_{32}\cdot\frac{\partial f}{\partial b_x} + 2a_{32}a_{12}\cdot\frac{\partial f}{\partial b_y} + 2a_{12}a_{22}\cdot\frac{\partial f}{\partial b_z}\\
D.Z_z &= a_{13}^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} + a_{23}^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y} + a_{33}^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z} + 2a_{23}a_{33}\cdot\frac{\partial f}{\partial b_x} + 2a_{33}a_{13}\cdot\frac{\partial f}{\partial b_y} + 2a_{13}a_{23}\cdot\frac{\partial f}{\partial b_z}\\
D.Y_z &= a_{12}a_{13}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} + a_{22}a_{23}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y} + a_{32}a_{33}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z} + (a_{22}a_{33}+a_{23}a_{32})\cdot\frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{32}a_{13}+a_{33}a_{12})\cdot\frac{\partial f}{\partial b_y} +\\
&\qquad + (a_{12}a_{23}+a_{13}a_{22})\cdot\frac{\partial f}{\partial b_z} = D.Z_y\\
D.Z_x &= a_{13}a_{11}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} + a_{23}a_{21}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y} + a_{33}a_{31}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z} + (a_{23}a_{31}+a_{21}a_{33})\cdot\frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{33}a_{11}+a_{31}a_{13})\cdot\frac{\partial f}{\partial b_y} +\\
&\qquad + (a_{13}a_{21}+a_{11}a_{23})\cdot\frac{\partial f}{\partial b_z} = D.X_z\\
D.X_y &= a_{11}a_{12}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} + a_{21}a_{22}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y} + a_{31}a_{32}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z} + (a_{21}a_{32}+a_{22}a_{31})\cdot\frac{\partial f}{\partial b_x} + (a_{31}a_{12}+a_{32}a_{11})\cdot\frac{\partial f}{\partial b_y} +\\
&\qquad + (a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21})\cdot\frac{\partial f}{\partial b_z} = D.Y_x
\end{aligned}\right\} \quad (17)^1$$

[1] Diese Formeln wurden schon von Boussinesq gefunden. Siehe Boussinesq, Théorie des ondes liquides périodiques (Mémoires présentés à l'Acad. des Sciences, t. XX, Paris 1872, p. 594).

Es mögen nunmehr zunächst auf Grund dieser Gleichungen (17) die im Punkte M herrschenden Hauptdrucke (Hauptspannungen) $S_1 S_2 S_3$ der Betrachtung unterzogen werden. Bekanntlich sind die Grössen derselben stets durch die drei Wurzeln der bezüglich S cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_x - S, & X_y \;, & X_z \\ Y_x \;, & Y_y - S, & Y_z \\ Z_x \;, & Z_y \;, & Z_z - S \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Demgemäss ist

$$\left.\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= X_x + Y_y + Z_z \\ S_2 S_3 + S_3 S_1 + S_1 S_2 &= Y_y Z_z + Z_z X_x + X_x Y_y - Y_z^2 - Z_x^2 - X_y^2 \\ S_1 S_2 S_3 &= \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Führt man in diese drei Gleichungen die Werthe (17) ein und bezeichnet man kürzehalber durch $\alpha_x \alpha_y \ldots \beta_z$ die partiellen Derivationen der Potentialfunction f, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} = 2\frac{\partial f}{\partial a_x}, \quad \alpha_y = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y} = 2\frac{\partial f}{\partial a_y}, \quad \alpha_z = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z} = 2\frac{\partial f}{\partial a_z} \\ \beta_x = \frac{\partial f}{\partial b_x}, \quad \beta_y = \frac{\partial f}{\partial b_y}, \quad \beta_z = \frac{\partial f}{\partial b_z} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

und bezeichnet man schliesslich durch $\mathrm{A}_x \mathrm{A}_y \mathrm{A}_z \mathrm{B}_x \mathrm{B}_y \mathrm{B}_z$ die den gleichbezeichneten Gliedern $\alpha_x \alpha_y \alpha_z \beta_x \beta_y \beta_z$ adjungirten Unterdeterminanten der symmetrischen Determinante

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} \alpha_x & \beta_z & \beta_y \\ \beta_z & \alpha_y & \beta_x \\ \beta_y & \beta_x & \alpha_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x}, & \frac{\partial f}{\partial b_z}, & \frac{\partial f}{\partial b_y} \\ \frac{\partial f}{\partial b_z}, & \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y}, & \frac{\partial f}{\partial b_x} \\ \frac{\partial f}{\partial b_y}, & \frac{\partial f}{\partial b_x}, & \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z} \end{vmatrix} \quad (20)$$

so findet man mit Hilfe der Relationen (18), (17) und (3)

$$\left.\begin{aligned} S_1+S_2+S_3 &= \frac{1}{D}\cdot[a_x\alpha_x+a_y\alpha_y+a_z\alpha_z+ \\ &\qquad +2b_x\beta_x+2b_y\beta_y+2b_z\beta_z] \\ S_2S_3+S_3S_1+S_1S_2 &= \frac{1}{D^2}\cdot[A_x\mathrm{A}_x+A_y\mathrm{A}_y+A_z\mathrm{A}_z+ \\ &\qquad +2B_x\mathrm{B}_x+2B_y\mathrm{B}_y+2B_z\mathrm{B}_z] \\ S_1S_2S_3 &= \frac{1}{D}\cdot\mathrm{A} = \frac{1}{D^3}\cdot A\mathrm{A} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Die letzte dieser Gleichungen ergibt sich in einfacher Weise aus der letzten Gleichung (18), wenn man diese mit D^3 multiplicirt und berücksichtigt, dass den Gleichungen (15) gemäss die Glieder $D.X_x$, $D.X_y \ldots$ sich bei der Bildung des Productes aus der Determinante (5) und der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \frac{\partial f}{\partial a_{12}} & \frac{\partial f}{\partial a_{13}} \\ \frac{\partial f}{\partial a_{21}} & \frac{\partial f}{\partial a_{22}} & \frac{\partial f}{\partial a_{23}} \\ \frac{\partial f}{\partial a_{31}} & \frac{\partial f}{\partial a_{32}} & \frac{\partial f}{\partial a_{33}} \end{vmatrix}$$

nach dem Multiplicationstheorem ergeben und dass ebenso den Gleichungen (16) zufolge die Glieder dieser letzten Determinante bei der Multiplication der Determinanten (5) und (20) erhalten werden.

Da nun sämmtliche Grössen der rechten Theile der Gleichung (21) nach (11), (12), (19), (20), sofern die Potentialfunction f als eine bekannte Function der sechs Grössen $a_x \ldots b_z$ vorausgesetzt wird, bestimmbare Functionen dieser sechs Grössen sind, so lässt sich aus (21) folgern, dass auch die Grössen der Hauptspannungen (Hauptdrucke) $S_1 S_2 S_3$, gleich wie die Potentialfunction f, stets nur Functionen der sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ sind.

Die Richtungen dieser Hauptspannungen, die wohl ausserdem auch von den Richtungscosinus $\varphi_x \varphi_y \varphi_z$ der Rotationsaxe C und von dem Rotationswinkel ϑ abhängen, sind bekanntlich identisch mit den Axenrichtungen der Fläche

$$X_x x^2 + Y_y . y^2 + Z_z . z^2 + 2Y_z . yz + 2Z_x . zx + 2X_y . xy = k, \quad (22)$$

in welcher Gleichung k eine beliebige Constante bedeutet und mittelst welcher Fläche man in bekannter Weise für eine jede Lage des Flächenelementes, für welches die Spannung ermittelt werden soll, die Grösse und Richtung der letzteren ermitteln kann.

Substituirt man in (22) die Werthe der Spannungscomponenten aus (17), so nimmt die Gleichung der Fläche (22) die Form an:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x}+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y}&+\\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z}&+\\ +2(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}_x}&+\\ +2(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}_y}&+\\ +2(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{b}_z}&=D.k\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

Um zu einer einfacheren Darstellung dieser wichtigen Fläche zweiter Ordnung, welche die Spannungen in allen Raumrichtungen in übersichtlicher Weise geometrisch anschaulich zu machen gestattet, zu gelangen, denke man sich diese Fläche (23) derart transformirt, dass durch diese Transformation die Coordinaten xyz eines beliebigen Punktes dieser Fläche die Werthe

$$\left.\begin{aligned}X&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z\\ Y&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z\\ Z&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

annehmen, so dass dadurch aus der Fläche (23) jene neue Fläche zweiter Ordnung entsteht, deren auf die Axen xyz bezogene Gleichung bei Anwendung der durch (19) bestimmten Bezeichnungsweise lautet:

$$\alpha_x.X^2+\alpha_y.Y^2+\alpha_z.Z^2+2\beta_x.YZ+2\beta_y.ZX+2\beta_z.XY=D.k. \quad (25)$$

Vergleicht man die Transformationsgleichungen (24) mit den die thatsächliche Deformation des betrachteten Körper-

elementes charakterisirenden Gleichungen (1), so ersieht man, dass zwischen der Transformation (24) und der thatsächlichen Deformation lediglich derselbe Unterschied stattfindet, der auch den conjungirten congruenten Flächen (8) und (9) zu Grunde liegt, die sich blos dadurch unterscheiden, dass die Axenrichtungen $\xi'\eta'\zeta'$ durch die Axenrichtungen $\xi\eta\zeta$ — und umgekehrt — ersetzt sind. Es beruht demnach diese der Deformation (1) conjungirte (blos durch die Permutation der Indices der Coëfficienten sich unterscheidende) Transformation (24) darin, dass eine Ausdehnung mit der linearen Dilatation $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ nach den Richtungen der drei Axen $\xi'\eta'\zeta'$ stattfindet und zugleich eine Rotation um die Axe $(\varphi_x\varphi_y\varphi_z)$, durch welche nach einer Drehung $(-\vartheta)$ die Axen $\xi'\eta'\zeta'$ in die Lage $\xi\eta\zeta$ gelangen. Es muss sonach umgekehrt aus der Fläche (25) die Fläche (23) dann entstehen, wenn die erste eine Drehung um die Axe $(\varphi_x\varphi_y\varphi_z)$ vollzieht, durch welche nach der Drehung ϑ die Axen $\xi\eta\zeta$ in die Lage $\xi'\eta'\zeta'$ gelangen, und wenn hierauf eine Ausdehnung dieser Fläche in den Richtungen $\xi'\eta'\zeta'$ erfolgt, deren lineare Dilatation, beziehungsweise $(1+\lambda_1)^{-1}-1$, $(1+\lambda_2)^{-1}-1$, $(1+\lambda_3)^{-1}-1$ ist.

Sind nun die Flächen (9') und (25) coaxial, also die Axen $\xi\eta\zeta$ der Fläche (9'), beziehungsweise (9) gleichgerichtet mit den Axen der Fläche (25), so müssen die Axen dieser letzteren Fläche nach der Drehung ϑ die Richtungen $\xi'\eta'\zeta'$ haben, und da sich durch die letztbetrachtete Ausdehnung in den zu den Hauptaxen parallelen Richtungen zwar die Gestalt, aber nicht die Axenrichtungen einer Fläche zweiter Ordnung ändern können, so müssen $\xi'\eta'\zeta'$ auch die Richtungen der Axen der Fläche (23) sein, es muss also auch diese Fläche (23) mit dem Deformationsellipsoid (6) und mit dem Ellipsoid (8) coaxial sein — und ebenso lässt sich umgekehrt aus der Coaxialität der Flächen (23) und (6) die Coaxialität der Flächen (25) und (9') folgern. Nun sind diese beiden letztgenannten Flächen dann, und zwar nur dann coaxial, wenn folgende drei Bedingungsgleichungen bestehen:[1]

[1] Siehe J. Finger, Über das Kriterion der Coaxialität zweier Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung. Diese Sitzungsber., 1894, Bd. CIII, S. 1061 bis 1065.

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} a_y - a_z, & b_x \\ \alpha_y - \alpha_z, & \beta_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_y, & b_z \\ \beta_y, & \beta_z \end{vmatrix} \\[2ex]
\begin{vmatrix} a_z - a_x, & b_y \\ \alpha_z - \alpha_x, & \beta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_z, & b_x \\ \beta_z, & \beta_x \end{vmatrix} \\[2ex]
\begin{vmatrix} a_x - a_y, & b_z \\ \alpha_x - \alpha_y, & \beta_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x, & b_y \\ \beta_x, & \beta_y \end{vmatrix}
\end{array}\right\} \tag{26}$$

Diese drei bedeutsamen Gleichungen drücken demnach auch die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass die Axen $\xi'\eta'\zeta'$ des Deformationsellipsoids (6), kurz die Deformationshauptaxen identisch sind mit den Axen der Fläche (23), d. i. mit den Hauptdruckaxen.

Wofern die drei Bedingungsgleichungen (26) bei irgend einer Deformation irgend eines Körperelementes nicht erfüllt sind, sind die kinematischen Hauptaxen verschieden von den dynamischen.

Bei der Anwendung der Grundgleichungen (17) für die Bestimmung der Spannungen darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass $(X_x Y_x Z_x)$, beziehungsweise $(X_y Y_y Z_y)$, beziehungsweise $(X_z Y_z Z_z)$ die Componenten der Spannung für jenes Flächenelement sind, welches im deformirten Körperelement, d. i. zur Zeit t zu der unveränderlichen (yz)-Ebene, beziehungsweise (zx)-Ebene, beziehungsweise (xy)-Ebene parallel ist, und nur unter dieser Voraussetzung ist $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$.

Will man, wie dies in besonderen Fällen Kirchhoff[1] und Andere gethan haben, die Componenten $(x_x y_x z_x)$, beziehungsweise $(x_y y_y z_y)$, beziehungsweise $(x_z y_z z_z)$ der Spannung in jenem Flächenelemente bestimmen, welches vor der hier betrachteten Deformation zur (yz)-Ebene, beziehungsweise (zx)-Ebene, beziehungsweise (xy)-Ebene parallel war, welches demgemäss zur Zeit t die Lage der Seitenebene (MM_2M_3), beziehungsweise (MM_3M_1), beziehungsweise (MM_1M_2) des

[1] Siehe Kirchhoff, Über die Bedingungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile. Diese Sitzungsber., Bd. IX (1852), S. 762—773.

früher betrachteten Tetraëders hat, so hat man zu beachten, dass die Richtungscosinus $(a_1 b_1 c_1)$, beziehungsweise $(a_2 b_2 c_2)$, beziehungsweise $(a_3 b_3 c_3)$ der nach dem Inneren des Tetraëders gerichteten Normalen N_1, beziehungsweise N_2, beziehungsweise N_3 durch die Gleichungen:[1]

$$\frac{a_1}{A_{11}} = \frac{b_1}{A_{12}} = \frac{c_1}{A_{13}} = \frac{1}{+\sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2}} = \frac{1}{+\sqrt{A_x}}$$

$$\frac{a_2}{A_{21}} = \frac{b_2}{A_{22}} = \frac{c_2}{A_{23}} = \frac{1}{+\sqrt{A_y}}$$

$$\frac{a_3}{A_{31}} = \frac{b_3}{A_{32}} = \frac{c_3}{A_{33}} = \frac{1}{+\sqrt{A_z}}$$

bestimmt sind und dass demgemäss einer bekannten allgemein giltigen Relation zufolge

$$x_x = X_x a_1 + X_y b_1 + X_z c_1 = \frac{X_x . A_{11} + X_y . A_{12} + X_z . A_{13}}{\sqrt{A_x}}$$

$$y_x = Y_x a_1 + Y_y b_1 + Y_z c_1 = \frac{Y_x . A_{11} + Y_y . A_{12} + Y_z . A_{13}}{\sqrt{A_x}}$$

$$z_x = Z_x a_1 + Z_y b_1 + Z_z c_1 = \frac{Z_x . A_{11} + Z_y . A_{12} + Z_z . A_{13}}{\sqrt{A_x}}$$

$$x_y = X_x a_2 + X_y b_2 + X_z c_2 = \frac{X_x . A_{21} + X_y . A_{22} + X_z . A_{23}}{\sqrt{A_y}}$$

u. s. w. ist.

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe der Componenten $X_x X_y \ldots$ aus (15) oder jene aus (17) ein und berücksichtigt die Gleichungen (16), so findet man folgende allgemein giltige, besonders einfache Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x_x}{\frac{\partial f}{\partial a_{11}}} = \frac{y_x}{\frac{\partial f}{\partial a_{12}}} = \frac{z_x}{\frac{\partial f}{\partial a_{13}}} = \frac{1}{\sqrt{A_x}} = \frac{1}{\sqrt{a_y a_z - b_x^2}} = \frac{1}{R_2 R_3 \sin(R_2 R_3)} \\
\frac{x_y}{\frac{\partial f}{\partial a_{21}}} = \frac{y_y}{\frac{\partial f}{\partial a_{22}}} = \frac{z_y}{\frac{\partial f}{\partial a_{23}}} = \frac{1}{\sqrt{A_y}} = \frac{1}{\sqrt{a_z a_x - b_y^2}} = \frac{1}{R_3 R_1 \sin(R_3 R_1)} \\
\frac{x_y}{\frac{\partial f}{\partial a_{31}}} = \frac{y_z}{\frac{\partial f}{\partial a_{32}}} = \frac{z_z}{\frac{\partial f}{\partial a_{33}}} = \frac{1}{\sqrt{A_z}} = \frac{1}{\sqrt{a_x a_y - b_z^2}} = \frac{1}{R_1 R_2 \sin(R_1 R_2)}
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

[1] Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1109.

Diese Gleichungen, aus welchen sich $x_x x_y \ldots z_z$ in einfacher Weise bestimmen lassen, lehren, dass die Differenzen $y_z - z_y$, $z_x - x_z$, $x_y - y_x$ im Allgemeinen von Null verschieden sind.[1]

In der bisherigen Untersuchung wurde das betrachtete Körperelement dv als Theil eines beliebigen Körpers betrachtet, also im Allgemeinen als anisotrop (aeolotrop) angenommen.

Ist nun dieses Körperelement, wie dies von nun an stets vorausgesetzt werden soll, isotrop, so muss die lediglich von den sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ abhängige Potentialfunction f in Folge der Isotropie von der Lage der Axen des Ellipsoids (9) vollkommen unabhängig sein. Es können daher für die Potentialfunction f von den sechs genannten Grössen, welche in ihrer Gesammtheit sowohl die Längen, als auch die Lagen der drei Hauptaxen dieses Ellipsoids eindeutig zu bestimmen gestatten und welche auch umgekehrt aus diesen Lagen und Längen in bekannter Weise vollkommen bestimmbar sind, nur jene Functionen dieser sechs Grössen massgebend sein, durch welche die Grössen der Halbaxen dieses Ellipsoids bestimmt sind.[2] Diese Halbaxen $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ sind aber bekanntlich genau bestimmt durch die drei Functionen

$$\left.\begin{aligned}
\sigma &= a^2+b^2+c^2-3 = a_x+a_y+a_z-3 \\
s &= b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-3 = a_y a_z+a_z a_x+a_x a_y- \\
&\qquad -b_x^2-b_y^2-b_z^2-3 = A_x+A_y+A_z-3 \\
A &= a^2b^2c^2 = a_x a_y a_z-a_x b_x^2-a_y b_y^2-a_z b_z^2+ \\
&\qquad +2b_x b_y b_z = D^2 = (1+\nu)^2
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Es ist sonach, wenn das betrachtete Körperelement isotrop ist, f blos eine Function dieser drei Grössen

[1] Vergl. H. Poincaré, Über die Elasticitätstheorie (Comptes rendus, 112 1891], S. 914 und 915).

[2] W. Thomson und P. G. Tait, Treatise on Natural Philosophy, 1883, vol. I, part II, Appendix $C(k)$, p. 466.

σ, s und $A = D^2$, beziehungsweise eine Function von σ, s und der cubischen Dilatation ν.[1]

Für die partiellen Differentialquotienten (19) ergeben sich daher bei Beachtung der Gleichungen (28) nunmehr folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_x &= \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_x} = 2\,\frac{\partial f}{\partial a_x} = 2.\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial s}(3+\sigma-a_x) + \frac{\partial f}{\partial A}(a_y a_z - b_x^2)\right]\\
\alpha_y &= \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_y} = 2\,\frac{\partial f}{\partial a_y} = 2.\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial s}(3+\sigma-a_y) + \frac{\partial f}{\partial A}(a_z a_x - b_y^2)\right]\\
\alpha_z &= \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_z} = 2\,\frac{\partial f}{\partial a_z} = 2.\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial s}(3+\sigma-a_z) + \frac{\partial f}{\partial A}(a_x a_y - b_z^2)\right]\\
\beta_x &= \frac{\partial f}{\partial b_x} = 2.\left[-\frac{\partial f}{\partial s}\cdot b_x + \frac{\partial f}{\partial A}(b_y b_z - b_x a_x)\right]\\
\beta_y &= \frac{\partial f}{\partial b_y} = 2.\left[-\frac{\partial f}{\partial s}\cdot b_y + \frac{\partial f}{\partial A}(b_z b_x - b_y a_y)\right]\\
\beta_z &= \frac{\partial f}{\partial b_z} = 2.\left[-\frac{\partial f}{\partial s}\cdot b_z + \frac{\partial f}{\partial A}(b_x b_y - b_z a_z)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Demgemäss ist

$$\begin{vmatrix} a_y - a_z, & b_x \\ \alpha_y - \alpha_z, & \alpha_x \end{vmatrix} = 2.\frac{\partial f}{\partial A}\left[b_y(b_x b_y - b_z a_z) - b_z(b_z b_x - b_y a_y)\right] =$$

$$= 2\,\frac{\partial f}{\partial A}\cdot\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}$$

und denselben Werth findet man für $\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ \beta_y & \beta_z \end{vmatrix}$. Es werden daher die erste und, wie sich in gleicher Weise zeigen lässt, auch die zweite und dritte der Bedingungsgleichungen (26) erfüllt, wodurch nachgewiesen ist, dass bei isotropen Substanzen stets die Deformationshauptaxen in ihrer schliesslichen Lage mit den Hauptdruckaxen zusammenfallen.

[1] Es empfiehlt sich, f nicht, wie dies Thomson thut, als Function der Quadrate $a^2 b^2 c^2$ der reciproken Halbaxen der Fläche (9), sondern als Function der Grössen σ, s und ν zu betrachten, da es nur dadurch dem Verfasser gelang, auch die allgemeinen Ausdrücke für die Spannungscomponenten zu erhalten.

Um einen möglichst einfachen Ausdruck für die Spannungscomponenten (17) in isotropen Substanzen zu erhalten, sollen auch die Coëfficienten der auf die Form

$$a'_x . x^2 + a'_y . y^2 + a'_z . z^2 + 2 b'_x . yz + 2 b'_y . zx + 2 b'_z . xy = 1 \tag{30}$$

gebrachten Gleichung des dem Deformationsellipsoid (6) adjungirten Ellipsoids (8) in Rechnung gezogen werden, nämlich

$$\left.\begin{aligned} a'_x &= a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2, & b'_x &= a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \\ a'_y &= a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2, & b'_y &= a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} \\ a'_z &= a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2, & b'_z &= a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

und ebenso die diesen Grössen adjungirten Coëfficienten $A'_x \ldots B'_z$ des Deformationsellipsoids (6), dessen Gleichung (6) die Form annimmt:

$$A'_x . x^2 + A'_y . y^2 + A'_z . z^2 + 2 B'_x . yz + 2 B'_y . zx + 2 B'_z . xy = D^2, \tag{32}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} A'_x &= a'_y a'_z - b'^2_x = A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2 \\ A'_y &= a'_z a'_x - b'^2_y = A_{12}^2 + A_{22}^2 + A_{32}^2 \\ A'_z &= a'_x a'_y - b'^2_z = A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2 \\ B'_x &= b'_y b'_z - b'_x a'_x = A_{12}A_{13} + A_{22}A_{23} + A_{32}A_{33} \\ B'_y &= b'_z b'_x - b'_y a'_y = A_{13}A_{11} + A_{23}A_{21} + A_{33}A_{31} \\ B'_z &= b'_x b'_y - b'_z a'_z = A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} + A_{31}A_{32} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Aus diesen Werthen der Coëfficienten (31) und (33) und aus den Gleichungen (3), (12) und (28) lassen sich zunächst folgende für unsere Zwecke wichtige identische Relationen folgern:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}^2 a_x + a_{21}^2 a_y + a_{31}^2 a_z + 2a_{21}a_{31}b_x + 2a_{31}a_{11}b_y + 2a_{11}a_{21}b_z = (\sigma+3)a'_x + A'_x - (s+3)\\
&a_{12}^2 a_x + a_{22}^2 a_y + a_{32}^2 a_z + 2a_{22}a_{32}b_x + 2a_{32}a_{12}b_y + 2a_{12}a_{22}b_z = (\sigma+3)a'_y + A'_y - (s+3)\\
&a_{13}^2 a_x + a_{23}^2 a_y + a_{33}^2 a_z + 2a_{23}a_{33}b_x + 2a_{33}a_{13}b_y + 2a_{13}a_{23}b_z = (\sigma+3)a'_z + A'_z - (s+3)\\
&a_{12}a_{13}a_x + a_{22}a_{23}a_y + a_{32}a_{33}a_z + (a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23})b_x + (a_{32}a_{13} + a_{12}a_{33})b_y + (a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13})b_z = (\sigma+3)b'_x + B'_x\\
&a_{13}a_{11}a_x + a_{23}a_{21}a_y + a_{33}a_{31}a_z + (a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21})b_x + (a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31})b_y + (a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11})b_z = (\sigma+3)b'_y + B'_y\\
&a_{11}a_{12}a_x + a_{21}a_{22}a_y + a_{31}a_{32}a_z + (a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22})b_x + (a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32})b_y + (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})b_z = (\sigma+3)b'_z + B'_z\\
&a_{11}^2 A_x + a_{21}^2 A_y + a_{31}^2 A_z + 2a_{21}a_{31}B_x + 2a_{31}a_{11}B_y + 2a_{11}a_{21}B_z = A\\
&a_{12}^2 A_x + a_{22}^2 A_y + a_{32}^2 A_z + 2a_{22}a_{32}B_x + 2a_{32}a_{12}B_y + 2a_{12}a_{22}B_z = A\\
&a_{13}^2 A_x + a_{23}^2 A_y + a_{33}^2 A_z + 2a_{23}a_{33}B_x + 2a_{33}a_{13}B_y + 2a_{13}a_{23}B_z = A\\
&a_{12}a_{13}A_x + a_{22}a_{23}A_y + a_{32}a_{33}A_z + (a_{22}a_{33} + a_{32}a_{23})B_x + (a_{32}a_{13} + a_{12}a_{33})B_y + (a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13})B_z = 0\\
&a_{13}a_{11}A_x + a_{23}a_{21}A_y + a_{33}a_{31}A_z + (a_{23}a_{31} + a_{33}a_{21})B_x + (a_{33}a_{11} + a_{13}a_{31})B_y + (a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11})B_z = 0\\
&a_{11}a_{12}A_x + a_{21}a_{22}A_y + a_{31}a_{32}A_z + (a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22})B_x + (a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32})B_y + (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})B_z = 0
\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

Die Einsetzung der Werthe aus (29) in (17) führt bei Berücksichtigung von (34), (31) und (12) zu den gesuchten Grössen der Spannungscomponenten, nämlich zu den einfachen, allgemein giltigen Gleichungen für isotrope Substanzen

$$\left.\begin{aligned}
D.X_x &= 2.\left[a'_x.\frac{\partial f}{\partial \sigma} + (s+3-A'_x).\frac{\partial f}{\partial s} + A\frac{\partial f}{\partial A}\right] \\
D.Y_y &= 2.\left[a'_y.\frac{\partial f}{\partial \sigma} + (s+3-A'_y).\frac{\partial f}{\partial s} + A\frac{\partial f}{\partial A}\right] \\
D.Z_z &= 2.\left[a'_z.\frac{\partial f}{\partial \sigma} + (s+3-A'_z).\frac{\partial f}{\partial s} + A\frac{\partial f}{\partial A}\right] \\
D.Y_z &= 2.\left[b'_x.\frac{\partial f}{\partial \sigma} - B'_x.\frac{\partial f}{\partial s}\right] = D.Z_y \\
D.Z_x &= 2.\left[b'_y.\frac{\partial f}{\partial \sigma} - B'_y.\frac{\partial f}{\partial s}\right] = D.X_z \\
D.X_y &= 2.\left[b'_z.\frac{\partial f}{\partial \sigma} - B'_z.\frac{\partial f}{\partial s}\right] = D.Y_x
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Da $A = D^2$ und $D = 1+\nu$ ist, so kann auch $A\dfrac{\partial f}{\partial A} = = \dfrac{1}{2}D.\dfrac{\partial f}{\partial D} = \dfrac{1}{2}D.\dfrac{\partial f}{\partial \nu}$ gesetzt werden; es können demnach die drei ersten Gleichungen (35) auch lauten:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2.\frac{a'_x}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2.\frac{s+3-A'_x}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial s} \\
Y_y &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2.\frac{a'_y}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2.\frac{s+3-A'_y}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial s} \\
Z_z &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2.\frac{a'_z}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2.\frac{s+3-A'_z}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial s}
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

In einfacherer Weise lassen sich die allgemeinen und meines Wissens hier zum erstenmale aufgestellten Gleichungen (35) und (36) unmittelbar aus den Gleichungen (15) ableiten, wofern berücksichtigt wird, dass bei isotropen Substanzen die Potentialfunction f blos eine Function von s, σ und D ist und dass wegen der Congruenz der Ellipsoide (30) und (9') und in Folge der durch (28) bestimmten Bedeutung von s und σ auch

$$\left.\begin{aligned}
\sigma &= a'_x + a'_y + a'_z - 3 \\
s &= a'_y a'_z + a'_z a'_x + a'_x a'_y - b'^2_x - b'^2_y - b'^2_z - 3
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

ist.

Wie nämlich aus diesen Gleichungen und aus (31) und (5) zu ersehen ist, ist

$$\frac{\partial\sigma}{\partial a_{11}} = 2a_{11}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial a_{21}} = 2a_{21}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial a_{31}} = 2a_{31}$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_{11}} = A_{11}, \quad \frac{\partial D}{\partial a_{21}} = A_{21}, \quad \frac{\partial D}{\partial a_{31}} = A_{31}$$

ferner

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial a_{11}} &= (a'_y+a'_z)\cdot\frac{\partial a'_x}{\partial a_{11}} - 2b'_z\cdot\frac{\partial b'_z}{\partial a_{11}} - 2b'_y\,\frac{\partial b'_y}{\partial a_{11}} \\ &= [\sigma+3-a'_x]\,.\,2a_{11} - 2b'_z\,.\,a_{12} - 2b'_y\,.\,a_{13} \\ &= 2\,.\,[a_{11}(\sigma+3) - (a_{11}a'_x + a_{12}b'_z + a_{13}b'_y)]\end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial s}{\partial a_{21}} = 2[a_{21}(\sigma+3) - (a_{21}a'_x + a_{22}b'_z + a_{23}b'_y)]$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_{31}} = 2[a_{31}(\sigma+3) - (a_{31}a'_x + a_{32}b'_z + a_{33}b'_y)]$$

Setzt man diese Werthe ein in die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = \frac{\partial f}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial a_{11}} + \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial a_{11}} + \frac{\partial f}{\partial D}\cdot\frac{\partial D}{\partial a_{11}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_{21}} = \frac{\partial f}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial a_{21}} + \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial a_{21}} + \frac{\partial f}{\partial D}\cdot\frac{\partial D}{\partial a_{21}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_{31}} = \frac{\partial f}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial a_{31}} + \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial a_{31}} + \frac{\partial f}{\partial D}\cdot\frac{\partial D}{\partial a_{31}}$$

und führt die so erhaltenen Werthe in die ersten drei Gleichungen (15) ein, so erhält man sofort bei Berücksichtigung von (31), (37) und (33) wiederum die früheren Werthe (35) von X_x, X_y, X_z und analog die übrigen Spannungscomponenten.

Ist also die Potentialfunction f als Function der in Folge der Gleichungen $a = 1+\lambda_1$, $b = 1+\lambda_2$, $c = 1+\lambda_3$ blos von den Hauptdilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ abhängigen Grössen (28), nämlich der Grössen $\sigma = a^2+b^2+c^2-3$, $s = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-3$, $A = D^2 = a^2b^2c^2$ gegeben, so sind nach (35) und (36) sämmtliche den drei willkürlichen Coordinatenebenen zugehörigen Spannungscomponenten durch die Coëfficienten der Gleichung des Ellipsoids (30) und durch die aus diesen Coëfficienten mittelst (33) leicht zu berechnenden Grössen $A'_x \ldots B'_z$ vollkommen bestimmt.

Diese Spannungen hängen daher ausser von der durch die Hauptdilatationen vollkommen bestimmten Gestalt dieses Ellipsoids auch von der relativen Lage der Hauptaxen derselben, d. i. der schliesslichen Lage der Deformationshauptaxen $\xi'\eta'\zeta'$ in Bezug zu den Coordinatenaxen ab.

Übrigens empfiehlt es sich, das Deformationsellipsoid (32) selbst, dessen Halbaxen a, b, c mit den letzteren Axen $\xi'\eta'\zeta'$ gleichgerichtet sind, zur Bestimmung dieser Coëfficienten und daher auch der Spannungen zu verwenden. Bringt man nämlich die Gleichung (32) des Deformationsellipsoids (in seiner schliesslichen Lage) auf die gebräuchliche Form

$$\alpha'_x.x^2+\alpha'_y.y^2+\alpha'_z.z^2+2\beta'_x.yz+2\beta'_y.zx+2\beta'_z.xy=1, \quad (38)$$

so ist, wie die Vergleichung mit (32) lehrt, zunächst

$$A'_x = D^2.\alpha'_x, \quad A'_y = D^2.\alpha'_y, \quad A'_z = D^2.\alpha'_z$$
$$B'_x = D^2.\beta'_x, \quad B'_y = D^2.\beta'_y, \quad B'_z = D^2.\beta'_z,$$

sonach den Gleichungen (33) zufolge

$$a'_x = D^2.[\alpha'_y\alpha'_z-\beta'^2_x], \quad a'_y = D^2.[\alpha'_z\alpha'_x-\beta'^2_y], \quad a'_z = D^2.[\alpha'_x\alpha'_y-\beta'^2_z]$$
$$b'_x = D^2.[\beta'_y\beta'_z-\beta'_x\alpha'_x], \quad b'_y = D^2.[\beta'_z\beta'_x-\beta'_y\alpha'_y], \quad b'_z = D^2.[\beta'_x\beta'_y-\beta'_z\alpha'_z],$$

so dass dadurch sämmtliche Coëfficienten in (35) durch die Coëfficienten der Gleichung (38) des Deformationsellipsoids bestimmt sind.

Um die Grössen der Hauptspannungen $S_1 S_2 S_3$ zu ermitteln, hat man nur die bisher willkürlich gewählten Coordinatenaxen mit den Hauptdruckaxen, also auch mit den Axen $\xi'\eta'\zeta'$ des Ellipsoids (30) oder (38) zu identificiren, also $a'_x = a^2 = (1+\lambda_1)^2$, $a'_y = b^2 = (1+\lambda_2)^2$, $a'_z = c^2 = (1+\lambda_3)^2$, $b'_x = b'_y = b'_z = 0$ zu setzen, wodurch nach (33) $A'_x = b^2c^2$, $A'_y = c^2a^2$, $A'_z = a^2b^2$, $B'_x = B'_y = B'_z = 0$ wird. Demgemäss ergibt sich aus (36)

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2\,\frac{(1+\lambda_1)^2}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2.(1+\lambda_1)^2\,\frac{(1+\lambda_2)^2+(1+\lambda_3)^2}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial s}\\
S_2 &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2\,\frac{(1+\lambda_2)^2}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2.(1+\lambda_2)^2\,\frac{(1+\lambda_3)^2+(1+\lambda_1)^2}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial s}\\
S_3 &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2\,\frac{(1+\lambda_3)^2}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial \sigma} + 2.(1+\lambda_3)^2\,\frac{(1+\lambda_1)^2+(1+\lambda_2)^2}{1+\nu}\cdot\frac{\partial f}{\partial s}
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

wo nach (10) $1+\nu = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)$ ist.

Aus diesen Gleichungen ist zu ersehen, dass bei isotropen Körpern nicht nur die Potentialfunction f, sondern auch die Hauptdrucke lediglich von den Hauptdilatationen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, beziehungsweise von den drei Grössen s, σ und ν abhängen.

Die Gleichung der die einzelnen Spannungen für die verschiedenen Raumrichtungen darstellenden Fläche (22), deren Axen $\xi'\eta'\zeta'$ mit den Axen der Ellipsoide (38), (32), (30) gleichgerichtet sind, nimmt für isotrope Substanzen, wie die Substitution von (35) in (22) lehrt, und wofern kürzehalber durch u' und U' die Summen

$$u' = a'_x.x^2 + a'_y.y^2 + a'_z.z^2 + 2b'_x.yz + 2b'_y.zx + 2b'_z.xy$$
$$U' = A'_x.x^2 + A'_y.y^2 + A'_z.z^2 + 2B'_x.yz + 2B'_y.zx + 2B'_z.xy$$

bezeichnet werden, folgende Gestalt an:

$$\left[D.\frac{\partial f}{\partial D} + 2(s+3)\frac{\partial f}{\partial s}\right](x^2+y^2+z^2) + 2u'.\frac{\partial f}{\partial \sigma} - 2U'.\frac{\partial f}{\partial s} = k.D.$$

Durch A_1 sei die vor der betrachteten Deformation stattfindende Normalspannung bezeichnet, die wegen der im ursprünglichen Zustande vorausgesetzten Isotropie nach allen Raumrichtungen dieselbe sein muss und die ebenso wie $X_x Y_y Z_z$ positiv oder negativ in Rechnung gebracht sei, je nachdem dieselbe eine Druckspannung oder eine Zugspannung ist. Da nun im primitiven Zustande $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \nu = 0$ zu setzen ist, so ist zufolge (39), wenn durch $\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0$ die für diesen Zustand bestehenden Werthe der betreffenden Differentialquotienten bezeichnet werden,

$$A_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_0 + 4\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0, \tag{40}$$

so dass die durch die Deformation allein hervorgerufene Spannung die Componenten $(X_x - A_1)$, $(Y_y - A_1)$, $(Z_z - A_1)$, Y_z, Z_x, X_y hat.

Beschränkt man sich bei der Potentialfunction f auf Glieder, die bezüglich der Verschiebungsderivationen $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdots$,

also auch zufolge (28), (5), (3) und (2) bezüglich σ, s und ν von nicht höherer Ordnung sind als der dritten, so kann f stets in folgender Form dargestellt werden:

$$f = A_0 + a_1\nu + a_2\nu^2 + a_3\nu^3 + b_1\sigma + b_2\sigma^2 + c_1 s, \qquad (41)$$

indem alle anderen Glieder bis zur dritten Ordnung durch ν, ν^2, ν^3, σ, σ^2 und s ausgedrückt werden können, da, wie die früheren Werthe von ν, s, σ sofort lehren, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung als der dritten,

$$s^2 = 8\nu^2 + 8\nu^3 + 2\sigma^2, \quad \nu.\sigma = \nu^2 + \frac{1}{4}\sigma^2$$

$$\nu.s = 3\nu^2 + \nu^3 + \frac{1}{4}\sigma^2, \quad \sigma.s = 2\nu^2 + 2\nu^3 + \frac{3}{2}\sigma^2$$

$$\frac{\sigma^3}{8} = \frac{s^3}{64} = \frac{\nu\sigma^2}{4} = \frac{\nu s^2}{16} = \frac{\nu^2\sigma}{2} = \frac{\nu^2 s}{4} = \frac{\sigma^2 s}{16} = \frac{\sigma s^2}{32} = \frac{\nu\sigma s}{8} = \nu^3$$

ist.

Führt man nun statt der sechs Coëfficienten $a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 c_1$ der Gleichung (41), welche lediglich von der Art und dem Zustande der der Untersuchung zu Grunde gelegten isotropen Substanz abhängen, andere sechs Elasticitätsconstanten A_1 C_1 B_2 A'_1 A_{21} und B_{21} ein, die mit den früheren durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_1 &= A_1 - 2B_2 + B_{21} - A_{21} \\
a_2 &= \frac{1}{2}(C_1 - A_1 + 2B_2 - B_{21} - A_{21}) \\
a_3 &= A'_1 - B_{21} \\
b_1 &= \frac{1}{2}(2B_2 + B_{21} - A_{21}) \\
b_2 &= \frac{1}{4}B_{21} \\
c_1 &= \frac{1}{2}(A_{21} - B_{21})
\end{aligned}$$

zusammenhängen, so ergeben sich auf Grund der früheren Werthe von $D = 1 + \nu$, σ, s u. s. w. und der Gleichungen (35) und (36) nach einer einfachen Rechnung und wofern man bei der Berechnung von f von Gliedern, die von höherer Ordnung

als der dritten und bei der Berechnung der Spannungscomponenten von Gliedern, die von höherer Ordnung als der zweiten sind, absieht und kürzehalber $a_{23}+a_{32} = \mu_x+\nu_x = \varepsilon_x$, $a_{31}+a_{13} = \mu_y+\nu_y = \varepsilon_y$, $a_{12}+a_{21} = \mu_z+\nu_z = \varepsilon_z$ setzt, folgende Gleichungen:[1]

$$\left.\begin{aligned}
f = {} & A_0+A_1(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)+\frac{C_1-A_1}{2}.(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^2 \\
& +A_1(\lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y-\mu_x\nu_x-\mu_y\nu_y-\mu_z\nu_z) \\
& +2B_2[\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2+\frac{1}{2}(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)] \\
& +A_1'(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^3 \\
& +(A_1-2B_2)[-(\lambda_y+\lambda_z)(\lambda_z+\lambda_x)(\lambda_x+\lambda_y)+\mu_x\mu_y\mu_z+ \\
& \quad +\nu_x\nu_y\nu_z+\mu_x\nu_x(\lambda_y+\lambda_z)+\mu_y\nu_y(\lambda_z+\lambda_x)+\mu_z\nu_z(\lambda_x+\lambda_y)] \\
& +C_1(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)(\lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y-\mu_x\nu_x-\mu_y\nu_y-\mu_z\nu_z) \\
& +A_{21}(\lambda_x\varepsilon_x^2+\lambda_y\varepsilon_y^2+\lambda_z\varepsilon_z^2-\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z-4\lambda_x\lambda_y\lambda_z) \\
& +B_{21}[(\lambda_y+\lambda_z)\varepsilon_x^2+(\lambda_z+\lambda_x)\varepsilon_y^2+(\lambda_x+\lambda_y)\varepsilon_z^2 \\
& \qquad +\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z-4(\lambda_y+\lambda_z)(\lambda_z+\lambda_x)(\lambda_x+\lambda_y)]
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

$$\left.\begin{aligned}
X_x = {} & A_1+4B_2\lambda_x+(C_1-A_1)(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z) \\
& +(3A_1'-4B_{21})(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^2+2B_2[(\lambda_y+\lambda_z)^2+\nu_z^2+\mu_y^2] \\
& +(C_1-A_1)(\lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x+\lambda_x\lambda_y-\mu_x\nu_x-\mu_y\nu_y-\mu_z\nu_z) \\
& -A_{21}(4\lambda_y\lambda_z-\varepsilon_x^2)+B_{21}(4\lambda_x^2+\varepsilon_z^2+\varepsilon_y^2) \\
Y_z = {} & 2B_2.\varepsilon_x+2B_2[\mu_z\nu_y-(\lambda_z+\lambda_x).\mu_x-\nu_x(\lambda_x+\lambda_y)] \\
& -A_{21}(\varepsilon_y\varepsilon_z-2\lambda_x\varepsilon_x)+B_{21}[\varepsilon_y\varepsilon_z+2(\lambda_y+\lambda_z)\varepsilon_x]
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Die übrigen Spannungscomponenten ergeben sich durch cyclische Permutation.

Besonders einfach gestalten sich die allgemeinen Gleichungen (35), wenn die Deformation der isotropen Substanz eine andauernd reine ist, d. i. von keiner Rotation des betrachteten Körperelementes begleitet ist. Da bei einer solchen Deformation bekanntlich die Grunddeterminante (5) andauernd eine symmetrische, also $a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{12} = a_{21}$, d. h.

[1] Dieselben Gleichungen wurden vom Verfasser auch auf einem ganz anderen Wege abgeleitet. Siehe Finger, diese Sitzungsber., 1894, S. 189 und 192.

$\frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial z}, \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x}$ ist, so besteht eine Function F von $xyzt$ — das Deformationspotential — das so beschaffen ist, dass $\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}$. Es ist dann die Bewegung des Körperelementes eine sogenannte Potentialbewegung, welcher ein Geschwindigkeitspotential zukommt. In diesem Falle sind die Flächen (8) und (9) identisch. Die den letzteren Flächen subjungirte Fläche, deren mit den Hauptdruckaxen gleichgerichtete Halbaxen den Quadratwurzeln der Halbaxen der Flächen (8) und (9) gleich sind, also die Längen $\sqrt{\frac{1}{1+\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{\frac{1}{1+\lambda_2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}, \sqrt{\frac{1}{1+\lambda_3}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ haben. hat in diesem Falle die Gleichung[1]

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy = \pm 1,$$

und es ist sonach, wenn durch δ, ε die Summen $a+b+c-3$ $bc+ca+ab-3$ bezeichnet werden

$$\left.\begin{aligned} \delta &= a+b+c-3 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = a_{11}+a_{22}+a_{33}-3 \\ \varepsilon &= bc+ca+ab-3 = A_{11}+A_{22}+A_{33}-3 = \\ &= a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a_{23}a_{32}-a_{31}a_{13}-a_{12}a_{21}-3 \\ \nu &= abc-1 = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{23}a_{31}a_{12}+a_{21}a_{13}a_{32}- \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{22}a_{31}a_{13}-a_{33}a_{12}a_{21}-1 \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

wo $a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{12} = a_{21}$ zu setzen ist.

Da nun den Gleichungen (28) und den letzteren Gleichungen gemäss

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \delta^2+6\delta-2\varepsilon \\ s &= \varepsilon^2+6\varepsilon-2\delta-6\nu-2\delta\nu \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

ist, so kann die Potentialfunction f statt als eine Function $f(s, \sigma, \nu)$ der Variablen s, σ und ν auch als Function $\varphi(\delta, \varepsilon, \nu$ der drei Variablen δ, ε und der cubischen Dilatation ν, deren Werthe bei reinen Deformationen nach (44) aus den Verschiebungsderivationen (2) unmittelbar bestimmbar sind, angesehen werden.

[1] Siehe Finger, W. S. 1892, S. 1118 und 1119.

Nebenbei sei bemerkt, dass bei reinen Deformationen (aber nur bei diesen) die Potentialfunction auch als Function der drei Grössen

$$\delta = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$$
$$\eta = \lambda_y \lambda_z + \lambda_z \lambda_x + \lambda_x \lambda_y - \mu_x \nu_x - \mu_y \nu_y - \mu_z \nu_z$$
$$\zeta = \lambda_x \lambda_y \lambda_z + \mu_x \mu_y \mu_z + \nu_x \nu_y \nu_z - \lambda_x \mu_x \nu_x - \lambda_y \mu_y \nu_y - \lambda_z \mu_z \nu_z$$

wo $\mu_x = \nu_x$, $\mu_y = \nu_y$ und $\mu_z = \nu_z$ ist, betrachtet werden kann,[1] indem nach (44) $\varepsilon = 2\delta + \eta$, $\nu = \delta + \eta + \zeta$, ferner (jedoch nur) in diesem Falle auch $\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\eta = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2$, $\zeta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ist; oder es kann f etwa auch als Function von ν, η und ζ angenommen werden — es ist jedoch behufs Vereinfachung derFormeln für die Spannungscomponenten empfehlenswerther, die Potentialfunction im vorliegenden Falle als eine Function von δ, ε und ν anzusehen. Es ist nämlich, wenn man die Potentialfunction f nunmehr durch φ bezeichnet, zufolge (44) und da auch $A_{21} = A_{12}$ u. s. w. ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(a_{22} + a_{33}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} A_{11} = \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(3+\delta) - a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + A_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{21}} = -a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + A_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{31}} = -a_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + A_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$$

sonach den Gleichungen (15), (5) und (3) zufolge

$$\left.\begin{aligned} D.X_x &= a_{11}.\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(3+\delta)\right] - a_x.\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + D.\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \\ D.X_y &= a_{12}.\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(3+\delta)\right] - b_z.\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \\ D.X_z &= a_{13}.\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(3+\delta)\right] - b_y.\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

[1] Siehe George Green, Mathematical Papers (London 1871, Appendix, p. 332. W. Voigt, Über eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität. Wiedemann's Annalen 1894, Bd. 52, S. 538.

und analog lauten auch die anderen Gleichungen. Man kann übrigens diese Gleichungen in einfacherer Form darstellen. Es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
a_{11}(3+\delta)-a_x &= a_{11}(a_{11}+a_{22}+a_{33})-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2 = \\
&= (a_{33}a_{11}-a_{31}a_{13})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) = A_{22}+A_{33} = \varepsilon+3-A_{11} \\
a_{12}(3+\delta)-b_z &= a_{12}(a_{11}+a_{22}+a_{33})-a_{11}a_{21}-a_{12}a_{22}-a_{13}a_{23} = \\
&= -(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}) = -A_{12} \\
a_{13}(3+\delta)-b_y &= a_{13}(a_{11}+a_{22}+a_{33})-a_{31}a_{11}-a_{32}a_{12}-a_{33}a_{13} = \\
&= -(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) = -A_{13}
\end{aligned}
$$

so dass nach (46) und den diesen analogen Gleichungen sich für alle Potentialbewegungen isotroper Substanzen folgende allgemein giltige Werthe der Spannungscomponenten ergeben:

$$
\left.
\begin{aligned}
X_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\frac{3+\varepsilon}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}+\frac{a_{11}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}-\frac{A_{11}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} \\
Y_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\frac{3+\varepsilon}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}+\frac{a_{22}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}-\frac{A_{22}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} \\
Z_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\frac{3+\varepsilon}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}+\frac{a_{33}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}-\frac{A_{33}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} \\
Y_z &= \frac{a_{23}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}-\frac{A_{23}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = Z_y \\
Z_x &= \frac{a_{31}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}-\frac{A_{31}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = X_z \\
X_y &= \frac{a_{12}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}-\frac{A_{12}}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = Y_x
\end{aligned}
\right\} \quad (47)
$$

Dieselben Gleichungen lassen sich übrigens leicht auch aus (35) und (36) ableiten, wofern man die aus der Gleichung $f(\sigma, s, \nu) = \varphi(\delta, \varepsilon, \nu)$ und den Gleichungen (45) zu folgernden Relationen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} &= \frac{\partial f}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial\delta}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial\delta} = \frac{\partial f}{\partial\sigma}.(2\delta+6)+\frac{\partial f}{\partial s}.(-2-2\nu) \\
\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} &= \frac{\partial f}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial\sigma}.(-2)+\frac{\partial f}{\partial s}.(2\varepsilon+6) \\
\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} &= \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial\nu}+\frac{\partial f}{\partial\nu} = \frac{\partial f}{\partial s}(-6-2\delta)+\frac{\partial f}{\partial\nu}
\end{aligned}
$$

in Anwendung bringt.

SITZUNGSBERICHTE

DER

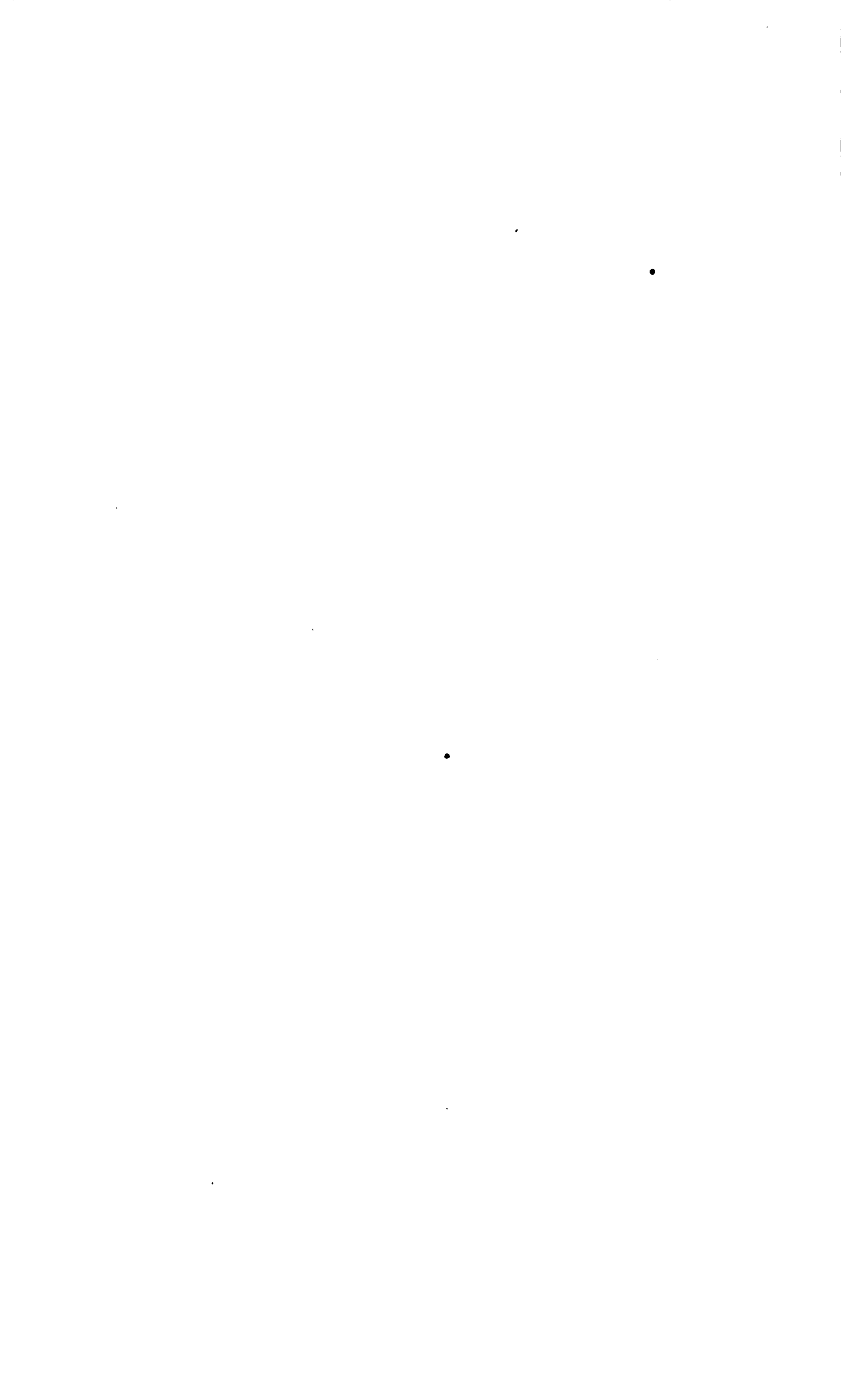
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XXVI. SITZUNG VOM 6. DECEMBER 1894.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 30. November l. J. erfolgte Ableben ihres wirklichen Mitgliedes Sr. Excellenz des Herrn geheimen Rathes Dr. Cajetan Freiherrn von Felder in Wien erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Bildung von Propyltartronsäuren aus den Dibutyryldicyaniden«, von Prof. Karl Brunner.
2. »Über das Verhalten der Kalksalze einiger aromatischer Äthersäuren bei der trockenen Destillation«, von stud. phil. Eduard Hübner.

Herr Gejza v. Bukowski in Wien übersendet eine vorläufige Notiz über den zweiten abschliessenden Theil seiner Arbeit: »Die levantinische Molluskenfauna der Insel Rhodus«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Über den Phenyläther des Glycolaldehyds«, von Dr. C. Pomeranz.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Foreau de Courmelles, V. De la vaginite et de son traitement. Paris, 1888; 8°. — Le magnétisme devant la loi. Paris, 1890; 8°. — Précis d'électricité médicale. Technique opératoire des applications médicales. Paris, 1892; 8°. — Revue illustrée de politechnique médicale et chirurgicale. Paris, No. 7, 1892; No. 3, 4, 6, 9, 1893; 8°.

XXVII. SITZUNG VOM 13. DECEMBER 1894.

Der Secretär legt den 61. Band (Jahrgang 1894) der Denkschriften, ferner die aus denselben veranstaltete Collectiv-Ausgabe der Berichte der Commission für Erforschung des östlichen Mittelmeeres (III. Reise) vor.

Herr Prof. Dr. Anton Fritsch in Prag übermittelt die Pflichtexemplare des III. Heftes zum III. Bande (in der Reihe Heft XI) seines mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie herausgegebenen Werkes: »Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens«. *Paleoniscidae*. I. (Mit Taf. 113—122.)

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übersendet eine Abhandlung von Dr. Julius Pohl, Privatdocent an der k. k. deutschen Universität in Prag: »Über Variationsweite der Oenothera Lamarckiana«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. P. Czermak in Graz: »Über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem constanten Strome durchflossen wird«.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem chemischen Institute der k. k. Universität in Graz:

1. »Über die Affinität einiger Basen in alkoholischer Lösung«, von Prof. Zd. H. Skraup.
2. »Über das Cinchotenin«, von Dr. Florian Ratz.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Über das Verhalten des äthylglycolsauren Kalkes bei der trockenen Destillation«, von Dr. Wilhelm Heinrich Gintl.
2. »Über ein Cyanid und eine Carbonsäure des Isochinolins«, von stud. phil. Berthold Jeiteles.

Der Secretär legt eine von Herrn Victor Lutschaunig, Professor der Schiffbaukunde an der k. k. Akademie für Handel und Nautik in Triest, eingesendete Abhandlung vor, betitelt: »Der Mittelpunkt des hydrostatischen Auftriebes«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath F. Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung des c. M. Herrn Director Th. Fuchs in Wien: »Über die Natur und Entstehung der Stylolithen«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann in Wien überreicht eine vorläufige Mittheilung über eine von ihm und Herrn G. H. Bryan ausgeführte Arbeit: »Über eine mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper«.

Herr Dr. Carl Graf Attems in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Myriopoden Steiermarks«.

Schliesslich spricht Herr Vicepräsident Prof. E. Suess über den Mond und seine geologische Beschaffenheit.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Lutschaunig, V., Die Definitionen und Fundamentalsätze der Theorie des Gleichgewichtes schwimmender Körper. Eine kritische Besprechung der Stabilitätstheorie der Schiffe. (Mit 11 Tafeln.) Triest, 1894; 8°.

Über die Temperaturvertheilung längs eines dünnen Drahtes, der von einem constanten Strome durchflossen wird

von

Dr. **P. Czermak,**

Privatdocent in Graz.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

Zweck der Untersuchung.

Bei physikalischen Arbeiten kommt nicht selten das Bedürfniss vor, die Vertheilung der Temperatur in dünnen Drähten zu kennen, die an den Enden durch Verbindung mit gut leitenden dicken Zuleitungen auf constanter Temperatur erhalten und der Erwärmung durch einen elektrischen Strom ausgesetzt sind. Hängt ja doch der Widerstand eines so ausgespannten Drahtes von dieser Temperaturvertheilung ab. Von Glühversuchen mit dünnen Platindrähten her ist man gewohnt anzunehmen, dass nur die unmittelbar an den Enden gelegenen Theile des Drahtes schwächer oder gar nicht erheblich erwärmt werden, während man aus dem gleichmässig hellen Leuchten des übrigen Drahtes auf constante Temperaturerhöhung desselben schliesst. Genauere Versuche mit schwach erwärmten Drähten lassen aber erkennen, dass sich der abkühlende Einfluss der Zuleitungen viel weiter erstreckt, so dass man überrascht ist, wie lange man den Draht nehmen muss, um überhaupt noch in der Mitte desselben eine Strecke constanter Temperatur vorzufinden.

Zweck dieser Untersuchung ist es nun den genauen Verlauf der Temperaturen insbesondere bei sehr dünnen Drähten experimentell festzustellen, da bisher meist nur relativ dicke Stangen untersucht wurden. Die dünnen Drähte bieten dabei

den Vortheil, dass sie ungemein rasch den stationären Zustand annehmen.

Die an dünnen Drähten verschiedenen Materiales erhaltenen Daten sollen dann mit der Theorie verglichen und berechnet werden.

Methode.

Dieselbe stimmt im Wesentlichen mit der von J. Klemenčič[1] überein, welche derselbe an Drähten, die durch elektrische Oscillationen oder durch constante Ströme erwärmt wurden, mit Erfolg angewendet hat. Ein sehr dünnes Thermoelement wird sehr nahe und senkrecht zu dem zu untersuchenden Drahte angebracht und durch die strahlende Wärme des letzteren mit erwärmt, ohne dass dasselbe durch directe Ableitung eine Störung des Temperaturverlaufes verursachen kann. Der durch das Thermoelement erzeugte Scalenausschlag gilt als Mass der Temperaturerhöhung des stromdurchflossenen Drahtes.

Der Apparat.

Die zu untersuchenden Drähte, welche alle durch dasselbe Zieheisen bis auf 0·2 *mm* Durchmesser ausgezogen waren, wurden zuerst an durchbohrte viereckige Kupferplättchen gelöthet und mit diesen in die 1 *cm* dicken Kupferstangen *K*, *K*, (siehe Tafel) eingespannt. Die Kupferstangen selbst waren in massive Messinglager geklemmt, welche gestatteten die Lage des Drahtes etwas zu corrigiren. An diese Lager waren die Zuleitungen für den constanten Strom angelöthet, welcher den Draht zu erwärmen hatte und der von einem Accumulator *A* und einem Widerstande *W* auf der gewünschten Stärke erhalten wurde.

Das Thermoelement war zwischen den 3 *mm* dicken Kupferdrahtenden *a b* ausgespannt und dessen Löthstelle so nahe als möglich an den Draht herangeführt, ohne aber denselben zu berühren. Es war auf einen mit Blei ausgegossenen Holzklotz *C* montirt, welcher mit zwei metallenen Gleitstücken 1, 2 auf einer abgedrehten Messingstange *M* und einer Schraube 3

---

[1] Diese Sitzungsber. Bd. 101, 1892; Bd. 102, 1893; Bd. 103, 1894.

auf einer Spiegelglasplatte G parallel zu dem Drahte geführt werden konnte.

Der Abstand des Thermoelementes vom Drahte konnte durch Heben und Senken an der Schraube 3 regulirt werden und ausserdem war das Element noch in der Richtung $a\ b$ verschiebbar, so dass man die Löthstelle stets genau unter den Draht stellen konnte.

Der ganze Klotz wurde durch eine lange Schraube S von Aussen weitergeschoben. Der Kopf der Schraube war in 100 Theile getheilt und ging neben einer Theilung T für die ganzen Umgänge. Das conisch abgerundete andere Ende der Schraube drückte gegen ein Spiegelglasstück s, welches auf den Klotz gekittet war.

So konnte der Klotz nach einer Richtung geschoben werden und für den Rückweg wurde er einfach durch eine Schnur nachgezogen. Die beiden Enden der dicken Kupferdrähte, an welche das Thermoelement gelöthet war, standen mit einem Galvanometer von Carpentier in Verbindung, und zwar ging die eine Zuleitung durch die Messingstange M über die Gleitstellen 1 und 2 zu dem Punkte b und vom Punkte a tauchte der dicke Draht in eine Quecksilberrinne R, die zum Galvanometer zurückführte.

Über den ganzen Apparat war natürlich ein Pappdeckelkasten gestürzt, der ganz mit Watte ausgekleidet war, um alle störenden Einflüsse der Strahlung und der Luftströmungen abzuhalten. Obwohl der von mir selbst angefertigte Apparat wohl nicht auf die grösste Präcision Anspruch machen konnte, zeigten trotzdem die erhaltenen Resultate eine grosse Regelmässigkeit und Übereinstimmung mit der Rechnung, die sich mit einem präciser construirten Apparate noch weiter steigern liesse.

Der schwierigste Punkt bei dieser Beobachtungsweise ist wohl die Bedingung, dass die Löthstelle des Thermoelementes immer parallel und in constantem Abstande vom Drahte geführt wird. Eigens dazu angestellte Versuche zeigten aber, dass die Empfindlichkeit für kleinere Änderungen des Abstandes nicht sehr gross ist, so dass es genügte, die Einhaltung dieser Bedingungen an dem vorliegenden Apparate nur nach dem Augenmaasse vorzunehmen.

Die grösste Drahtlänge, welche eingespannt werden konnte, betrug gegen 18 *cm* und erwies sich dies schon für das Kupfer kaum mehr hinreichend, für Silber war dieselbe entschieden zu gering.

Die Versuche wurden nun in folgender Weise gemacht. Nachdem der Draht eingespannt und justirt war, wurde der Strom so regulirt, dass das Galvanometer, wenn sich das Thermoelement an der Mitte des Drahtes befand, einen Ausschlag von ungefähr 120—150 Scalentheilen gab. Dies entsprach einer Erwärmung des Drahtes von rund 0·1—0·2 Graden und waren die dazu erforderlichen Stromstärken je nach dem untersuchten Materiale zwischen 0·1 und 0·01 Ampère gelegen.

Man sieht also, dass man auf diese Art im Stande ist, den Temperaturverlauf bei einem minimalen Unterschiede gegen die Umgebungstemperatur zu ermitteln. Wäre der Apparat etwas anders construirt, so wäre es nicht schwierig, die Verhältnisse der äusseren und inneren Wärmeleitungsconstanten der verschiedenen Materialien untereinander für bestimmte Temperaturen, ja sogar deren absolute Grössen zu bestimmen. Eine solche Empfindlichkeit wird wohl mit keiner anderen bisherigen Methode erreichbar sein.

Bezüglich der Erwärmung ist noch anzuführen, dass es leider nicht anging, den Strom zu schliessen und dann dem Drahte entlang das Temperaturgefälle abzusuchen. In der Galvanometerleitung war stets ein so grosser constanter Thermostrom, dass die Leitung geschlossen bleiben und die Ablenkung durch einen Magnet compensirt werden musste. Da die Schwingungsdauer der Galvanometernadel gegen 15 Secunden betrug, so wurde einfach der Erwärmungsstrom an jeder neuen Stelle durch 10 Secunden lang geschlossen und der Ausschlag beobachtet. Controlversuche ergaben, dass in dieser Zeit der stationäre Zustand im Drahte nahezu erreicht war, so dass der Verlauf der Temperaturcurve längs des Drahtes nicht wesentlich beeinflusst sein konnte.

Um die verschiedenen Drähte untereinander leichter vergleichen zu können, wurden die Ausschläge stets so reducirt, dass in der Mitte der Werth 100 angenommen wurde. Nun

wurde das Thermoelement dem ganzen Draht entlang verschoben, und zwar stets von einem bis zum anderen Ende und wieder retour; aus den gleichweit von der Mitte abstehenden Werthen und den beim Hin- und Hergange erhaltenen wurde dann das Mittel genommen.

Theorie und Berechnung der Versuche.

Beim Eintragen der Beobachtungen in ein Coordinatenpapier zeigte sich eine solche Regelmässigkeit in denselben, dass es der Mühe werth schien, dieselben auch mit der Theorie zu prüfen, obwohl die ganze Untersuchung mehr in qualitativer als in quantitativer Hinsicht unternommen wurde.

Die allgemeine Theorie des vorliegenden Problemes ist von J. Linde[1] durchgeführt worden und zwar für einen constanten Strom. In der Arbeit selbst sind zwei Fälle unterschieden: »1. die Stromstärke i ist constant, 2. i ist variabel mit der Zeit, und zwar soll i eine einfache Function der Zeit darstellen, also $i = i_0 \sin 2\pi n t$.«[2]

Da für den vorliegenden Fall nur der stationäre Zustand in Betracht kommt, wodurch sich die Rechnung wesentlich vereinfacht und die Arbeit von J. Linde weniger bekannt sein dürfte, so will ich die hier nöthigen Gleichungen direct ableiten.

Die Differentialgleichung für die Wärmebewegung in einem dünnen Stabe mit Berücksichtigung der Ausstrahlung an die Umgebung ist bekanntlich:

$$c\rho q \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \left(kq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hpu\right) dx dt.$$

Darin bedeuten k das innere Wärmeleitungsvermögen, h den Coëfficienten der äusseren Wärmeleitung, q den Querschnitt, p den Umfang, ρ die Dichte und c die specifische Wärme des Drahtes.

---

[1] »Über die Temperaturbestimmung eines Drahtes, wenn durch denselben ein galvanischer Strom fliesst« von J. Linde. Exner's Rep. Bd. 27, 1891, S. 401.

[2] Der zweite Fall ist aber nirgends zu finden und ist überhaupt der Abhandlung eine gewisse Flüchtigkeit nicht abzusprechen, da dieselbe auf sieben Seiten an 60 Druckfehler enthält.

Die Gleichung sagt also, dass die Wärmemenge, welche zur Temperaturerhöhung eines Drahtstückes von der Länge dx, während der Zeit dt, nothwendig ist, gleich sein muss der im Innern von dx an der einen Seite mehr eintretenden, als an der andern austretenden Wärmemenge, vermindert um die durch Strahlung nach aussen während dieser Zeit gelangenden Menge.

Durchfliesst nun noch ein constanter Strom von der Stärke i den Draht, so wird in der betrachteten Zeit dt in dem Drahtstücke von der Länge dx auch noch eine Wärmemenge $\frac{i^2 w}{Aq} dx\,dt$ entwickelt, wenn w den specifischen Widerstand des Drahtes und A das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Ein Theil der eingetretenen Temperaturerhöhung des Drahtes wird daher auch noch von dieser Wärmemenge veranlasst werden, so dass wir für diesen Fall und nach passender Abkürzung die Gleichung erhalten:

$$cpq \frac{\partial u}{\partial t} = kq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hpu + \frac{i^2 w}{Aq}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{cp} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{cpq} u + \frac{i^2 w}{cpq^2 A}. \qquad 1)$$

Für den stationären Zustand muss dann gelten:

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{kq} u + \frac{i^2 w}{kq^2 A}; \qquad 2)$$

setzt man

$$u = v + \frac{i^2 w}{hpqA},$$

so bekommt die Gleichung 2) die einfachere Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{hp}{kq} v, \qquad 3)$$

deren Integral dann ist:

$$v = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x},$$

wenn abkürzungsweise gesetzt wird:

$$\lambda^2 = \frac{hp}{kq}.$$

Zur Bestimmung der Constanten C_1 und C_2 dienen die Grenzbedingungen. Da der hier betrachtete Draht zwischen zwei sehr gut leitenden, dicken Metallbacken ausgespannt ist, so wird er erstens zu beiden Seiten seiner Mitte einen ganz symmetrischen Verlauf der Temperaturen zeigen müssen und an den beiden Enden die Temperatur der Umgebung besitzen. Nehmen wir diese als 0 an und legen den Coordinatenanfangspunkt in den einen Endpunkt des Drahtes, welcher selbst die x-Axe darstellt, so werden die Grenzbedingungen bei einer Länge des Drahtes gleich l sein:

für $x = 0$ muss $u = 0$ sein,
für $x = l$ muss $u = 0$ sein.

Daraus folgen zur Bestimmung der Constanten C_1 und C_2 die beiden Gleichungen

$$0 = C_1 + C_2 + M,$$
$$0 = C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} + M,$$

welche ergeben:

$$C_1 = -M \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}};$$

$$C_2 = M \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}},$$

so dass schliesslich der Ausdruck für die Temperatur die Form erhält:

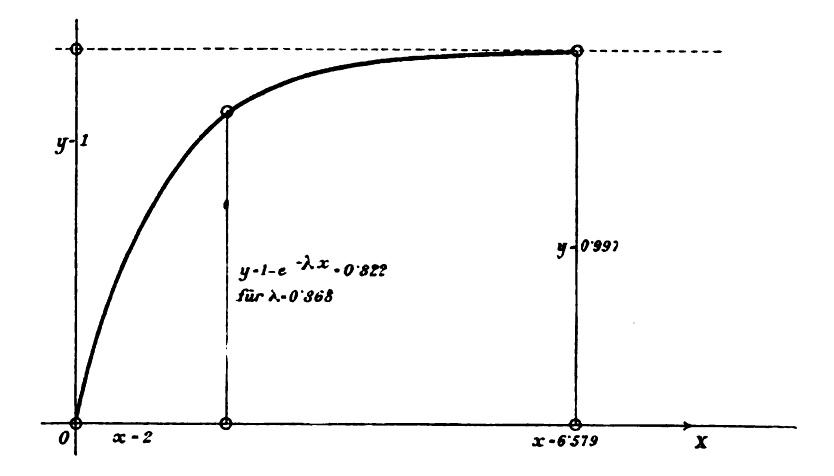
$$u = M\left[1 - \frac{1 - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{\lambda x} + \frac{1 - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} e^{-\lambda x}\right] \qquad 4)$$

Man sieht, dass mit wachsendem l der Werth des Coëfficienten von $e^{\lambda x}$ immer kleiner wird und der von $e^{-\lambda x}$ sich immer mehr dem Werthe -1 nähert. Für $l = \infty$ aber folgt unmittelbar der erstere Coëfficient $= 0$ und der zweite $= -1$ als Grenzwerth. Es erhält dann die Formel 4) die einfache Gestalt

$$u = M[1 - e^{-\lambda x}] \quad \text{für } l = \infty. \qquad 5)$$

Es ist dies die Gleichung einer Curve, welche ziemlich rasch, je nach dem Werthe von λ, ansteigt und sich dann asymptotisch der Geraden $y = M$ nähert, also ungefähr wie die folgende Figur zeigt.

Wenn man daher die Drahtlängen so gross wählt, dass sich bei der Erwärmung durch den Strom in der Mitte ein Intervall findet, wo die Temperatur constant bleibt, so wird die Anwendung dieser Formel bereits gestattet sein oder wenigstens



als grosse Annäherung an den wirklichen Temperaturverlauf gelten können.

Setzen wir daher wieder die ursprünglichen Werthe für die Grössen M und λ ein, so bekommt die hier benützte Formel die Gestalt

$$u = \frac{i^2 w}{hpqA}\left[1 - e^{-\sqrt{\frac{hp}{kq}}x}\right] \qquad 6)$$

und die Galvanometerausschläge, welche diesen Temperaturen proportional sind, werden einer Curve angehören müssen von der Form

$$y = au = 1 - e^{-\lambda x}. \qquad 7)$$

Ist der Draht nicht lange genug, so dass die allgemeine Formel 4) gilt, so wäre

$$y = 1 - \frac{1-e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}} e^{\lambda x} + \frac{1-e^{\lambda l}}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}} e^{-\lambda x}. \qquad 8)$$

Die Coëfficienten des zweiten und dritten Gliedes kann man aber auch anders schreiben; es ist

$$\frac{1-e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}} = \frac{e^{\lambda l}-1}{e^{2\lambda l}-1} \quad \text{und} \quad \frac{1-e^{\lambda l}}{e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}} = \frac{e^{\lambda l}-e^{2\lambda l}}{e^{2\lambda l}-1}.$$

Bei nur etwas grösserem l sind dann die Grössen $e^{\lambda l}$ und noch mehr $e^{2\lambda l}$ so gross, dass ihnen gegenüber die Einheit von sehr geringem Einflusse wird. Es wird dann

$$y = 1 - e^{-\lambda l} e^{\lambda x} + (e^{-\lambda l} - 1) e^{-\lambda x},$$

oder

$$y = 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda l}(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}). \qquad 9)$$

Dies würde eine etwas genauere Formel als Gleichung 7) darstellen. Beim Eintragen der Beobachtungen in ein Coordinatenpapier stellte sich aber eine Schwierigkeit heraus. Die genaue Lage des Anfangs- und Endpunktes der Drähte gegenüber der Theilung, welche die Schraube bestimmte, konnte nicht genau ermittelt werden. Wegen der dicken Ableitungsstangen konnte das Thermoelement nie bis ganz an die Enden der Drähte, wo der Werth 0 herrschen sollte, gebracht werden, sondern man musste in einer Entfernung von einem durch Schätzung ermittelten Bruchtheile eines Millimeters beginnen. Die so beobachteten Ordinatenwerthe gehören dann einer Curve an, welche gegen das Coordinatensystem parallel der Abscissenaxe um ein kleines Stück δ verschoben ist. Um nun aus den zahlreichen Beobachtungen sowohl einen Werth für λ als auch δ nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen, musste von der Anwendung der genauen Formel 8) und selbst der Formel 9) Abstand genommen werden. Es wurde Formel 7) verwendet und war selbst bei dieser die Berechnung, da mit zwei genäherten Werthen für λ und δ begonnen und die Rechnung zwei- bis dreimal wiederholt werden musste, eine sehr zeitraubende.

Ist also der Anfangspunkt um das kleine Stück δ verschoben und wird Formel 7) benützt, so haben die Beobachtungen der Gleichung

$$y = 1 - e^{-\lambda(x-\delta)}$$

zu genügen.

Die Bestimmung von δ aber war sehr wichtig, da beim Eintragen der verschiedenen Curven, wenn dieselben nicht alle von demselben Coordinatenanfangspunkte begonnen hätten, dieselben sich durchkreuzt hätten. Da die Steilheit der Curven bei schlechter leitenden Substanzen aber gerade vom Nullpunkte aus immer bedeutender wird, so wäre eine Übersicht, wie sich die Curven nacheinander durch die Änderung des Werthes von λ anordnen, ganz unmöglich gewesen.

Die Versuchsergebnisse.

In den folgenden Tabellen sind die auch in das Coordinatennetz eingetragenen Werthe der Messungen zusammengestellt, und zwar wurden mehr Ordinaten berechnet als beobachtet, damit die Curven sicherer gezogen werden können. Die beobachteten Werthe sind dann als einzelne Marken eingetragen. Als Maasstab wurde für die Ordinaten die Hälfte des Maasstabes der Abscissen genommen.

Constantan.

Länge = 83·8 *mm* $\lambda = 2\cdot3195$

Dicke = 0·2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1-e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0·3	7·4	7·5	—0·1
2	0·8	16·2		
3	1·2	23·9	23·7	+0·2
4	1·6	31·0		
5	2·0	37·6	36·7	+0·9
6	2·9	49·0		
7	3·7	57·9	57·5	+0·4
8	4·6	65·6		
9	5·4	71·6	71·5	+0·1
10	6·7	78·9		
11	8·0	84·3	84·3	±0·0
12	9·3	88·4		
13	10·5	91·3	91·3	±0·0
14	12·2	94·1		
15	13·9	96·6	96·5	+0·1
16	15·6	97·3		
17	17·3	98·2	98·1	+0·1
18	19·0	98·8		
19	20·7	99·2	99·2	±0·0
20	22·9	99·5		
21	25·0	99·7	99·8	—0·1
22	27·1	99·8		
23	29·2	99·9	100·0	—0·1
24	31·4	$99\cdot9_3$		
25	33·5	$99\cdot9_6$	100·1	—0·2
26	35·6	$99\cdot9_7$		
27	37·7	$99\cdot9_8$	100·1	—0·2
28	39·8	$99\cdot9_9$		
29	41·9	$99\cdot9_9$	100·0	—0·1

Patentnickel.

Länge = 82·2 *mm* $\lambda = 2\cdot 1702$
Dicke = 0·2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1-e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0·7	14·1	13·1	+1·0
2	1·1	21·2		
3	1·6	28·6	29·1	—0·5
4	2·0	35·2		
5	2·4	40·6	41·5	—0·9
6	3·3	51·1		
7	4·1	58·9	59·2	—0·3
8	4·5	62·3		
9	5·8	71·6	71·5	+0·1
10	7·1	78·6		
11	8·4	83·7	83·2	+0·5
12	9·6	87·6		
13	10 9	90·6	90·1	+0·5
14	12·6	93·5		
15	14·3	95·5	95·4	+0·1
16	16·0	96·9		
17	17·7	97·9	97·6	+0·3
18	19·4	98·5		
19	21·1	99·0	98·4	+0·6
20	23·2	99·3		
21	25·4	99·6	99·5	+0·1
22	27·5	99·7		
23	29·6	99·8	99·7	+0·1
24	31·7	99·9		
25	33 9	$99\cdot 9_4$	99·9	±0·0
26	36·0	$99\cdot 9_6$		
27	38·1	$99\cdot 9_7$	100·3	—0·4
28	39·6	$99\cdot 9_8$		
29	41·1	$99\cdot 9_9$	100·0	—0·1

Platin.

Länge = 100·4 *mm* $\lambda = 1 \cdot 9841$

Dicke = 0·2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1-e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0·5	8·7	8·7	±0·0
2	0·9	16·4		
3	1·3	22·9	22·6	+0·3
4	2·2	35·4		
5	3·0	45·0	44·8	+0·2
6	3·9	53·9		
7	4·7	60·7	61·0	−0·3
8	6·0	69·6		
9	7·3	76·3	76·6	−0·3
10	8·5	81·1		
11	9·8	85·7	85·8	−0·1
12	11·5	89·8		
13	13·2	92·7	92·8	−0·1
14	14·9	94·8		
15	16·6	96·3	95·8	+0·5
16	18·3	97·4		
17	20·0	98·1	98·1	±0·0
18	21·7	98·7		
19	23·4	99·0	98·9	+0·1
20	25·5	99·4		
21	27·7	99·6	99·9	−0·3
22	29·8	99·7		
23	31·9	99·8	99·9	−0·1
24	36·2	$99 \cdot 9_3$		
25	40·4	$99 \cdot 9_7$	99·9	±0·0
26	45·3	$99 \cdot 9_9$		
27	50·2	$99 \cdot 9_9$	100·0	−0·1

Eisen.

Länge = 118·4 *mm* $\lambda = 1·4000$

Dicke = 0·2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1-e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0·8	10·0	9·6	+0·4
2	1·6	20·1		
3	2·5	29·0	29·8	−0·8
4	3·2	36·1		
5	4·2	44·1	43·2	+0·9
6	5·4	53·0		
7	6·7	60·9	60·4	+0·5
8	8·0	67·4		
9	9·3	72·6	72·6	±0·0
10	11·0	78·6		
11	12·7	83·0	83·0	±0·0
12	14·4	86·7		
13	16·1	89·4	89·4	±0 0
14	18·2	92·2		
15	20·3	94·2	93·4	+0·8
16	22·2	95·5		
17	24·6	96·8	96·8	±0·0
18	26·7	97·6		
19	28·8	98·2	98·2	±0·0
20	31·0	98·7		
21	33·1	99·0	98·9	+0·1
22	35·2	99·3		
23	37·3	99·5	99·4	+0·1
24	39·4	99·6		
25	41·6	99·7	99·7	±0·0
26	45·8	99·8		
27	50·1	99·9	99·9	±0·0
28	54·6	99·9		
29	59·2	99·9	100·0	−0·1

Aluminium.

Länge = 131·6 *mm* $\lambda = 0{\cdot}8654$
Dicke = 0·2

Nr.	x	$y =$ $= 100\,(1 - e^{-\lambda x})$	$y =$ beobachtet	Differenz
1	0·8	6·4	6·1	+0·3
2	1·5	12·2		
3	2·5	19·2	19·1	+0·1
4	4·0	29·3		
5	5·0	35·2	35·6	—0·4
6	6·0	40·5		
7	7·6	48·1	48·5	—0·4
8	9·0	54·1		
9	11·0	61·3	61·5	—0·2
10	12·0	64·6		
11	14·4	71·2	71·1	+0·1
12	16·0	75·0		
13	17·8	78·5	78·2	+0·3
14	20·0	82·3		
15	22·0	85·1	84·9	+0·2
16	24·0	87·5		
17	26·3	89·7	89·0	+0·7
18	28·0	91·1		
19	30·5	92·9	92·6	+0·3
20	32·0	93·7		
21	34·8	95·1	95·1	±0·0
22	37·0	95·7		
23	39·0	96·6	96·6	±0·0
24	41·0	97·1		
25	43·3	97·6	98·3	—0·7
26	45·0	98·0		
27	47·5	98·4	98·8	—0·4
28	52·0	98·9		
29	56·0	99·2	99·6	—0·4
30	61·0	99·5		
31	65·8	99·7	100·0	—0·3

Kupfer.

Länge = 165·5 *mm* λ = 0·6606
Dicke = 0·2

Nr.	x	$y =$ $= 100(1-e^{-\lambda x})$	$x =$ beobachtet	Differenz
1	0·5	3·3	3·4	—0·1
2	0·9	6·0		
3	1·4	8·6	9·0	—0·4
4	2·2	13·5		
5	3·1	18·3	18·6	—0·3
6	4·8	27·2		
7	6·5	34·7	34·0	+0·7
8	8·2	41·8		
9	9·9	47·9	47·7	+0·2
10	11·6	53·5		
11	13·3	58·4	58·1	+0·3
12	15·0	62·9		
13	16·7	66·7	66·0	+0·7
14	18·4	70·3		
15	20·1	73·4	73·2	+0·2
16	21·8	76·3		
17	23·5	78·8	78·7	+0·1
18	25·2	81·1		
19	26·9	83·0	82·9	+0·1
20	28·6	84·9		
21	30·3	86·5	86·8	—0·3
22	32·0	87·9		
23	33·7	89·2	89·3	—0·1
24	35·4	90·4		
25	37·1	91·4	92·0	—0·6
26	38·8	92·3		
27	40·5	93·1	93·3	—0·2
28	42·2	93·8		
29	43·9	94·5	95·3	—0·8
30	47·3	95·6		
31	50·7	96·5	97·1	—0·6
32	54·1	97·2		
33	57·5	97·8	98·6	—0·8
34	60·9	98·2		
35	64·3	98·6	99·6	—1·0
36	67·7	98·9		
37	71·1	99·1	99·7	—0·6
38	74·5	99·3		
39	77·9	99·4	99·8	—0·4
40	80·3	99·5		
41	82·8	99·6	100·0	—0·4

Man sieht nun zunächst deutlich den grossen Einfluss der Abkühlung bei Metallen, welche eine bessere Wärmeleitung besitzen. Die Reihenfolge der Curven ist auch geradezu jene der Wärmeleitungsfähigkeiten.

Könnte man die äussere Wärmeleitung bei allen Drähten als gleich voraussetzen, wie es für so dünne Drähte, die einer ganz gleichartigen Behandlungsweise unterworfen waren, von manchen Beobachtern behauptet wird, so würden die Verhältnisse der λ direct die Verhältnisse der k darstellen.

Die Reihenfolge der λ ist aber auch hier dieselbe wie jene der elektrischen Leitfähigkeiten. Es wurden desshalb auch die specifischen Widerstände der untersuchten Drähte bestimmt.

Da aber von Beginn der Untersuchung auf eine genaue quantitative Übereinstimmung nicht gerechnet wurde und dem entsprechend die Anordnung nicht gewählt war, so ist auch den Zahlen, welche diese Verhältnisse ausdrücken sollen, kein definitiver Werth beizumessen. In qualitativer Hinsicht aber ist das Ergebnis gewiss massgebend. Stellt man also in diesem Sinne die Werthe zusammen, so erhält man folgende Reihenfolge:

	λ	$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 \text{ von Kupfer}}$	$\frac{w}{w \text{ von Kupfer}}$
Constantan	2·320	12·32	30·28
Patentnickel	2·170	10·78	18·74
Platin	1·984	9·01	14·67
Eisen	1·400	4·49	5·89
Aluminium	0·865	1·71	1·84
Kupfer	0·661	1·00	1·00

Die Curven gestatten auch leicht eine Schätzung anzugeben für den Antheil, welcher durch Leitung an die Zuleitung verloren geht. Würden die Enden der Drähte gar keine Wärme verlieren, so müsste der Temperaturverlauf durch eine zur Abscissenaxe im Abstande 1. verlaufende Gerade dargestellt sein. Das Verhältniss von 1. zum Mittelwerthe aller Ordinaten wird daher angeben, welcher Antheil auf die Ableitung entfällt.

Dieser Mittelwerth wird sein:

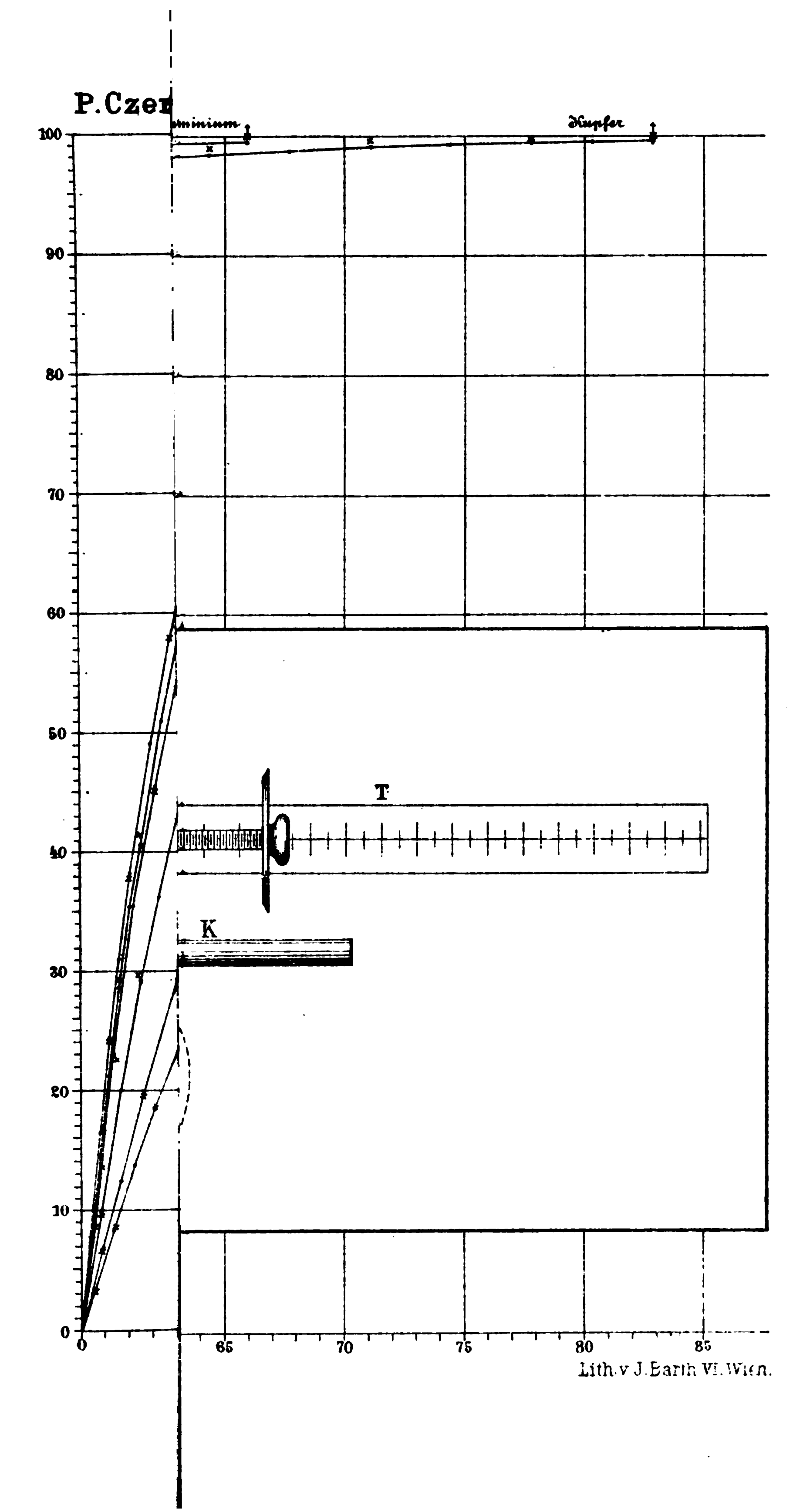
$$y_m = \frac{1}{l}\int_0^l y\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l \left(1 - \frac{e^{\lambda l}-1}{e^{2\lambda l}-1}\,e^{\lambda x} + \frac{e^{\lambda l}-e^{2\lambda l}}{e^{2\lambda l}-1}\,e^{-\lambda x}\right)dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{\lambda l}\,\frac{e^{\lambda l}-1}{e^{\lambda l}+1}.$$

Im Allgemeinen wird man den Coëfficienten von $2/\lambda l$ der Einheit gleichsetzen können, so dass

$$\frac{2}{\lambda l}$$

den abgeleiteten Antheil darstellt. Darauf wäre bei Bestimmung der Temperatur von Widerständen Rücksicht zu nehmen.


P. Czer
...minium
Kupfer
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
65
70
75
80
85
T
K
Lith. v J. Barth VI. Wien.

Über die mechanische Analogie des Wärmegleichgewichtes zweier sich berührender Körper

von

G. H. Bryan und **L. Boltzmann.**

(Mit 1 Textfigur.)

§. 1. Die fundamentalste Eigenschaft der Temperatur besteht darin, dass zwei Körper von gleicher Temperatur mit einander in Berührung gebracht, sich im Wärmegleichgewichte befinden. Aus dieser Eigenschaft konnte bisher die gastheoretische Definition der Temperatur nicht abgeleitet werden. Es konnte nur der Beweis geliefert werden,[1] dass in einem Gemische mehrerer Gase die Bedingung des Wärmegleichgewichtes erfordert, dass die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung für jede Gattung von Gasmolekülen dieselbe sei. Aus dieser Thatsache kann dann unter Zuziehung des gastheoretischen Beweises des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie indirect der Schluss gezogen werden, dass in der kinetischen Gastheorie die Temperatur der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls proportional gesetzt werden muss.

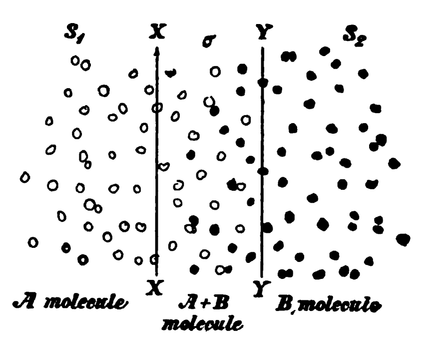
Allein alle unsere experimentellen Kenntnisse von den Eigenschaften der Temperatur sind von der Manipulation mit Körpern abgeleitet, welche sich nicht mischen und es ist nicht möglich, in einem Gemische von Gasen die Temperatur jedes einzelnen der Bestandtheile gesondert durch das Experiment

[1] Diese Sitzungsber. Bd. 63, 1871; Bd. 66, 1872; Bd. 94, 1886; Bd. 95, 1887.

zu definiren. Wir können zwar die Temperatur der ganzen Mischung messen, aber wir haben kein Mittel, irgend eine thermometrische Substanz der Wirkung eines der Bestandtheile allein auszusetzen. Ja selbst der Begriff der Temperatur eines der Bestandtheile für sich wird schwankend.

§. 2. Unter diesen Umständen muss jedes mechanische Bild, welches die Mittheilung der Wärme von einem Körper zum andern ohne gleichzeitige Vermischung der beiden Körper durch Diffusion zu versinnlichen vermag, von hohem Interesse sein. Ein derartiges mechanisches Bild soll im Folgenden beschrieben werden. Die Idee dazu wurde von Herrn Bryan angegeben.

Es seien X und Y (siehe beistehende Figur) zwei unendliche, parallele Ebenen, die sich in geringer Entfernung von



einander befinden und den ganzen von Gas erfüllten Raum in drei Regionen theilen, S_1, S_2 und σ. Unter S_1 verstehen wir den gesammten Raum links von X, unter S_2 den Raum rechts von Y, unter σ den sehr dünn gedachten Raum zwischen X und Y. Übrigens würden die folgenden Schlüsse nicht an Beweiskraft verlieren, wenn X und Y zwei beliebige, allseitig sich bis zur Grenze des vom Gase erfüllten Raumes erstreckende oder auch in sich geschlossene Flächen wären, welche ohne sich zu treffen überall sehr nahe aneinander verlaufen.

Es seien nun zwei verschiedene Gattungen (A und B) von Gasmolekülen gegeben, von denen die ersteren in der Figur durch weisse, die letzteren durch schwarze Punkte dargestellt sind. Die Ebene Y soll die Moleküle A mit einer Kraft abstossen, welche links von X überall verschwindet, zwischen X

und Y aber eine Function der Entfernung des betreffenden Moleküles von der Ebene Y ist. Diese Function soll für Entfernungen, die sehr klein sind im Vergleiche zur Entfernung der Ebenen X und Y, unendlich gross werden, so dass nach der Region S_2, die sich rechts von Y befindet, niemals ein Molekül A gelangen kann. Ganz analog soll die Ebene X auf die Moleküle B mit einer Kraft abstossend wirken, welche unendlich nahe an X unendlich gross, rechts von Y aber gleich Null ist, so dass in den Raum S_1, der sich links von X befindet, niemals Moleküle B gelangen. Es soll im Übrigen weder die Ebene Y auf die Moleküle B, noch die Ebene X auf die Moleküle A eine Kraft ausüben.

Dann haben wir in S_1 ein einfaches Gas, das nur Moleküle A enthält, ebenso in S_2 ein anderes einfaches Gas, das nur Moleküle B enthält, in σ aber ein Gemisch beider Gase. Im letzteren Raume stossen fortwährend Moleküle A mit Molekülen B zusammen, so dass daselbst Wärmeaustausch stattfinden kann, wie zwischen zwei sich berührenden Körpern.

§. 3. Der hier zu betrachtende Fall ist lediglich ein Specialfall davon, dass auf ein beliebiges Gasgemisch beliebige äussere Kräfte wirken. Es handelt sich daher nur darum, die im allgemeinen Falle geltenden Formeln[1] dem speciellen Probleme anzupassen.

Es ist da gut, von generalisirten Coordinaten Gebrauch zu machen. Seien $q_1, q_2 \ldots q_m$ die generalisirten Coordinaten eines Moleküls von der Gattung A (sagen wir kurz eines A-Moleküls) $p_1, p_2 \ldots p_m$ die dazu gehörigen Momente, T_1 die lebendige Kraft, χ_1 die gesammte potentielle Energie, daher $E_1 = T_1 + \chi_1$ die totale Energie dieses Moleküls.

Ferner seien $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ die Coordinaten eines Moleküls von der Gattung B (B-Moleküls), $P_1, P_2 \ldots P_n$ die dazugehörigen Momente, T_2 die lebendige Kraft, χ_2 die potentielle Energie und $E_2 = \chi_2 + T_2$ die gesammte Energie desselben. χ_1 und χ_2 können völlig verschiedene Functionen der betreffenden Coordinaten sein, so dass also auf die B-Moleküle ganz andere Kräfte als auf die A-Moleküle wirken können. Nun wurde in

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 72, Oct. 1875; Bd. 78, 1878; Bd. 96, 1887.

den auf S. 1125 citirten Abhandlungen bereits Folgendes bewiesen:

Wenn die Anzahl der A-Moleküle, für welche die Coordinaten und Momente zwischen den durch das Differentialproduct

$$dp_1 \ldots dp_m dq_1 \ldots dq_m$$

bestimmten Grenzen liegen, gleich

$$Ae^{-h_1 E_1} dp_1 \ldots dp_m dq_1 \ldots dq_m \tag{1}$$

ist, so wird diese Zustandsvertheilung weder durch die Fortbewegung der A-Moleküle, noch durch die Zusammenstösse derselben untereinander verändert; sie ist also stationär, sobald man von den Zusammenstössen mit den B-Molekülen absieht. Für die letzteren gilt der analoge Satz. Abgesehen von ihren Zusammenstössen mit den A-Molekülen bleibt ihre Zustandsvertheilung sicher stationär, wenn die Zahl der Moleküle, für welche Coordinaten und Momente zwischen den durch das Differentialproduct

$$dP_1 \ldots dP_n dQ_1 \ldots dQ_n$$

bestimmten Grenzen liegen, gleich

$$Be^{-h_2 E_2} dP_1 \ldots dP_n dQ_1 \ldots dQ_n \tag{2}$$

ist. A, B, h_1 und h_2 sind Constanten.

§. 4. Wir haben nun noch den Effect der Zusammenstösse der A- und B-Moleküle im Raume σ zu betrachten. Wir betrachten da zuerst den Fall, dass die Zeitdauer eines derartigen Zusammenstosses so ausserordentlich kurz ist, dass die Coordinaten eines jeden der zusammenstossenden Moleküle im Momente des Endes des Zusammenstosses nahezu dieselben Werthe, wie im Momente des Beginnes, haben.

Wenn wir daher bloss diejenigen Zusammenstösse hervorheben, für welche die Coordinaten gegebene Werthe haben, so sind χ_1 und χ_2 constant und die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Momente ist für die beiden zusammenstossenden Moleküle

$$A_1 e^{-h_1 T_1} dp_1 \ldots dp_m,$$

respective

$$B_1 e^{-h_2 T_2} dP_1 \ldots dP_n,$$

wobei A_1 und B_1 für die betrachteten Zusammenstösse constant sind. Wenn wir nun setzen

$$f = A_1 e^{-h_1 T_1}, \quad F = B_1 e^{-h_2 T_2},$$

und mit f' und F' die Werthe derselben Functionen im Momente des Endes des betreffenden Zusammenstosses bezeichnen, so tritt[1] Wärmegleichgewicht zwischen den A- und B-Molekülen ein, wenn allgemein die Gleichung besteht

$$fF = f'F', \tag{3}$$

welche sich wegen der Constanz von A_1 und B_1 reducirt auf

$$e^{-(h_1 T_1 + h_2 T_2)} = e^{-(h_1 T_1' + h_2 T_2')},$$

woraus folgt

$$h_1 T_1 + h_2 T_2 = h_1 T_1' + h_2 T_2'.$$

Wegen der Erhaltung der Energie hat man

$$T_1 + T_2 = T_1' + T_2'.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit h_2 und subtrahirt sie von der vorigen, so folgt

$$(h_1 - h_2) T_1 = (h_1 - h_2) T_1',$$

was für alle Zusammenstösse nur erfüllt sein kann, wenn

$$h_1 = h_2 \tag{4}$$

ist. Die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung ist für die A-Moleküle 3/2 h_1, für die B-Moleküle 3/2 h_2; beide Werthe müssen daher gleich sein

§. 5. Herr Bryan schlug in seinem, in der »British association« zu Oxford 1894 vorgelegten Referate vor, diejenige Zustandsvertheilung unter gleich- oder verschiedenartigen Molekülen, welche für jede Molekülgattung durch die

---

[1] Vergl. Boltzmann, diese Sitzungsberichte, Bd. 66, 1872, letzter Abschnitt.

Formel 1), respective 2) bestimmt ist, die Boltzmann-Maxwell'sche zu nennen, wenn die Constante h für alle Gattungen von Molekülen denselben Werth hat, ferner das Gesetz, wonach diese Zustandsvertheilung in jedem speciellen Falle stationär ist, das Boltzmann-Maxwell'sche Gesetz zu nennen. Wenn wir uns dieser Bezeichnung bedienen, so können wir das Resultat unserer Untersuchung dahin aussprechen, dass das Boltzmann-Maxwell'sche Gesetz für eine Mischung verschiedener Gase auch dann gilt, wenn auf die verschiedenen Gase ganz verschiedene äussere Kräfte wirken, sobald sich nur in einem beliebig kleinen Raume je zwei zu mischen vermögen.

Wenn wir h_1 und h_2 als verschieden voraussetzen, so könnten wir vielleicht, sei es mit Hilfe des Boltzmann'schen Minimumtheorems, sei es in anderer Weise, die Geschwindigkeit berechnen, mit welcher in irgend einem Volumelemente des den beiden Gasen gemeinsamen Bezirks, Energie von dem einen zum anderen übergeht und durch Integration dieses Betrages über den gesammten gemeinsamen Bezirk könnten wir die Geschwindigkeit der gesammten Energieübertragung berechnen, welche wir als die Flächenleitfähigkeit der beiden Gase an ihrer gemeinsamen Berührungsfläche bezeichnen könnten.

§. 6. Die Dichten der beiden Gasarten A und B sind den Factoren

$$A e^{-h_1 \chi_1} \quad \text{und} \quad B e^{h_2 \chi_2} \qquad 5)$$

der Formeln 1) und 2) proportional. In χ_1 und χ_2 sind die Potentiale der von den Ebenen X und Y ausgeübten Kräfte einbegriffen. Diese werden unendlich, sobald man eine Fläche unendlicher Abstossung passirt und bleiben jenseits derselben unendlich. In dieser Weise wird durch unsere Formel ausgedrückt, dass der Raum S_1 frei von B-Molekülen, der Raum S_2 frei von A-Molekülen ist und nur der Raum σ, wo χ_1 und χ_2 endlich ist, von Molekülen beider Gattung erfüllt ist.

Anstatt der Annahmen des §. 2 könnten wir auch voraussetzen, dass die A-Moleküle positiv und die B-Moleküle negativ elektrisch sind. Wenn die Ladung eines A-Moleküles q, die eines B-Moleküles q' ist und die beiden Ebenen X und Y au

der constanten Potentialdifferenz V erhalten werden, so verhält sich die Dichte des Gases von der Gattung A, respective B in den Räumen S_1 und S_2 wie $1 : e^{-hqV}$, respective $e^{-hq'V} : 1$, und wenn man V so gross voraussetzt, dass die beiden Exponentiellen gegen die Einheit fast verschwinden, so werden wieder die beiden Räume S_1 und S_2, deren Potential gleich dem der Begrenzungsebenen X, respective Y vorausgesetzt wird, fast nur je eine Gasart enthalten. Diese letztere Annahme hat ihr Analogon in den bekannten, durch Contact heterogener Körper erzeugten elektrischen Doppelschichten.

§. 7. Wenn an Stelle der bisher vorausgesetzten Zusammenstösse von unendlich kurzer Zeitdauer, solche von endlicher, wenn auch noch immer gegen die Zwischenzeit zweier Zusammenstösse, die dasselbe Molekül nacheinander erfährt, kurzer Zeitdauer vorausgesetzt werden, welche durch beliebige anziehende oder abstossende Kräfte bewirkt werden, so kann dasselbe Resultat mittelst der Methode bewiesen werden, welche in den Berichten der British Association unter dem Titel: »On the application, of the determinantal-relation to the kinetic theory of polyatomic gases« auseinandergesetzt ist.

Diese Gleichung zwischen den Producten der Differentiale der Coordinaten und Momente eines beliebigen conservativen Systems, welche sich einestheils auf den Beginn, anderentheils auf das Ende einer beliebigen Bewegung während einer beliebigen Zeit $t'-t$ bezieht, hat die Form

$$\frac{\partial(p'_1 \ldots p'_m,\ q'_1 \ldots q'_m)}{\partial(p_1 \ldots p_m,\ q_1 \ldots q_m)} = 1. \qquad 6)$$

1. Wenn wir diese Gleichung auf ein beliebiges einzelnes Molekül anwenden, das sich in einem beliebigen Felde äusserer Kräfte bewegt, ohne mit anderen zusammenzustossen, so sehen wir Folgendes: Für jedes derartige Molekül ist sowohl die gesammte Energie, als auch das Product der Differentiale $dp_1 \ldots dp_m dq_1 \ldots dq_m$ constant.

Wenn wir daher eine sehr grosse Zahl gleichbeschaffener Moleküle haben, und wenn

$$f_1(E_1)dp_1 \ldots dq_m$$

die Zahl derjenigen bezeichnet, für welche zu einer beliebigen Zeit die Coordinaten und Momente zwischen den durch das Differentialproduct

$$dp_1 \ldots dq_m$$

gegebenen Grenzen liegen, so kann die Zustandsvertheilung durch die Bewegung der Atome in den Molekülen und die fortschreitende Bewegung der letzteren nicht verändert werden. Dabei ist $f_1(E_1)$ eine beliebige Function von E_1 allein. Auf die Zusammenstösse der Moleküle untereinander oder mit anderen Molekülen ist jedoch noch keine Rücksicht genommen. Setzen wir hier

$$f_1(E_1) = Ae^{-h_1 E_1},$$

so sehen wir sofort, dass, so lange wir auf die Zusammenstösse keine Rücksicht nehmen, die durch die Formel 1) gegebene Zustandsvertheilung unter den A-Molekülen nicht verändert. Dasselbe folgt bezüglich der durch die Formel 2) gegebenen Zustandsvertheilung für die B-Moleküle.

2. Wir verstehen nun unter unserem conservativen System ein Paar zusammenstossender Moleküle, welche beide der Gattung A oder B, oder wovon eines der einen, das andere der anderen Gattung angehören können. Es wird vorausgesetzt, dass die während eines Zusammenstosses wirkenden Kräfte endliche sind und dass die Anzahl der zusammenstossenden Paare eine so grosse ist, dass man überhaupt von Mittelwerthen sprechen kann. Dann muss das Differentialproduct die Coordinaten und Momente beider Moleküle umfassen und auch unter E ist die Gesammtenergie beider Moleküle zu verstehen. Sobald daher die Anzahl der im Zusammenstosse begriffenen Molekülpaare durch den Ausdruck

$$f(E)\, dp_1 \ldots dp_m dq_1 \ldots dq_m dP_1 \ldots dP_n dQ_1 \ldots dQ_n$$

gegeben ist, wird diese Vertheilung ebenfalls ungeändert bleiben, so lange kein Molekül mit einem nicht dem stossenden Paare angehörigen Moleküle zusammentrifft. Aber in einem Gase wird jedes Molekül der Reihe nach mit verschiedenen Molekülen zusammenstossen, so dass nicht immer dieselben Paare als zusammengehörig betrachtet werden können. Da nun die

Grösse f eine Function der Energie allein sein soll, so **muss** es die wohlbekannte Form e^{-hE} haben. Denn bevor zwei Moleküle zusammenstossen, muss die Wahrscheinlichkeit des Zustandes eines jeden derselben vollkommen unabhängig von dem des anderen sein. Es muss also $f(E) = f_1 \times f_2$ sein, wobei f_1 nur vom Zustande des einen, f_2 von dem des anderen der stossenden Moleküle abhängen kann.

Wir können nun schreiben:

$$E = T_1 + T_2 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_{12};$$

dabei sind T_1 und T_2 die lebendigen Kräfte, χ_1 und χ_2 die potentiellen Energien der Moleküle, wegen der von der Anwesenheit des anderen Moleküls unabhängigen Kräfte, endlich ist χ_{12} die potentielle Energie vermöge der Wechselwirkung beider Moleküle.

Nun müssen dieselben Gleichungen auch vor dem Zusammenstosse gelten, wo bei passender Constantenbestimmung $\chi_{12} = 0$ und $E = E_1 + E_2$ ist, wenn E_1 und E_2 die Einzelenergien der Moleküle sind. Daher folgt

$$f_1 f_2 = f(E_1 + E_2),$$

was nur erfüllt sein kann, wenn

$$f_1 = e^{-hE_1}, \quad f_2 = e^{-hE_2}, \quad f = e^{-hE}$$

ist. Daher gelten vor und nach dem Zusammenstosse die Formeln 1) und 2). Während eines Zusammenstosses aber können die beiden zusammenstossenden Moleküle nicht separat betrachtet werden und es ist die Wahrscheinlichkeit irgend einer Constellation beider Moleküle proportional e^{-hE}. Schreiben wir wie früher

$$f = e^{-h(T_1+\chi_1+T_2+\chi_2+\chi_{12})} = e^{-hT_1} e^{-hT_2} e^{-h(\chi_1+\chi_2+\chi_{12})},$$

so sehen wir, dass für eine gegebene Position aller Theile der beiden stossenden Moleküle die kinetische Energie eines jeden derselben noch immer proportional e^{-hT_1}, respective e^{-hT_2} ist. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit gewisser Werthe der Coordinaten des einen Moleküls nicht unabhängig von der Position des anderen vermöge des Factors $e^{-h\chi_{12}}$. Wenn jedoch der

Zusammenstoss vorüber, verschwindet χ_{12} und die Wahrscheinlichkeit gewisser Werthe der Coordinaten wird wieder für beide Moleküle unabhängig und von der Form 1), respective 2).

Da bisher unter χ_1 und χ_2 ganz beliebige Functionen verstanden wurden, so sind unsere Schlüsse ohneweiters anwendbar auf die specielle in §. 2 vorausgesetzte Form der Kräfte. Wo χ_1 oder χ_2 unendlich ist, ist die Anzahl der Moleküle der betreffenden Gattung gleich Null.

Die gleiche Schlussweise ist anwendbar auf die Zusammenstösse zwischen A-Molekülen unter sich oder B-Molekülen unter sich oder auch zwischen mehr als zwei Molekülen. Doch ist natürlich bei unseren Schlüssen immer vorausgesetzt, dass die betreffenden Zusammenstösse so häufig sind, dass überhaupt von einem Vertheilungsgesetz gesprochen werden kann. Natürlich können momentane Zusammenstösse immer als Grenzfälle von Zusammenstössen aufgefasst werden, die eine endliche, aber sehr kurze Dauer haben.

Die obige kurze Auseinandersetzung dürfte genügen, um die Anwendbarkeit der Functionaldeterminantengleichung sowohl auf die Zusammenstösse, als auch auf die Bewegung der Moleküle zwischen zwei Zusammenstössen zu zeigen.

Dieser Gegenstand wurde hier hauptsächlich desshalb so ausführlich behandelt, um zu zeigen, dass es bei Anwendung dieser Methode nicht nöthig ist, von vornherein anzunehmen, dass die die Vertheilung bestimmende Function f die Form e^{-hE} hat, sondern dass es genügt vorauszusetzen, dass f irgend eine Function von E ist. Es kann dann bewiesen werden, dass die Form $f = e^{-hE}$ sowohl nothwendig als auch genügend ist, was den einfachsten, leichtesten und besten Beweis des Boltzmann-Maxwell'schen Gesetzes liefert.

Über eine unter den Ausgrabungen auf Rhodos gefundene astronomische Inschrift

von

Dr. **Norbert Herz.**

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1894.)

In den von Dr. Fr. Freiherrn Hiller v. Gaertringen publicirten Inscriptiones Graceae insularum maris Aegaei I,[1] findet sich unter Nr. 913 eine für den Astronomen hochinteressante Inschrift, deren Entstehungszeit v. Hiller auf 100 v. Chr. Geb. fixirt. Die Tafel enthält in 2 Colonnen *D* und *H* Zahlen für die Planeten Mercur, Mars, Jupiter, Saturn, und zwar nach dem Texte der Colonnen *A*, *B*, *C*, *E*, *F*, *G*:[2]

κατὰ μῆκος ζωιδιακοὶ
κατὰ πλάτος τροπικοὶ
κατὰ βάθος περιδρομαὶ
κατὰ σχῆμα διέξοδοι.

Eine Discussion der Zahlen auf Grund meiner »Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, I. Theil,« ergab dem Verfasser die Möglichkeit, die Zahlen als Orte der Apsiden auszulegen.[3] Der Verfasser hatte die Güte, mir von dieser Inschrift brieflich Mittheilung zu machen, und erlaube ich mir im Folgenden meine ihm bereits brieflich mitgetheilte Meinung hierüber mit seiner Zustimmung zu veröffentlichen.

---

[1] Corpus inscriptionum graecarum; consilio et auctoritate academiae litterarum borussicae editum.

[2] Bezüglich der Details muss ich auf die erwähnte Publication verweisen, deren Bezeichnungen ich im Folgenden auch zu Grunde lege.

[3] l. c. S. 149.

Der grösseren Deutlichkeit wegen theile ich zunächst die Zahlen, wie sie aus dem Originale folgen,[1] mit.

		D	H
8	Στίλβοντος κατὰ σχῆμα διέξοδοι	—	98
	Πυρόεντος κατὰ μῆκος ζωιδιακοὶ	3074.2	174920
10	Πυρόεντος κατὰ πλάτος τροπικοὶ	309436	134360
	Πυρόεντος κατὰ βάθος περιδρομαὶ	3.....	401680
	Πυρόεντος κατὰ σχῆμα διέξοδοι	3.....	136480
	Φαέθοντος κατὰ μῆκος ζωιδιακοὶ	—	21570
	Φαέθοντος κατὰ πλάτος τροπικοὶ	...16	21560
15	Φαέθοντος κατὰ βάθος περιδρομαὶ	24260	242200
	Φαέθοντος κατὰ σχῆμα διέξοδοι	26690	26...0
	Φαίνοντος κατὰ μῆκος ζωιδιακοὶ	910000	—
	Φαίνοντος κατὰ πλάτος τροπικοὶ	919216	9810
	Φαίνοντος κατὰ βάθος περιδρομαὶ	1007176	.1760
20	Φαίνοντος κατὰ σχῆμα διέξοδοι	1008148	881460

Hiezu theilte mir Herr Dr. v. Hiller die folgenden als wahrscheinlich erkannten Correcturen mit:[2]

Zeile 9 und 10,	Colonne *D*:	$\overset{A}{M}$	statt	$\overset{\Lambda}{M}$	daher	174.2 und 19436
» 15	» *H*:	X	»	Σ	»	242600 statt 242200
» 19 und 20	» *D*:	$\overset{B}{M}$	»	$\overset{P}{M}$	»	27176 und 28148
» 20	» *H*:	$\overset{KH}{M}$⁀Α Υ Γ	statt	$\overset{\Gamma I}{M}$⁀Α Υ Ξ	daher	281480

[1] Herr v. Hiller hatte die Güte für die vorliegende Publication den Lichtdruck anfertigen zu lassen, der den Schriftcharakter und theilweise auch den Grad der Zuverlässigkeit der Lesungen zu ermessen gestattet. In letzterer Richtung ist zu bemerken, dass dieser Lichtdruck nach den mir zugegangenen Mittheilungen des Herrn v. Hiller nach einem Abklatsch hergestellt ist, den der schon aus E. Löwy's Veröffentlichungen bekannte Diakonos Adelphiu in Lindos auf Rhodos Herrn P. Wolters nach Athen gebracht hat, der ihn an Herrn v. Hiller sandte. Es soll eine Tafel aus grauem Marmor sein, 0·78 lang, 0·30 hoch, 0·29 tief, gefunden in dem Orte Κέσκιντος, etwa 2 *km* westlich von Lartos. Der Lichtdruck ist nach einer Photographie der Rückseite des Abklatsches hergestellt, da die Vorderseite stellenweise durch die Bürste verdorben war.

[2] Die Gründe werden aus dem Folgenden klar.

Hiezu schlug ich noch die folgenden Correcturen vor, falls diese Lesarten sich als zulässig erweisen sollten:

Zeile 11 und 12, Colonne *D*: $\overset{\Delta}{\mathrm{M}}$ statt $\overset{\Lambda}{\mathrm{M}}$; und Zeile 12, Colonne *H*: $\overset{\mathrm{M}}{\mathrm{M}}$ statt $\overset{\mathrm{I\Gamma}}{\mathrm{M}}$.

v. Hiller ergänzt zunächst die fehlenden Zeilen für Venus und Mercur, so dass im Ganzen 20 Zeilen entstehen, von denen die ersten vier auf Venus, die nächsten vier auf Mercur u. s. w., je vier für die übrigen Planeten entfallen (die ersten 7 Zeilen fehlen daher in der Tafel).

Vergleicht man die Zahlen der Colonne *H*, u. zw. der Zeilen 10, 14, 18,

134360, 21560, 9810

mit den mittleren siderischen Bewegungen in einem Julianischen Jahre nach den jetzt bekannten Werthen:

689051″, 109257″, 43996″,

so erhält man die Verhältnisszahlen:

5·13, 5·06, 4·48.

Sollte das Verhältniss für Saturn auch 5 werden, so müsste es allerdings 8810, also H statt Θ gelesen werden, was aber nicht sehr wahrscheinlich ist.

Nimmt man nun die Zahlen der 11., 15. und 20. Zeile

401680, 242600, 281480,

und vergleicht sie mit den siderischen Bewegungen von Venus und Erde:

2103641, 1295977,

so ergeben sich die Verhältnisszahlen

5·24, 5·34, 4·60.

Liest man daher in Zeile 9 $\overset{\iota\gamma}{\mu}$ und in Zeile 12 $\overset{\mu}{\mu}$, und beachtet, dass dann die übereinanderstehenden Zahlen zu je zweien nahe gleich sind, so lassen sich hieraus die folgenden Schlüsse ziehen: Die Zahlen der Colonne *H* verhalten sich wie die mittleren Bewegungen, oder geben direkt die mittleren

Bewegungen für eine gewisse Zeit (etwa $^1/_5$ Jahr), und zwar die Zeilen 9 und 10 für Mars, 11 und 12 für Venus, 13 und 14 für Jupiter, 15 und 16 für die Sonne, 17 und 18 für Saturn, 19 und 20 für die Sonne.

Da aber für die oberen Planeten die Bewegungen des Epicykelmittelpunktes gleich der siderischen Bewegung und die Bewegung im Epicykel (das Spiegelbild der Erdbahn) gleich der Sonnenbewegung ist, so werden für Jupiter und Saturn die ersten zwei Zeilen die Bewegungen des Epicykelmittelpunktes im Deferenten, die letzten beiden die Bewegung des Planeten im Epicykel darstellen. Ebenso wären die Zahlen der 9. und 10. Zeile die Bewegungen des Marsepicykels auf dem Deferenten, während man annehmen müsste, dass die Zahlen der 11. und 12. Zeile nur irrthümlich die Bewegungen der Venus im Epicykel enthalten. Ich habe zwar noch zwei andere Auslegungen versucht, welche ich aber hier nur der Vollständigkeit wegen anführe, da dieselben nur wenig Wahrscheinlichkeit haben. Man kann annehmen, dass die Reihenfolge der Planeten Mercur, Mars, Venus wäre, und die Zeilen 7, 8 sich auf die mittleren Bewegungen des Mercur, die Zeilen 9, 10 auf diejenigen des Mars, die Zeilen 11, 12 auf diejenigen der Venus beziehen, und zwar auf die Bewegungen im Epicykel, während die noch vorangehenden zwei Zeilen (5 und 6) die Bewegung des gemeinsamen Epicykelmittelpunktes der drei Planeten im Deferenten, also wieder die mittlere Bewegung der Sonne enthalten. In diesem Falle würde die Tafel 4 Zeilen weniger, also nur 16 Zeilen enthalten haben, und die drei Planeten Mercur, Mars, Venus würden dem Schema der unteren Planeten folgen: Bewegung des Epicykelmittelpunktes im Deferenten gleich der Sonnenbewegung; Bewegung des Planeten im Epicykel gleich der siderischen Bewegung des Planeten. Die Annahme, dass in dieser Anordnung die Marsbahn innerhalb der Venusbahn liegen sollte, wäre mit Rücksicht auf den Umstand, dass Mars in Opposition kommen kann, Venus jedoch nur bis zu einem gewissen Abstande von der Sonne gelangen kann, sehr unwahrscheinlich. Da weiters in diesem Falle der Text vor den Zahlen nicht stimmen würde, so erscheint diese Auslegung zum mindesten zweifelhaft.

Eine weitere noch mögliche Auslegung wäre die, dass für Mars die Bewegung des Epicykelmittelpunktes im Deferenten verdoppelt worden wäre, wie dies z. B. in der Eudox'schen Theorie der homocentrischen Sphären sich als nöthig herausstellte. Diese Annahme wird aber durch den Umstand widerlegt, dass in der Theorie der Epicykeln eine derartige Beschleunigung der Rotation unnöthig wird, und weiteres dass die Hälfte der angegebenen Zahl (200840) von den für Jupiter und Saturn angegebenen Zahlen beträchtlich abweicht, wenngleich die Zahlen für Jupiter und Saturn selbst ebenfalls nicht identisch sind, was aber, wie noch später erwähnt wird, auf einen Rechenfehler zurückgeführt werden kann.

Dass die Zahlen nicht etwa der Eudox'schen Theorie angehören können, ist leicht zu sehen; für die 4 Sphären muss zunächst die eine, äusserste der täglichen Bewegung folgen, die andere, innerste der siderischen Bewegung des Planeten, die Bewegung der mittleren beiden muss genau gleich sein, da sonst, wie man leicht sieht, periodisch ansteigende Breitenbewegungen in der Art erfolgen müssten, dass der Planet selbst in die Nähe des Poles der Ekliptik gelangen könnte.

Was die Zahlen der Colonne D betrifft, so hatte P. Tannery durch Vergleichung der beiden Colonnen D und H die Vermuthung ausgesprochen, dass die Zahlen der Colonne H das zehnfache der Colonne D wären.[1] Wie die in den »Nachträgen« von v. Hiller gegebenen Lesarten andeuten, ist diese Annahme zulässig, und schloss ich mich derselben an. Für die Zeilen 17 und 18 wäre dann nach Tannery in Colonne D einfach ϡ zu lesen; doch könnte besser ϡμ und ϡμϑ, also 940 und 949 gelesen, also die μ als Zahl und nicht als Stellenzeiger aufgefasst werden, wofür ich in noch besserer Übereinstimmung ϡπ vorschlage; die Bedeutung des in der 18. Zeile folgenden ͻις bleibt dabei allerdings unaufgeklärt. In Zeile 11 und 12 müsste es weiters $\overset{\delta}{\mu}$ an Stelle von $\overset{\lambda}{\mu}$ gelesen werden, was aber mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit der Typen ΑΛΔ, deren Unterscheidung auf dem Steine im Laufe der Zeiten vollständig verschwinden kann, sehr leicht möglich ist.

---

[1] Schriftliche Mittheilung von v. Hiller an mich.

Es dürfte hier der Ort sein, einiges über die Kreistheilung zu erwähnen. Es scheint mir als ein sonderbarer Zufall, dass in der Schlussbemerkung

ὁ κύκλος μο τξ' στιγμῶν ϑψκ' ἡ μοῖρα στιγμῶν....

ϑψκ' durch τξ' theilbar ist; die hieraus resultirende frühere Hiller'sche Annahme $1^\circ = 27'$ hat jedoch für sich wenig Wahrscheinlichkeit, da eine derartige Kreiseintheilung der griechischen Astronomie völlig fremd ist. v. Hiller fand eine Bestätigung seiner Ansicht in der Übereinstimmung des Ortes der oberen Apside des Saturn mit der unter der Annahme dieser Kreistheilung berechneten Angabe der Tafel. So bestechend dieser Schluss ist, ist er doch kaum haltbar und bin ich der Meinung, dass 1° nicht in $3600''$, sondern in 720 Theile getheilt erscheint. Nimmt man nämlich $1^\circ = 720^p$ und drückt die mittleren Bewegungen μ'' in solchen Theilen aus, so erhält man sofort die in Colonne H angegebenen Zahlen z; denn es ist

$$z = \frac{\mu''}{5} = \frac{\mu^\circ . 60.60}{5} \mu''.720.$$

Die nicht völlige Übereinstimmung kann nicht wundernehmen, da die angenommenen Zahlen für das Julianische Jahr (365·25 Tage) gelten, die Zahlen der Tafel aber wahrscheinlich für das ägyptische Jahr (365 Tage) und andererseits die Bewegungen selbst in jener Zeit als nicht genügend genau bekannt anzusehen sind. Damit wäre denn auch für den Unterschied der Zahlen in den Zeilen 15 und 16 einerseits und 19, 20 andererseits eine Erklärung gegeben. Wenn auch der Unterschied dieser Zahlen viel zu gross ist, um direkt auf diese Art erklärt zu werden, so ist es nicht unmöglich, dass die Zahlen aus Beobachtungen einiger Jahre (eines relativ kurzen Zeitraumes) gewonnen wurden, und dabei für Saturn ein Rechenfehler vorfiel, wodurch alle Zahlen gleichmässig vergrössert erscheinen. Daher kommt dann die Übereinstimmung der von den übrigen beträchtlich abweichenden Verhältnisszahlen 4·48 und 4·60.

Von meinen diesbezüglichen Wahrnehmungen verständigte ich ungesäumt Herrn Baron v. Hiller. Dieser hatte nun seinerseits die Güte, mir weitere Details über die Ansichten Tannery's

mitzutheilen, aus denen ich ersah, dass wir auf demselben Standpunkte stehen. Auch er verwirft die Eintheilung $1° = 27'$, nimmt aber an, dass Θϕχ' als 720 Sonnendurchmesser zu lesen sind.[1] Die Zahlen in den Colonnen *D* und *H* legt er als die Anzahl der Umläufe in einer gewissen Periode aus, welche für die Zahlen der Colonne *D* genähert 25000 Jahre (zufällig nahe der Periode der Präcession) für die Colonne *H* das zehnfache dieser Periode bedeutet.

Im Grunde genommen mit meinen Erörterungen identisch drängt sich jedoch hier die Frage auf, warum eine an und für sich so bedeutende Periode noch verzehnfacht wurde. Sind aber die Zahlen der Colonne *H* die jährlichen Bewegungen in gewissen Theilen, so werden ja durch dieselben Zahlen die Umläufe angegeben, welche in einer gewissen Zeit stattfinden, und zwar in so viel Jahren, als ein Theil im Umkreise enthalten ist, d. h. in 360×720, oder $720 \times 360 = 259200$ Jahren, also zufällig nahe in der zehnfachen Periode der Präcession. Auch die Abweichung der Zahl in der 18. Zeile der Colonne *H* führt Tannery auf einen Fehler in der angenommenen Dauer der Periode zurück, was sich im Wesen mit meiner Annahme für die Zeilen 17 bis 20 deckt.

Liegt in der Verzehnfachung der an und für sich sehr grossen Präcessionsperiode ein nicht zu unterschätzender Einwurf gegen die Tannery'sche Form der Annahme (in merito sind ja, wie ich bereits erwähnt, unsere beiden Suppositionen gleichbedeutend), so ist hingegen noch darauf hinzuweisen, dass in der von mir adoptirten Annahme eine Verwandlung von Graden, Minuten und Secunden, eventuell Grade und 720-teln desselben oder Sonnendurchmessern und 360-teln desselben in Zahlen der kleineren Einheit auftritt, ein Vorgang, der im Alterthum nicht üblich war, da die Darstellung dieser Zahlen im decadischen Systeme eben durch die Sexagesimaltheilung ersetzt

---

[1] Das zuerst von Tannery hervorgehobene Fehlen des Zeichens für die Tausende vor Θ erscheint mir nicht massgebend, da auch in den Zeilen 9, 10 und 15, Colonne *D* und in den Zeilen 18 und 19, Colonne *H* dieses Zeichen wegblieb, oder im Laufe der Zeiten verschwand. Hingegen spricht die Tannery'sche Bemerkung, dass daselbst die Type Θ sich durch ihre Grösse von den anderen unterscheidet, für seine Annahme.

wurde. Aus diesem Grunde würde ich eine Combination beider Annahmen für nicht unwahrscheinlich halten. Die Zahlen der Colonne *D* könnten wohl Umläufe in einer Epoche von 25920 Jahren bedeuten und die in der Colonne *H* befindlichen Zahlen, die aus jenen durch Multiplication mit 10 erhalten wurden, geben sofort die jährlichen Bewegungen in Theilen, von denen 360×720 auf den Umkreis gehen.

Tannery nimmt an, dass sich diese 4 Zahlen auf den siderischen Umlauf (in Länge), den draconitischen Umlauf (in Bezug auf die Knoten) den anomalistischen Umlauf (im Epicykel) und eine zweite Anomalie (abhängig von der Stellung der Sonne) bezieht. Dagegen ist eine sehr wichtige Bemerkung zu machen: Eine siderische Bewegung der Knoten war im Alterthum nur für den Mond bekannt; auch verträgt sich eine supponirte Bewegung der Knotenlinie etwa so, wie sie beim Monde angenommen wurde, nicht mit der Art und Weise, wie die Breitenbewegungen von Ptolomäus, von den Arabern und noch in den Alfonsinischen Tafeln angenommen worden waren.[1] Ebenso hypothetisch erscheint die Annahme, dass man es mit siderischen und tropischen Bewegungen zu thun hat; denn dann müsste die Differenz in einem Jahre constant 50″ oder 10^p sein.[2]

Hingegen hat die Tannery'sche Annahme über die Zahlen der letzten beiden Zeilen eine grosse Wahrscheinlichkeit; könnte man κατὰ σχῆμα διέξοδοι (oder aber, was ebenfalls nicht ausgeschlossen zu werden braucht, κατὰ βάθος περιδρομαὶ), als eine vom Sonnenorte abhängige Anomalie ansehen, so wäre die naheliegendste Annahme die folgende: Die Bewegungen im Epicykel wurden bekanntlich immer vom instantanen Apogeum aus gezählt; addirt man zu dieser Bewegung die Bewegung des Epicykelmittelpunktes, so erhält man die Bewegung von einer festen Richtung im Raume, also gewissermassen eine siderische Bewegung im Epicykel; dann müsste also die

---

[1] Siehe meine Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen; I. Theil, IV. Capitel und II. Theil, I. Capitel.

[2] Der Unterschied der Bewegung in einem tropischen und siderischen Jahre wäre nicht constant, aber ebenfalls sehr klein.

Summe der Zahlen der ersten oder zweiten und der dritten Zeile die Zahlen der vierten Zeile ergeben. Diese Beziehung findet sich thatsächlich für den Jupiter in Colonne *D* und *H* und für den Saturn in Colonne *D*, wenn daselbst, wie früher erwähnt, μ nicht als Stellenzeiger aufgefasst wird, wodurch einerseits ein indirecter Nachweis für die Richtigkeit dieser Lesart gegeben ist, andererseits aber auch in Folge der Übereinstimmung dieser Beziehungen in den Colonnen *D* und *H* die Richtigkeit der Annahme, dass man es in beiden Fällen mit mittleren Bewegungen oder mit Umläufen in einer gewissen Periode zu thun hat, dargethan ist.

Zieht man aus den von Ptolemäus im Almagest mitgetheilten Hipparch'schen Werthen für die Verhältnisse der Umlaufszeiten[1] die jährlichen Bewegungen, so erhält man in der hier angenommenen Einheit die folgenden Zahlen:

für Venus	421365^p	für Jupiter	21860^p
für Mars	137818	für Saturn	8807

Hiezu kommt dann die Bewegung der Erde 259200^p. Die beste Übereinstimmung findet sich bei Jupiter, bei welchem auch die vierte Zahl sehr nahe die siderische Bewegung der Erde gibt, so dass die dritte Zahl mit der von der oberen Apside gezählten Bewegung übereinstimmt.

Einer letzten Mittheilung von Tannery entnehme ich noch folgendes: Tannery nimmt an, dass die 4. Zeile für jeden Planeten als Bewegung in Elongation aufzufassen ist; dann müsste die Summe der 1. und 4. Zeile eine Constante (die Bewegung der Sonne) geben; hiefür spricht allerdings die übliche Bedeutung des κατὰ σχῆμα; hingegen wären die Lesungen noch in folgender Weise zu corrigiren:

	Mars	Jupiter	Saturn
Erste Zeile	154920	24500	9920
Vierte Zeile	136480	266900	281480

---

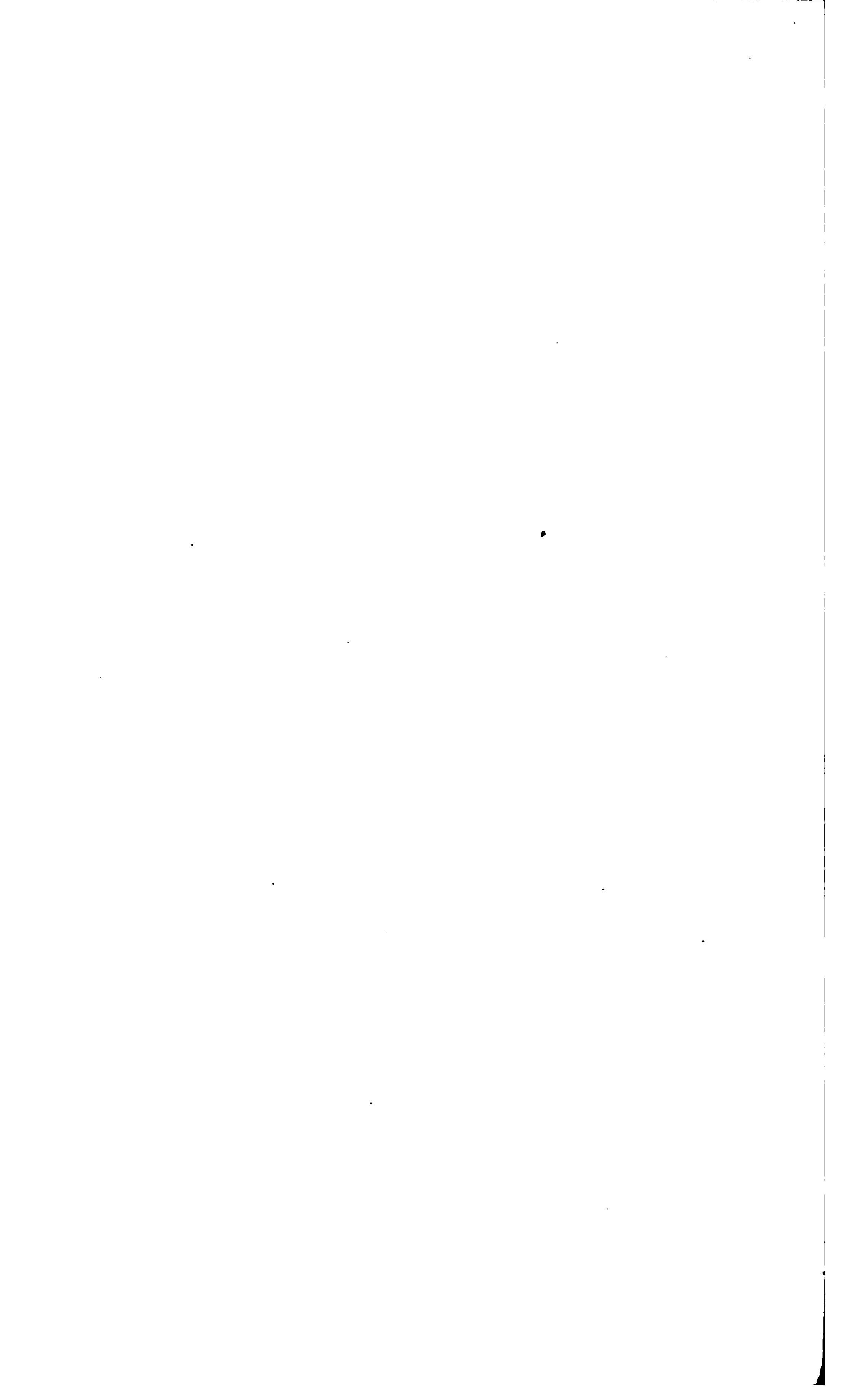
[1] Siehe meine Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen; I. Theil, S. 73.

Hier ist zunächst zu bemerken: die Correctur von A in Δ in der ersten Zeile des Jupiter kann leicht adoptirt werden; die von mir vor Kenntniss der Tafel vorgeschlagene Correctur von $\overset{\mathrm{I\Gamma}}{\mathrm{M}}$ in $\overset{\mathrm{M}}{\mathrm{M}}$ bei der vierten Zeile des Mars erscheint nunmehr als zweifelhaft, und würde in diesem Falle die Tannery'sche Erklärung für zulässiger zu halten sein. Hingegen bleibt in dieser die Lesung $\overset{\mathrm{M}}{\mathrm{M}}$, welche keinesfalls durch $\overset{\mathrm{I\Gamma}}{\mathrm{M}}$ ersetzt werden kann völlig unaufgeklärt, und wenn man daselbst auch mit Tannery $\overset{\mathrm{IH}}{\mathrm{M}}$, also 182680 lesen wollte, so tritt diese Zahl vollständig aus dem Rahmen der übrigen heraus. Es bleibt daher noch manches für die Auslegung der vorliegenden hochinteressanten Inschrift zu thun.

Nachdem v. Hiller aus archäologischen Gründen das Alter des Steines auf etwa 100 vor Christi Geburt setzte, hielt ich anfangs dafür, dass der Stein eine Darlegung Hipparch'scher Astronomie gibt. Da jedoch bekanntlich die von Ptolemäus angegebenen Zahlen direct Hipparch zugeschrieben werden, und diesem daher eine weit genauere Kenntniss der mittleren Bewegungen zugeschrieben werden muss, so dürfte der Stein wohl eher anderen Ursprunges sein, worüber sich allerdings in Ermangelung jeglichen Anhaltspunktes nichts weiter angeben lässt.

n Berlin.)





SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. I. UND II. HEFT.

JAHRGANG 1894. — JÄNNER UND FEBRUAR.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 4 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 1. und 2. Heftes Jänner und Februar 1894 des CIII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

2

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 60 kr. = 3 Mk. 20 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Wollzeile 15) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge, oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. III. BIS V. HEFT.

JAHRGANG 1894. — MÄRZ BIS MAI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 5 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 3. bis 5. Heftes März bis Mai 1894 des CIII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 20 kr. = 2 Mk. 40 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CIII. BAND. VI. HEFT.

JAHRGANG 1894. — JUNI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 7 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1894.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 6. Heftes Juni 1894 des CIII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 20 kr. = 4 Mk. 40 Pfg.